Математика. 11 класс

Шифр	ФИО	Итого балл	Статус
MA0001233525	Кузьмина Анастасия Андреевна	92	Победитель
MA0001014925	Охрименко Диана Андреевна	92	Победитель
MA0001274925	Лебедев Георгий Максимович	86	Победитель
MA0001924525	Букин Данил Сергеевич	82	Победитель
MA0001171125	Галихин Дмитрий Александрович	82	Победитель
MA0001169025	Засухина Елизавета Артуровна	82	Победитель
MA0000977325	Кутяев Иван Михайлович	82	Победитель
MA0001587425	Павлова Аина Егоровна	82	Победитель
MA0001162825	Пахомов Владислав Андреевич	82	Победитель
MA0001772325	Пьянзин Михаил Андреевич	82	Победитель
MA0001499625	Ву Владимир Диневич	80	Победитель
MA0001762025	Захарян Давид Арменович	80	Победитель
MA0001625525	Колыбалова Анастасия Константиновна	80	Победитель
MA0001084525	Назаренко Егор Сергеевич	80	Победитель
MA0001478825	Савельева Лада Владимировна	80	Победитель
MA0001822725	Хачкиев Аркадий Андреевич	80	Победитель
MA0001137925	Валиахметов Тимур Радикович	78	Победитель
MA0001439125	Рожкова Александра Владимировна	78	Победитель
MA0001266025	Трапезников Александр Валентинович	78	Победитель
MA0001700225	Санджиев Санал Владимирович	76	Победитель
MA0001264125	Степаненко Артём Евгеньевич	76	Победитель
MA0001732825	Звонов Матвей Михайлович	74	Призёр II степени
MA0001054625	Коношонок Матвей Максимович	74	Призёр II степени
MA0001057025	Крупина Елизавета Денисовна	74	Призёр II степени
MA0001171825	Мартемьянов Максим Александрович	74	Призёр II степени
MA0001523925	Турищев Александр Сергеевич	74	Призёр II степени
MA0001472525	Антонов Андрей Романович	72	Призёр II степени
MA0001161825	Матюк Анна Александровна	72	Призёр II степени
MA0001139025	Семенов Карим Айгюфович	72	Призёр II степени
MA0001766525	Тиунов Владимир Антонович	72	Призёр II степени
MA0001781525	Ямгуров Дмитрий Дмитриевич	72	Призёр II степени
MA0001103025	Романюк Анастасия Руслановна	70	Призёр II степени
MA0001858225	Щербакова Полина Дмитриевна	70	Призёр II степени
MA0001848425	Алексеев Всеволод Сергеевич	68	Призёр II степени
MA0001812025	Буров Иван Васильевич	68	Призёр II степени
MA0001505025	Губаева Мария Харитоновна	68	Призёр II степени
MA0001120525	Каппушева Диана Алибековна	68	Призёр II степени
MA0001213725	Нови Никита Дмитриевич	68	Призёр II степени
MA0001719025	Лапин Владислав Евгеньевич	66	Призёр II степени

MA0001806125	Николаева Мария Александровна	66	Призёр II степени
MA0001552925	Павлюченков Иван Дмитриевич	66	Призёр II степени
MA0001920925	Петяев Адьян Дмитриевич	66	Призёр II степени
MA0001077625	Языков Андрей Евгеньевич	66	Призёр II степени
MA0001924625	Искалиев Андрей Владимирович	64	Призёр II степени
MA0001869425	Родин Михаил Станиславович	64	Призёр II степени
MA0001078325	Шальных Виктория Артемовна	64	Призёр II степени
MA0001498325	Гирнык Егор Иванович	62	Призёр III степени
MA0001791625	Горбунова Дарья Максимовна	62	Призёр III степени
MA0001338725	Губеев Марк Евгеньевич	62	Призёр III степени
MA0001455925	Исанбирдин Тагир Рустамович	62	Призёр III степени
MA0001025125	Ковтонюк Елизавета Тимофеевна	62	Призёр III степени
MA0001098425	Музяев Егор Александрович	62	Призёр III степени
MA0001627225	Пак Андрей Павлович	62	Призёр III степени
MA0001863725	Русанов Андрей Сергеевич	62	Призёр III степени
MA0001835625	Семин Даниил Иванович	62	Призёр III степени
MA0001735725	Сырчин Андрей Дмитриевич	62	Призёр III степени
MA0001654925	Трифан Тимофей Андреевич	62	Призёр III степени
MA0001637725	Чесноков Кирилл Алексеевич	62	Призёр III степени
MA0001128125	Клятышева Полина Ильинична	61	Призёр III степени
MA0001783925	Афанасенко Ксения Олеговна	60	Призёр III степени
MA0001282225	Герасимов Роман Николаевич	60	Призёр III степени
MA0001647125	Евдокименко Григорий Вячеславович	60	Призёр III степени
MA0001498125	Ефимов Роман Вадимович	60	Призёр III степени
MA0001498725	Жукова Варвара Дмитриевна	60	Призёр III степени
MA0001519725	Захватов Антон Алексеевич	60	Призёр III степени
MA0001812925	Звездаков Дмитрий Васильевич	60	Призёр III степени
MA0001087425	Зотов Савелий Вячеславович	60	Призёр III степени
MA0001063725	Клевцов Алексей Андреевич	60	Призёр III степени
MA0001498025	Макаров Иван Ильич	60	Призёр III степени
MA0001626325	Милованова Алиса Владимировна	60	Призёр III степени
MA0001422525	Невретдинова Амиля Эльдаровна	60	Призёр III степени
MA0001250325	Тимофеев Андрей Дмитриевич	60	Призёр III степени
MA0001696425	Чаус Дмитрий Александрович	60	Призёр III степени
MA0001015125	Шевченко Дмитрий Александрович	60	Призёр III степени
MA0001498925	Льерена Мэса Лаура Беатриз -	59	Призёр III степени
MA0001732625	Грищенко Кирилл Олегович	58	Призёр III степени
MA0001028225	Егоров Евгений Германович	58	Призёр III степени
MA0001566925	Ермачков Иван Дмитриевич	58	Призёр III степени
MA0001126725	Кириченко Денис Игоревич	58	Призёр III степени
MA0001875925	Нежинский Глеб Олегович	58	Призёр III степени
MA0001154225	Панченко Данил Андреевич	58	Призёр III степени

MA0000966725	Сулейманов Арсен Фаилевич	58	Призёр III степени
MA0001196825	Каплунова Анна Вячеславовна	56	Призёр III степени
MA0001094525	Макаров Игорь Сергеевич	56	Призёр III степени
MA0001054825	Митюкляев Владимир Игоревич	56	Призёр III степени
MA0001678125	Попина Сергей Диитриевич	56	Призёр III степени
MA0000995825	Пушкин Иван Алексеевич	56	Призёр III степени
MA0001873325	Федотов Иван Александрович	56	Призёр III степени
MA0001866625	Гращенков Арсений Дмитриевич	55	Призёр III степени
MA0001415825	Железняков Алексей Максимович	54	Призёр III степени
MA0001590825	Иноземцев Даниил Максимович	54	Призёр III степени
MA0001702925	Комлев Максим Владимирович	54	Призёр III степени
MA0001119025	Кузьмин Всеволод Евгеньевич	54	Призёр III степени
MA0001132325	Леонова Екатерина Александровна	54	Призёр III степени
MA0001706725	Мамлеев Дениз Равилевич	54	Призёр III степени
MA0000959325	Сивцева Ньургусун Сергеевна	54	Призёр III степени
MA0001708125	Смирнов Дмитрий Андреевич	54	Призёр III степени
MA0001883025	Стариков Егор Юрьевич	54	Призёр III степени
MA0001775125	Ширшаков Степан Юрьевич	54	Призёр III степени
MA0001239125	Щурова Ольга Алексеевна	54	Призёр III степени

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

M	A	0	0	0	1	2	3	3	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	12	20	20	111	92

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

№ 1

Координаты C $(-2; -\frac{1}{2})$

Уравнения прямых $2x+3,5$ и $\frac{1}{2}x+0,5$

Найдем точки пересечения прямых с $y=\frac{1}{x}$

$2x+3,5=\frac{1}{x}$ | $\cdot 2$

$4x+7=\frac{2}{x}$ | $\cdot x$

$4x^2+7x-2=0$

$D=49+32=81$

$x=\frac{-7\pm 9}{8}$

$x_1=\frac{1}{4}$ $x_2=-2$

$\frac{1}{2}x+0,5=\frac{1}{x}$

$x+1=\frac{2}{x}$

$x^2+x-2=0$

$D=1+8=9$

$x_{3,4}=\frac{-1\pm 3}{2}$

$x_3=1$ $x=-2$

A (0,25; 4), B (1; 1)

M - середина AC; N - середина BC

M (-0,875; 1,75), N (-0,5; 0,25)

Прямая, перпендикулярная AC, проходит через M: $-\frac{1}{2}x+\frac{21}{16}$. Прямая, перпендикулярная BC, проходит через N: $-2x-0,75$.

Центр описанной окружности $\triangle ABC$ – пересечение данных двух прямых.

$-\frac{1}{2}x+\frac{21}{16}=-2x-\frac{3}{4}$ | $\cdot 16$

$-8x+21=-32x-12$

$24x+33=0$

$x=-\frac{33}{24}=-\frac{11}{8}=-1,375$

$y=\frac{11}{16}+\frac{21}{16}=2$

Ответ: (-1,375; 2)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	2	3	3	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

$X_n = n^2 + 300$

$y_n = НОД(X_n; X_{n+1})$

Max $y_n = ?$ ⊛ $НОД(n, 2n+1) = 1$

$y_n = НОД(n^2+300, n^2+300+2n+1) = НОД(n^2+300, 2n+1) =$

$= НОД(n^2 - 600n, 2n+1) \overset{⊛}{=} НОД(n-600, 2n+1) = НОД(1201\,n, 2n+1) \overset{⊛}{=}$

$\overset{⊛}{=} НОД(1201, 2n+1) \leq 1201$

При $n = 600$, $y_{600} = 1201$

$600^2 + 300 = 360300$

$\frac{360300}{1201} = 300$

$601^2 + 300 = 600^2 + 300 + 1201 = 1201 \cdot (300+1)$

Ответ: 1201

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ): М А 0 0 0 1 2 3 3 5 2 5

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 3

Сначала каждому раздадим по ореху, останется 998 орехов и у каждого будет по ореху. Посчитаем общее кол-во способов раздать оставшиеся орехи:

C^3_{1001} - по принципу шаров и перегородок;

Теперь вычтем кол-во способов, где двое получают одинаковое кол-во орехов:

$C^3_{1001} - 3 \cdot 500$, где 3 - кол-во способов выбрать C^2_{1000} человека с одинаковым кол-вом орехов, а 500 - кол-во способов дать выбранному человеку четное число орехов, а остальное разделить по-честно. Все трое не могли получить одинаковое кол-во орехов, т.к. $1001 \vdots 3$. Осталось понять, что остались только способы, где все получают орехи, при чем разное кол-во. Но для 6 случаев распределений: a, b, c; a, c, b; b, a, c; b, c, a; c, a, b; c, b, a, Паша подходит только 2 из 6, ведь Боря должен получить больше всех. Значит кол-во способов надо умножить на $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

$$\frac{C^3_{1001} - 1500}{3} = \frac{166666500 - 500}{1} = 166666000$$

Ответ: 166666000

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

M	A	0	0	0	1	2	3	3	5	2	5

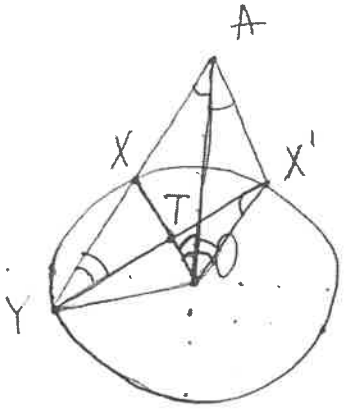
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4



Т.к. X и X' симметричны относительно AO, то $\angle XAO = \angle X'AO$ и $\angle XOA = \angle X'OA$.

Пусть $\angle XYX' = \alpha$, тогда $\angle XOX' = 2\alpha$, а $\angle XOA = \angle X'OA = \alpha$.

Значит AYOX' - вписанный, т.к. $\angle AYX' = \angle AOX' = \alpha$. Точку пересечения AO и YX' обозначим как T.

Тогда пусть $\angle XAO = \angle X'AO = \angle YX'O = \beta$. Тогда Описанная окр. вокруг $\triangle ATX'$ касается OX'. Получается $OT \cdot OA = (OX')^2 = R^2$, где R - радиус окр. с центр. в O и радиусом OX. Тогда $OT = \frac{R^2}{OA}$ - const, а значит и T - фиксирована.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	2	3	3	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

$\frac{3^m+2}{3^n+2}$ - целое, вычтем 1.

$\frac{3^m(3^{m-n}-1)}{3^n+2}$ - целое, тогда и $\frac{3^{m-n}-1}{3^n+2}$ - целое.

Пусть $m = t \cdot n + d$. Покажем, что при нечетных $k \le t$ $\frac{(2^{k-1} \cdot 3^{(m-n)k} - 1)}{3^n+2}$ - целое, а при четных $k \le t$ $\frac{(2^{k-1} \cdot 3^{m-nk}+1)}{3^n+2}$ - целое, по индукции:

База: $k=1$

$\frac{3^{m-n}-1}{3^n+2}$ - целое

$k=2$: $\frac{2(3^{m-n}-1)}{3^n+2} + 1 = \frac{3^n \cdot (2(3^{m-2n}+1))}{3^n+2}$ - целое,

тогда и

$\frac{2 \cdot 3^{m-2n}+1}{3^n+2}$ - целое

Переход: $k \to k+1$ $(k+1 \le t)$

1. k - чет:

$\frac{2^{k-1} \cdot 3^{m-n \cdot k}+1}{3^n+2}$ - целое

$\frac{2^k \cdot 3^{m-n \cdot k}+2}{3^n+2} - 1 = \frac{3^n \cdot (2^k \cdot 3^{m-n \cdot (k+1)})}{3^n+2}$ - целое

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$\frac{(2^k \cdot 3^{m-n(k+1)}) - 1}{3^n+2}$ – целое

2. k – нечет:

$\frac{2^{k-1} 3^{m-n\cdot k} - 1}{3^n+2}$ – целое

$\frac{2^k \cdot 3^{m-n\,k}}{3^n+2} - 2 + 1 = \frac{3^n(2^k \cdot 3^{m-n(k+1)} + 1)}{3^n+2}$ – целое

$\frac{2^k \cdot 3^{m-n(k+1)} + 1}{3^n+2}$ – целое.

Тогда в зависимости от четности t:

1. t – чет.

$\frac{2^{t-1} \cdot 3^d + 1}{3^n+2}$ – целое

Если $d = 0$, то $|2^{t-1}+1| \geq |3^n+2|$, тогда $t-1 \geq n$, $t > n$, а $m = t \cdot n + d$, значит $> n^2$.

Тогда $d \geq 1$:

$\frac{2^t \cdot 3^d + 2}{3^n+2} - 1 = \frac{3^d \cdot (2^t - 3^{n-d})}{3^n+2}$ – целое

$\frac{2^t - 3^{n-d}}{3^n+2}$ – целое

$|2^t - 3^{n-d}| \geq |3^n+2|$, $3^{n-d} - 2^t \leq 3^{n-1} < 3^n+2$

$2^t - 3^{n-d} \geq 3^n+2$, тогда $t \geq n+1$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

M	A	0	0	0	1	2	3	3	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа и рамке справа

$t > n$, а $m = t \cdot n + d > n^2$.

2. t-нечет:

$\frac{2^{t-1} \cdot 3^d - 1}{3^n + 2}$ - целое

Пусть $d = 0$, тогда $|2^{t-1} - 1| \geq 3^n + 2$, тогда

$t - 1 \geq n$, $t > n$, а $m = t \cdot n + d > n^2$

Теперь $d \geq 1$:

$\frac{2^t \cdot 3^d - 2}{3^n + 2} + 1 = \frac{3^d \cdot (2^t + 3^{n-d})}{3^n + 2}$ - целое

$\frac{2^t + 3^{n-d}}{3^n + 2}$ - целое,

$2^t + 3^{n-d} \geq 3^n + 2$; $3^n + 2 \leq 2^t + 3^{n-d} \leq 2^t + 3^{n-1}$,

тогда $2 \cdot 3^{n-1} + 2 \leq 2^t$, значит $t \geq n + 1$, $t > n$,

а $m = tn + d > n^2$.

До-но

Лист 7 из 7

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

M	A	0	0	0	1	0	1	4	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	12	20	20	111	92

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\sqrt{2}$

$x_n = n^2+300$; $y_n = НОД(x_n, x_{n+1})$.

Решим задачу с помощью оценки и примера.

Оценка: $x_n = n^2+300$, тогда $x_{n+1} = (n+1)^2+300$

Пусть $НОД(x_n, x_{n+1}) = НОД(n^2+300; (n+1)^2+300) = x$.

Тогда $(n^2+300) \vdots x$ и $(n+1)^2+300 = (n^2+300+2n+1) \vdots x$ (последовательно, $(2n+1) \vdots x$)

Пусть $2n+1 = x \cdot k$, где $k \in \mathbb{N}$

$2n = xk-1$

$n = \frac{xk-1}{2}$

$(n^2+300) \vdots x$, тогда $\left(\left(\frac{xk-1}{2}\right)^2+300\right) \vdots x$

$\frac{x^2k^2-2xk+1}{4}+300 \vdots x \Rightarrow (x^2k^2-2xk+1+1201) \vdots x \Rightarrow 1201$ должно быть кратно x.

Тогда $x \le 1201 \Rightarrow$ максимальное значение $x = y_n = 1201$.

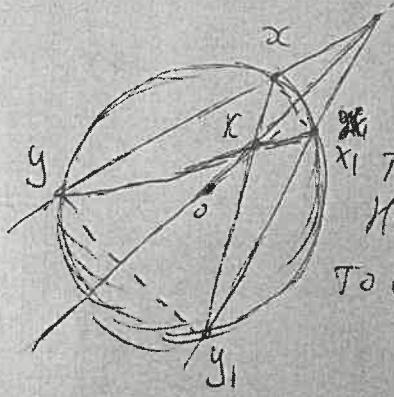
Пример: Пусть $n=600$:

$n^2+300 = 600^2+300 = 360300 = 1201 \cdot 300$

$(n+1)^2+300 = 601^2+300 = 361501 = 1201 \cdot 301$ $\Rightarrow$ их НОД $= 1201$

Ответ: 1201

$\sqrt{4}$



Пусть $OA \cap x'y = \{K\}$, а y' - точка симметричная y относительно прямой OA.

Тогда из-за симметрии xy' и $x'y$ пересекаются в точке $K \Rightarrow K$ принадлежит полярe A относительно окружности

Но т. K принадлежит $OA \Rightarrow K$ - образ точки A при инверсии, то есть не зависит от секущей

ч. т. д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

M	A	0	0	0	1	0	1	4	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

Пусть $m = kn + r$, где k и $r \in \mathbb{Z}$ и при этом $0 \le r < n$.

Тогда $3^m \underset{3^n+2}{\equiv} (-2)^k \cdot 3^r \underset{3^n+2}{\equiv} -2 \equiv 3^n$ (*), отсюда $(-2)^k \cdot 3^r - 3^n \vdots 3^n+2$, т.к. 3^n+2 не кратно 3, то из $3^r \cdot ((-2)^k - 3^{n-r}) \vdots 3^n+2$ следует, что $(-2)^k - 3^{n-r} \vdots 3^n+2$, т.к $r < n$, то $3^{n-r} > 1$, тогда $(-2)^k$ не равно 3^{n-r}.

Так как $(-2)^k - 3^{n-r} \neq 0$, то $|(-2)^k - 3^{n-r}| \ge 3^n+2$, то есть $2^k \ge 3^n+2 - 3^{n-r}$ при $r > 0$ имеем, что $2^k \ge 2 \cdot 3^{n-1}$, то есть $k \ge n$ и $m = kn + r > kn \ge n^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{m > n^2}$

при $r = 0$ имеем, что $(-2)^k \underset{3^n+2}{\equiv} -2$ по *, то есть $(-2)^k + 2 \vdots 3^n+2$, т.к. $m > n$, то $k > 1$, поэтому $(-2)^k + 2 \neq 0 \Rightarrow |(-2)^k + 2| \ge 3^n+2$, то есть $2^k \ge 3^n+2-2 = 3^n \Rightarrow k > n$

$\begin{cases} m = kn \\ \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow m = kn > n^2 \rightarrow \underline{m > n^2}$

Ч. Т. Д.

№3

Кол-во упорядоченных разбиений 1001 на 3 слагаемых будет C_{1000}^2. Нас интересуют только те, где первое слагаемое больше остальных, значит надо вычесть количество вариантов, когда есть хотя бы 2 наибольших слагаемых и поделить на 3.

$1001 \vdots 3 \Rightarrow$ таких вариантов всего $(500 - 334 + 1) \overset{\cdot 3}{\rightarrow} = 167$, т.к. два наибольших числа могут быть от 334 до 500.

Тогда искомое число равно $\frac{C_{1000}^2 - 167}{3} = C_{1000}^2 : 3 - 167 =$

$= 166500 - 167 = 166333$. Это наш ответ.

Ответ: 166333

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	0	1	4	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

У т. C абсцисса $-2 \Rightarrow x=-2$. Ордината $y=\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}$, т.к. т. C находится на гиперболе $y=\frac{1}{x}$.

Прямая через $C\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$ с угловым коэф. 2: $y=2(x+2)-\frac{1}{2}=2x+\frac{7}{2}$ пересекает гиперболу $y=\frac{1}{x}$ в точке A, тогда для точки A:

$y=2x+\frac{7}{2}$; $y=\frac{1}{x} \Rightarrow 2x+\frac{7}{2}=\frac{1}{x}$

$4x^2+7x-2=0$ $D=49+32=81$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{-7+9}{8} \\ x=\frac{-7-9}{8} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{4} \\ x=-2 \end{array}\right.$, если $x=-2$, то это точка C, значит $x=\frac{1}{4}$ – это точка A, тогда у A координаты: $\left(\frac{1}{4};4\right)$

Прямая через $C\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$ с угловым коэф $\frac{1}{2}$: $y=\frac{1}{2}(x+2)-\frac{1}{2}=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ пересекает гиперболу в точке B. Для точки B:

$y=\frac{1}{x}$; $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$

$x^2+x-2=0$ $D=1+8=9$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{-1+3}{2} \\ x=\frac{-1-3}{2} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$, если $x=-2$, то это точка C, значит $x=1$ – это точка B, тогда у B координаты: $(1;1)$.

Найдем центр описанной окр. с помощью пересечения центральных перпендикуляров к AB и AC.

Середина отрезка AB: $M_{AB}=\left(\frac{\frac{1}{4}+1}{2};\frac{4+1}{2}\right)=\left(\frac{5}{8};\frac{5}{2}\right)$

Середина отрезка BC: $M_{BC}=\left(\frac{1-2}{2};\frac{1-\frac{1}{2}}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$

Найдем угловые коэф. сторон треугольника и серединных перпендикуляров

Угловой коэф AB: $k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{1-4}{1-\frac{1}{4}}=-4$. Перпендикуляр к AB будет иметь угловой коэф $\frac{1}{4}$ (обратный по противоположный знак)

Уравнение: $y-\frac{5}{2}=\frac{1}{4}\left(x-\frac{5}{8}\right)$; $y=\frac{1}{4}x+\frac{75}{32}$

Аналогично для BC: $k_{BC}=\frac{-\frac{1}{2}-1}{-2-1}=\frac{1}{2}$. У перпендикуляра BC угловой коэф -2

$y-\frac{1}{4}=-2\left(x+\frac{1}{2}\right)$; $y=-2x-\frac{3}{4}$

$\begin{cases} y=\frac{1}{4}x+\frac{75}{32} \\ y=-2x-\frac{3}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{4}x+\frac{75}{32}=-2x-\frac{3}{4} \\ y=-2x-\frac{3}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{11}{8} \\ y=2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ координаты центра $O\left(-\frac{11}{8};2\right)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	0	1	4	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1 (продолжение)

Проверим, что отрезки OA; OB и OC равны. Тогда т. O будет центром описанной окружности.

$R = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ - между двумя точками.

$R_{OA} = \sqrt{(\frac{1}{4}+\frac{11}{8})^2+(2-2)^2} = \frac{\sqrt{425}}{8}$

$R_{OB} = \sqrt{(1+\frac{11}{8})^2+(1-2)^2} = \frac{\sqrt{425}}{8}$

$R_{OC} = \sqrt{(-2+\frac{11}{8})^2+(-\frac{1}{2}-2)^2} = \frac{\sqrt{425}}{8}$

Все расстояния равны $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ т. O - центр описанной окружности

Ответ: $(-\frac{11}{8}; 2)$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

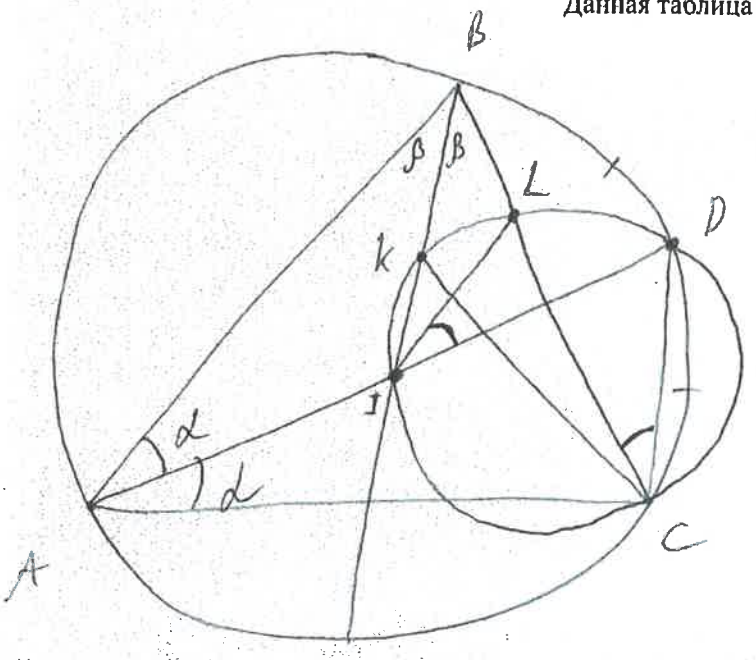
M	A	0	0	0	1	2	7	4	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	~~22~~ 20	20	20	6	11	~~88~~

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)



1) окр.(CDI) ∩ BC = L
2) Пусть ∠BAI = α = ∠IAC
3) ABPC – вписан ⇒ ∠BAI = ∠BCD = α
4) CDLkI – вписан ⇒ ∠BCD = LID = α
5) Пусть ∠ABI = β = ∠CBI
6) ∠BID = ∠ABI + ∠BAI = α + β (внешний для △ABI)
7) ∠BIL = ∠BID − ∠LID = β
8) IkLC – вписан ⇒ ∠kIL = ∠kCL = β
9) ∠KCL = ∠kBC = β ⇒ Bk = kC

ч. т. д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	2	7	4	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 2

$x_1 = 4$ $\quad x_1 = 4$

$x_2 = 6$ $\quad x_2 = 6$)2

$x_3 = 4$ $\quad x_3 = 9$)3

$x_4 = 9$ $\quad x_4 = 14$)5

$x_5 = 4$ $\quad x_5 = 20$)6

$x_6 = 15$ $\quad x_6 = 27$)7

$x_7 = 4$

$x_{2n+1} = 4$

~~Докажем, что разность между~~

Докажем, что $x_{k+1} - x_k = k+2$, при $k \geq 4$

База: (сверху)

Пусть $x_{2k-1} = 4$

Т.к. числа составные, то $x_{2k} \geq 4$ $\Rightarrow 2 \mid x_{2k}$

~~2~~

База: проверена (сверху)

Пусть $x_n = m$ $\Rightarrow$ ~~2~~ $x_{n+2} \vdots 2m + 2n + 4 - m$

$x_{n+1} = m + n + 2$

Хотим доказать: $x_{n+2} = m + 2n + 5$ $\quad x_{n+2} \geq m + 2n + 5$, докажем, почему такое x_{n+2} подходит. ~~Если т нечетное, то $m + 2n + 5 : 2 \Rightarrow$ составное подходит~~

~~Докажем по индукции, что~~ получившееся число составное. Будем доказывать, что $x_{2n} : 2n+3$

$x_{2n+1} : 2n+1$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	2	7	4	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$x_1 = 4$

$x_2 = 6$

$x_3 = 9$ ⋮3 ⎫ +5

$x_4 = 14$ ⋮7 ⎭ +6

$x_5 = 20$ ⋮5 ⎫ +7

$x_6 = 27$ ⋮9 ⎭

$x_7 = 35$ ⋮7

$x_8 = 44$ ⋮11

$x_9 = 54$ ⋮9

$x_{10} = 65$ ⋮13

База: проверена

Пусть $x_{2j} = a$ ⋮ $2j+3$

$x_{2j+1} = a+2j+2$ ⋮ $2j+1$

$x_{2j+2} = a+4j+5$ ⋮ $2j+5$

~~$x_{2j+3} = a+6j+9$ ⋮ $2j+3$~~

Правда ли, что $x_{2j+3} = a+6j+9$ ⋮ $2j+3$ – правда, т.к

$x_{2j+3} = a + 3(2j+3)$ ⋮ $2j+3$

$2j+3$ ⋮ $2j+3$

Пусть $x_{2j} = a$ ⋮ $2j+3$

$x_{2j+1} = a+2j+2$ ⋮ $2j+1$

$x_{2j+2} = a+4j+5$ ⋮ $2j+5$

$x_{2j+3} = a+6j+9$ ⋮ $2j+3$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	2	7	4	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 3

a, b, c, d – числа

I сл. Если $a=b=c=d \Rightarrow 4a = 1001$ $a \notin \mathbb{N}$

II сл. Если 2 числа равны и другие 2 числа равны, то

$2a + 2c = 1001$

$\cdot 2$ $\quad \div 2 \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ возможны

случаи только когда 2 числа равны между собой (или 3). Рассматривая случай равенства 2 чисел, мы также рассмотрим случай когда 3 числа равны

Доо: Пусть $a=b$

$2a + c + d = 1001$

Заметим, что при фиксированном a, c может принимать значения от 1 до $1001-2a-1$ включительно, заметим, что при фикс. a и c однозначно восст. d. Перебери случаи

$a=1 \Rightarrow$ c от 1 до 998 – 998 вариантов

$a=2 \Rightarrow$ c от 1 до 996 – 996 вариантов

$\vdots$

$a=k \Rightarrow$ c от 1 до $1000-2k$ – $1000-2k$ вариантов

$\vdots$

$a=249 \Rightarrow c$ от 1 до 2 – 2 варианта

$a=250$ – слишком много

Заметим, что если c и d поменять местами, то набор не изменится $\Rightarrow$ мы каждый вариант учли дважды

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	2	7	4	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Значит всего вариантов $\frac{2+4+6..+998}{2} = 1+2+3+..+499 =$

$= \frac{500}{2} \cdot 549 \quad \frac{500}{2} \cdot 499 = 250 \cdot 499$

Также заметим, что c и d - нечетные $\Rightarrow c \neq d \Rightarrow$

Каждый раз мы не посчитали вариант (кроме уже учтенных)

Очевидно, что для разных a разные наборы $\Rightarrow$ между ними наборы не пересекаются $\Rightarrow$ каждый раз мы не посчитали вариант (кроме уже учтенных)

Ответ: $250 \cdot 499$

~~500~~ $\cdot 549$

2

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	2	7	4	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 2

$x_1 = 3$

$x_2 = 6$

$x_3 = 9 = 1+2+3+4-1$

$x_4 = 14 = 1+2+3+4+5-1$

$x_5 = 20 = 1+2+3+4+5+6-1$

Докажем, что $x_n = 1+2+3 \ldots +n+n+1-1$

База: проверена

Пусть $x_{k-1} = 1+2+3 \ldots +k-1+k-1$

$x_k = 1+2+3 \ldots +k-1+k+k+1-1$

Тогда $x_{k+1} > 2x_k - x_{k-1} = x_k + x_k - x_{k-1} = x_k + k + 1$, т.к. $x_{k+1} \in \mathbb{N}$ =)

$x_{k+1} \geq x_k + k + 2 = 1+2+3 \ldots +k+k+1+k+2-1$

Докажем, что числа вида $1+2+3 \ldots +n-1$ – составные

Если n – нечётное, то слагаемые разбиваются на пары: 2 и n, 3 и $(n-1)$ и т.д. "1" с "-1"; очевидно, что в каждой паре не одинаковые числа из-за нечетности n и очевидно, что каждая пара делится на $n+2$ =) вся сумма делится на $n+2$ =) составное

Если n – чётное, то слагаемые разобьем на пары так: 1 и $n-2$, 2 и $n-3$ и т.д. $n-1$ будет без пары, а n в пару с -1, очевидно, что в каждой паре разные числа из-за чётности n, очевидно, что каждая пара $\vdots n-1$ $\Rightarrow$ вся сумма делится

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	2	7	4	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

на $n-1$ $\Rightarrow$ составное $\Rightarrow$ такое x_{k+1} нам подходит

Переход доказан $\Rightarrow$ $x_n = 1+2+3..+n+n+1-1$ $\Rightarrow$

$x_{100} = 1+2+3..+100+101-1 = 5050+100 = 5150$

Ответ: 5150

Задача 1

$f(x) = x^2 - 2x - 1$

$g(x) = x^2 - 3x - 1$

$f(x) = g(x) + x$ $\Rightarrow$ $(g(x_1))^3 = (f(x_1) - x_1)^3 = -x_1^3$

$g(x) = f(x) - x$ $\Rightarrow$ $f(x_3) = g(x_3) + x_3 = x_3$

$\Rightarrow (g(x_2))^3 = (f(x_2) - x_2)^3 = -x_2^3$

$\Rightarrow f(x_4) = g(x_4) + x_4 = x_4$

$-x_1^3 x_3 - x_2^3 x_4 = -(x_1^3 x_3 + x_2^3 x_4)$

$f(x) = x^2 - 2x + 1$

$x_1 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2} \Rightarrow x_1^3 = 1+3\sqrt{2}+6+2\sqrt{2} = 7+5\sqrt{2}$

$x_2 = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2} \Rightarrow x_2^3 = 1-3\sqrt{2}+6-2\sqrt{2} = 7-5\sqrt{2}$

$g(x) = x^2 - 3x - 1$

$x_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

$x_4 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	2	7	4	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Возможны 2 значения:

~~$(7+5\sqrt{2})\frac{3+\sqrt{13}}{2}+(7-5\sqrt{2})\frac{3-\sqrt{13}}{2}$~~

1) $-\left(\frac{(7+5\sqrt{2})(3+\sqrt{13})}{2}+\frac{(7-5\sqrt{2})(3-\sqrt{13})}{2}\right)=-\frac{21+7\sqrt{13}+15\sqrt{2}+5\sqrt{26}+21-15\sqrt{2}-7\sqrt{13}+5\sqrt{26}}{2}=$

$=-\frac{42+10\sqrt{26}}{2}=-(21+5\sqrt{26})=-21-5\sqrt{26}$

2) $-\left(\frac{(7+5\sqrt{2})(3-\sqrt{13})}{2}+\frac{(7-5\sqrt{2})(3+\sqrt{13})}{2}\right)=-\frac{21-7\sqrt{13}+15\sqrt{2}-5\sqrt{26}+21+7\sqrt{13}-15\sqrt{2}-5\sqrt{26}}{2}=$

$=-\frac{42-10\sqrt{26}}{2}=-(21-5\sqrt{26})=-21+5\sqrt{26}$

Ответ: $-21-5\sqrt{26}$; $-21+5\sqrt{26}$

Задача 5

Ответ: (1; 2; 2)

Докажем, что НОД(a; b)=1

М: НОД(a; b)= d

$a^3+b^3=(abc-1)^2$

$a^3 : d$

$b^3 : d$

$abc-1 \nmid d \Rightarrow (abc-1)^2 \nmid d$

$\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow (a; b)=1$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	2	7	4	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

~~$a^3+b^3=(a+b)(a^2$~~

$a^3+b^3=t^2$

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=t^2$

$(a+b)((a+b)^2-3ab)=t^2$

~~Докажем, что у $a+b$ и~~

Пусть $a+b : p\ (p \neq 3) \Rightarrow$ если $(a+b)^2-3ab : p$, то $3ab : p \Rightarrow$ или $a : p \Rightarrow a+b : p$ – противоречие $\Rightarrow$

Если $a+b \not\vdots 3$, то $a+b$ – полный квадрат и $(a+b)^2-3ab$ – полный квадрат.

Пусть $a+b : 3^d$, т.к. $a \not\vdots 3, b \not\vdots 3 \Rightarrow$ ~~v_3~~ $v_3((a+b)^2-3ab)=1 \Rightarrow$

$v_3((a+b)((a+b)^2-3ab))=d+1$ – должно быть нечётным

$\Rightarrow a+b$ может быть на 3 в нечётной степени или не делиться на 3

Если $a+b \vdots 3$, то $v_3(a+b)=2k+1$ $\quad v_3((a+b)^2-3ab)=1$

$v_p(a+b)=2n\ (p \neq 3) \quad v_p((a+b)^2-3ab)=2m\ (p \neq 3)$

Если $a+b \not\vdots 3$, то $v_p(a+b)=2j$, $v_p((a+b)^2-3ab)=2i$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	9	2	4	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
16	20	20	20	6	//	82

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задание № 1

$f(x) = x^2 - 4x - 1 = (x-2)^2 - 5$

$g(x) = x^2 - 5x - 1$

$f(x) = 0$

$x^2 - 4x - 1 = 0$

$D = 16 + 4 = 20$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$

$g(x) = 0$

$x^2 - 5x - 1 = 0$

$D = 25 + 4 = 29$

$x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2} = 2 + \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$

Возможные варианты:

1) $x_1 = 2 + \sqrt{5}$ $x_3 = 2 + \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$x_2 = 2 - \sqrt{5}$ $x_4 = 2 + \frac{1-\sqrt{29}}{2}$

$(g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4) = (2+\sqrt{5})^2 - 5(2+\sqrt{5}) \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)^2 - 5\right)^3 + \dots$

$f\left(2 + \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) = \left(\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)^2 - 5 = \frac{1 + 2\sqrt{29} + 29}{4} - 5 = \frac{30 + 2\sqrt{29}}{4} - 5 =$

$\frac{15 + \sqrt{29}}{2} - 5 = \frac{15 + \sqrt{29} - 10}{2} = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$

$f\left(2 + \frac{1-\sqrt{29}}{2}\right) = \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}\right)^2 - 5 = \frac{1 - 2\sqrt{29} + 29}{4} - 5 = \frac{30 - 2\sqrt{29}}{4} - 5 = \frac{15 + \sqrt{29}}{2} - 5 =$

$\frac{5 - \sqrt{29}}{2}$

$g(2 + \sqrt{5}) = (2+\sqrt{5})^2 - 5(2+\sqrt{5}) - 1 = 4 + 4\sqrt{5} + 5 - 10 - 5\sqrt{5} - 1 = -2 - \sqrt{5}$

$g(2 - \sqrt{5}) = (2-\sqrt{5})^2 - 5(2-\sqrt{5}) - 1 = 4 - 4\sqrt{5} + 5 - 10 + 5\sqrt{5} - 1 = -2 + \sqrt{5}$

Возможен и случай:

1) $x_1 = 2 + \sqrt{5}$ $x_3 = 2 + \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$x_2 = 2 - \sqrt{5}$ $x_4 = 2 + \frac{1-\sqrt{29}}{2}$

$(g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4) = \left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right) \cdot (-2-\sqrt{5})^3 + (-2+\sqrt{5})^3 \left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right)$

$(-2-\sqrt{5})^3 = -(2+\sqrt{5})^3 = -(2+\sqrt{5})(4 + 4\sqrt{5} + 5) = -(2+\sqrt{5})(9 + 4\sqrt{5}) = -(18 + 8\sqrt{5} + 9\sqrt{5} + 20)$

$= -(38 + 17\sqrt{5}) = -38 - 17\sqrt{5}$

$(\sqrt{5} - 2)^3 = (\sqrt{5} - 2)(5 - 4\sqrt{5} + 4) = (\sqrt{5} - 2)(9 - 4\sqrt{5}) = 9\sqrt{5} - 18 - 20 + 8\sqrt{5} = 17\sqrt{5} - 38$

$\left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right)(-38 - 17\sqrt{5}) + (17\sqrt{5} - 38)\left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left((5+\sqrt{29})(-38 - 17\sqrt{5}) + (17\sqrt{5} - 38)(5 - \sqrt{29})\right) =$

$\frac{1}{2}\left(-38 \cdot 5 - 38\sqrt{29} - 17 \cdot 5\sqrt{5} - 17\sqrt{5}\sqrt{29} + 17 \cdot 5\sqrt{5} - 38 \cdot 5 - 17\sqrt{5} \cdot \sqrt{29} + 38\sqrt{29}\right) =$

$\frac{1}{2}\left(-380 - 34\sqrt{5 \cdot 29}\right) = -190 - 17\sqrt{145}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	9	2	4	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задание № 2

$X_1 = 5$ $X_3 = 10$ $X_5 = 20$

$X_2 = 7$ $X_4 = 14$ $X_6 = 27$

Исходя из правил из условия $X_3 = 10$, $X_4 = 14$, т.к. $2X_2 - X_1 = 9 \Rightarrow X_3 = 10$

$2X_3 - X_2 = 13 \Rightarrow X_4 = 14$

Аналогично вычислим X_5 и X_6

Покажем, что для $n \geq 6$ $X_n = X_{n-1} + n + 1$

Докажем это с помощью математической индукции

Пусть это утверждение верно для $k > 6$ ($n = k$), для $k = 6$ утверждение верно

$X_6 = X_5 + 7$

Из условия $X_n > 2X_{n-1} - X_{n-2}$ предполагая, что для всех меньших k утверждение верно.

А по предположению индукции $X_n = X_{n-1} + n + 1 \Rightarrow X_{n-1} = X_n - n + 1$

$X_k > 2X_{k-1} - X_{k-2}$

$X_{k-2} = X_{k-1} - (k-1) - 1 = X_{k-1} - k + 1 - 1 = X_{k-1} - k$

$X_k > 2X_{k-1} - X_{k-1} + k = X_{k-1} + k \Rightarrow X_k \geq X_{k-1} + k + 1$

А по предположению индукции $X_n = X_{n-1} + k + 1$, то есть X_k минимально возможное, т.к. $X_k > X_{k-1} + k$, теперь покажем, что $X_{n-1} + k + 1$ — составное число

1	2	3	4	5	6
5,	7,	10,	14,	20,	27
	2	3	4	6	7

Исходя из предположения индукции, можно получить формулу n члена, где $n \geq 6$:

$$X_n = 20 + \frac{(7 + n + 1)(n - 5)}{2} = \frac{n(n+3)}{2}$$

Осталось показать, что $\frac{n(n+3)}{2}$, при $n \geq 6$ всегда составное

Давайте посмотрим на два случая n - чётное $\Rightarrow n = 2c$ и

n - нечётное $\Rightarrow n = 2c + 1$ т.к. $n \geq 6 \Rightarrow c \geq 3 \Rightarrow c \neq 1$

Если $n = 2c \Rightarrow \frac{n(n+3)}{2} = \frac{2c(2c+3)}{2} = c(2c+3)$ и т.к $c \neq 1 \Rightarrow$ Это составное число.

Если $n = 2c + 1 \Rightarrow \frac{n(n+3)}{2} = \frac{(2c+1)(2c+4)}{2} = (2c+1)(c+2) \Rightarrow$ Это составное число $\Rightarrow$ Мы доказали предположение индукции и получили формулу k-го члена. $X_{98} = \frac{98 \cdot 101}{2} = 49 \cdot 101 = 4949$ Ответ: $X_{98} = 4949$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	9	2	4	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Вариант 2

2) $x_1 = 2-\sqrt{5}$ $\quad x_3 = 2+\frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$x_2 = 2+\sqrt{5}$ $\quad x_4 = 2+\frac{1-\sqrt{29}}{2}$

Значение выражения

$\left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right)\left(17\sqrt{5}-38\right)+\left(-38-17\sqrt{5}\right)\left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left((5+\sqrt{29})(17\sqrt{5}-38)+(5-\sqrt{29})(-38-17\sqrt{5})\right)=$

$=\frac{1}{2}\left(5\cdot17\sqrt{5}+17\sqrt{5}\sqrt{29}-38\cdot5-38\sqrt{29}-38\cdot5+38\sqrt{29}-5\cdot17\sqrt{5}+17\sqrt{5}\sqrt{29}\right)=$

$=\frac{1}{2}\left(34\sqrt{5\cdot29}-380\right)=17\sqrt{145}-190$

3) $x_1 = 2-\sqrt{5}$ $\quad x_4 = 2+\frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$x_2 = 2+\sqrt{5}$ $\quad x_3 = 2+\frac{1-\sqrt{29}}{2}$

Значение выражения

$\left(17\sqrt{5}-38\right)\left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right)+\left(-38-17\sqrt{5}\right)\left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left((5-\sqrt{29})(17\sqrt{5}-38)+(-38-17\sqrt{5})(5+\sqrt{29})\right)$

$=\frac{1}{2}\left(5\cdot17\sqrt{5}-38\cdot5-17\sqrt{5}\sqrt{29}+38\sqrt{29}-38\cdot5-17\sqrt{5}\cdot5-38\sqrt{29}+17\sqrt{5}\sqrt{29}\right)=$

$\frac{1}{2}\left(-380-34\sqrt{145}\right)=-190-17\sqrt{145}$

4) $x_1 = 2+\sqrt{5}$ $\quad x_3 = 2+\frac{1-\sqrt{29}}{2}$

$x_2 = 2-\sqrt{5}$ $\quad x_4 = 2+\frac{1+\sqrt{29}}{2}$

Значение выражения

$\left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right)\left(-38-17\sqrt{5}\right)+\left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right)\left(-38+17\sqrt{5}\right)=\frac{1}{2}\left((5-\sqrt{29})(-38-17\sqrt{5})+(5+\sqrt{29})(-38+17\sqrt{5})\right)$

$=\frac{1}{2}\left(-38\cdot5+38\sqrt{29}-17\cdot5\cdot\sqrt{5}+17\sqrt{145}-38\cdot5-38\sqrt{29}+17\sqrt{5}\cdot5+17\sqrt{145}\right)=$

$=\frac{1}{2}\left(-380+34\sqrt{145}\right)=-190+17\sqrt{145}$

Перебрав все варианты, можем заключить, что у заданного выражения может быть всего два значения.

Ответ: 2, $-190-17\sqrt{145}$ и $-190+17\sqrt{145}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	9	2	4	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задание №3

$a+b+c+d=1005$

$a \le b \le c \le d$

Допустим, что в наборе могут совпадать пара чисел или три числа.

Если совпадают все 4, то $1005 \equiv 4a$, противоречие, т.к. $1005 \not\vdots 4$, если есть две пары равных чисел, тогда $1005 = 2k + 2c = 2(k+c)$, что противоречит, т.к. $1005 \not\vdots 2$

Пусть совпадает 3 числа, тогда $1005 = 3x + y$

т.к. $y \ge 1 \Rightarrow x \le \frac{1004}{3} \Rightarrow x \le 334 \Rightarrow x \in [1; 334]$ и т.к. по $y = 1005 - 3x \Rightarrow y$ однозначно определяется $x \Rightarrow$ т.к y, x есть 334 варианта, значит наборов, где совпадают 3 числа тоже 334 варианта

Теперь рассмотрим наборы где совпадает пара чисел:

$1005 = 2x + y + k$ т.к $y + k \ge 2 \Rightarrow x \le \frac{1003}{2} \Rightarrow x \le 501$

$1005 - 2x = y + k$, после того, как мы зафиксировали x нужно число $1005-2x$ разделить на два слагаемых сделать это можно $C_{1005-2x-1}$ способами, что равно $1004 - 2x$, но т.к. нас интересуют наборы, то получается, что при таком подходе разные наборы $\{x, y\}$ и $\{y, k\}$ будут разными наборами, если $x \ne y \Rightarrow$ для заданного x, ~~что 1005-2x~~ $+2$, будет $502 - x$ способов распределить $1005-2x$ на два слагаемых $\Rightarrow$ таких способов $\sum_{k=1}^{502}(502-k)$, стоит

Но т.к. $1005-2x$ - нечётно $\Rightarrow y \ne k$ всегда т.к. иначе $1005-2x = 2c \Rightarrow$ $1005-2x$ - чётное, противоречие

отметить, что мы также учтём ~~все~~ и те варианты, когда совпадают 3 числа $\Rightarrow$ всего будет $\sum_{k=1}^{501}(502-k)$ способов представить число 1005 в сумму 4 чисел, где есть повторяющиеся

$\sum_{k=1}^{501}(502-k) = 502 \cdot 501 - \frac{(1+501)\,501}{2} = 502 \cdot 501 - \frac{502 \cdot 501}{2} = \frac{502 \cdot 501}{2} = \frac{251 \cdot 501}{1} =$

$= 125751$

Ответ: 125751

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	9	2	4	5	2	5

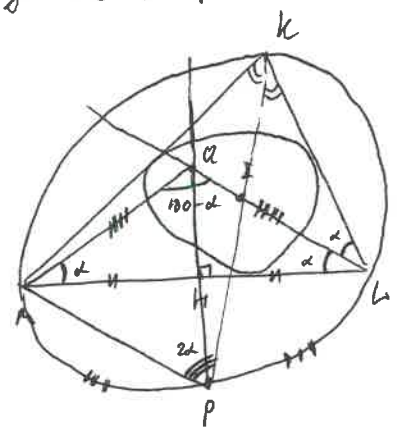
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задание № 4



Дано: $\triangle KLM$, KLM не равнобедренный, I – центр вписанной окружности, KI пересекает опис. окр. $\triangle KLM$ в точке P, окружность $MPI \cap LI = Q$

Доказать: $LQ = MQ$

Д-во: для доказательства, мы определим точку Q как пересечение серпера AH и ML и биссектрисы LI, а затем покажем, что при данном определении точки Q она попадёт на окружность MIP, т.к. у окружности с прямой и точкой не может быть более 2 точек пересечения

т.к. I – центр вписанной окружности $\Rightarrow$ KI и LI – биссектрисы $\Rightarrow$ $\angle KLI = \angle MLI$ и $\angle MKI = \angle LKI$, т.к. QH делит дугу MPL на равные части и $\angle MKP = \angle LKP \Rightarrow$ QH и KP пересекаются в точке P на описанной окружности $\triangle MKL \Rightarrow MP = PL$, т.к. QH – серпер $\Rightarrow MQ = QL$ как связан

т.к. Q – равноудалена от M и $L \Rightarrow \triangle MQL$ – равнобедренный $\Rightarrow \angle QLM = \angle QML$

Построим MP, $\angle MPK = \angle MLK$, т.к. они опираются на одну дугу

Пусть $\angle QLM = \alpha \Rightarrow \angle QML = \alpha = 2\angle KLI$ и $\angle MPK = 2\alpha$, т.к. $\angle QML = \alpha = \angle QLM \Rightarrow$

~~т.к. $QH \perp ML$ – серпер $\Rightarrow$~~

$\Rightarrow \angle MQL = 180 - 2\alpha$, но тогда $\angle MQI + \angle MPI = 180 - 2\alpha + 2\alpha = 180 \Rightarrow$

$MQIP$ – вписанный четырёхугольник $\Rightarrow M, Q, I$ и P лежат на одной окружности $\Rightarrow Q$ лежит на окружности MPI, а это мы и хотели показать.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

M	A	0	0	0	1	9	2	4	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание № 5

$a^3 - b^3 = (abc-1)^2$

Заметим тот факт, что a и b взаимно простые числа.

Если это не так, то пусть есть $d \neq 1$ такое что $a \mid b$ и $b \mid d$,

тогда $a^3 - b^3 \underset{d}{\equiv} 0$, а $(abc-1)^2 \underset{d}{\equiv} (-1)^2 \equiv 1 \Rightarrow 0 \underset{d}{\equiv} 1$ и $d \neq 1 \Rightarrow$

это противоречие $\Rightarrow HOD(a,b) = 1$

$a^3 \underset{b}{\equiv} 1 \qquad (a-1)(a^2+a+1) \underset{b}{\equiv} 0$

$b^3 \underset{a}{\equiv} 1$

$a^3 - b^3 = a^2b^2c^2 - 2abc + 1$

$a^2b^2c^2 - 2abc + 1 + b^3 - a^3 = 0$

Рассмотрим это выражение как квадратное уравнение относительно c

$D = 4a^2b^2 - 4a^2b^2(1 + b^3 - a^3) = 4a^2b^2(1 - 1 - b^3 + a^3) = (a^3 - b^3)\,4a^2b^2 =$

$a > b$

$= 4a^2b^2(a^3 - b^3)$

$c_1 = \dfrac{2ab - \sqrt{D}}{2a^2b^2} = \dfrac{2ab - 2ab\sqrt{a^3-b^3}}{2a^2b^2} = \dfrac{2ab(1 - \sqrt{a^3-b^3})}{2a^2b^2} = \dfrac{1 - \sqrt{a^3-b^3}}{ab}$,

~~$a_2 = \sqrt{\dfrac{2ab + \sqrt{D}}{2a^2b^2}}$~~ т.к. $c \in N \Rightarrow \dfrac{1 - \sqrt{a^3-b^3}}{ab} \geq 1$, т.к. ~~дробное~~

числитель не больше 1 $\Rightarrow$ знаменатель не может быть больше 1 $\Rightarrow$

$ab = 1 \Rightarrow a = b = 1$, в других случаях

$c = \dfrac{2ab + \sqrt{D}}{2a^2b^2} = \dfrac{2ab + 2ab\sqrt{a^3-b^3}}{2a^2b^2} = \dfrac{2ab(1 + \sqrt{a^3-b^3})}{2a^2b^2} = \dfrac{1 + \sqrt{a^3-b^3}}{ab} \Rightarrow$

$c = \dfrac{1 + \sqrt{a^3 - b^3}}{ab}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	7	1	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	20	2	//	82

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$f(x_1)=f(x_2)=0$, т. е. $x_1^2-2x_1-1=0$ (аналогично для x_2).

$g(x_3)=g(x_4)=0$, т. е. $x_3^2-3x_3-1=0$ (аналогично для x_4).

$g(x_1)=x_1^2-3x_1-1=x_1^2-2x_1-1-x_1=f(x_1)-x_1=-x_1$,

(аналогично $g(x_2)=-x_2$)

$f(x_3)=x_3^2-2x_3-1=x_3^2-3x_3-1+x_3=g(x_3)+x_3=x_3$

(аналогично $f(x_4)=x_4$). Тогда искомое выражение равно:

$-x_1^3\cdot x_3-x_2^3\cdot x_4$. Найдём эти числа.

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}$; $g(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.

С учётом симметрии выражения имеем всего 2 варианта:

1) $x_1=1-\sqrt{2}$; $x_3=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$.

$x_1^3=1-3\sqrt{2}+6-2\sqrt{2}=7-5\sqrt{2}$; $x_2^3=7+5\sqrt{2}$,

$x_1^3\cdot x_3=(7-5\sqrt{2})\cdot\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)=\frac{21-7\sqrt{13}-15\sqrt{2}+5\sqrt{26}}{2}$,

$x_2^3\cdot x_4=\frac{21+7\sqrt{13}+15\sqrt{2}+5\sqrt{26}}{2}$; $x_1^3\cdot x_3+x_2^3\cdot x_4=21+5\sqrt{26}$,

т. е. выражение $-21-5\sqrt{26}$;

2) $x_1=1-\sqrt{2}$; $x_3=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

$x_1^3=7-5\sqrt{2}$; $x_2^3=7+5\sqrt{2}$,

$x_1^3\cdot x_3=(7-5\sqrt{2})\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)=\frac{21-15\sqrt{2}+7\sqrt{13}-5\sqrt{26}}{2}$;

$x_2^3\cdot x_4=\frac{21+15\sqrt{2}-7\sqrt{13}-5\sqrt{26}}{2}$; $x_1^3\cdot x_3+x_2^3\cdot x_4=21-5\sqrt{26}$,

т. е. выражение $5\sqrt{26}-21$.

Ответ: $-21-5\sqrt{26}$ или $5\sqrt{26}-21$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	7	1	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

Посчитаем количество наборов таких, что $a+b+c+d=1001$, $a=b$, $c>d$, $a,b,c,d \in \mathbb{N}$. Тогда $c+d=2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, т.е. $c+d \in \{3;5;\dots;999\}$;

Для каждой суммы $c+d$ числа a и b определяются однозначно $\left(a=b=\frac{1001-c-d}{2}\right)$.

Рассмотрим в общем случае, сколько вариантов имеет уравнение $c+d=n$, где n – нечётное. Т.е. имеем n точек и нужно поставить 1 перегородку, на которую есть $n-1$ место. Но т.к. $c>d$, то на самом деле $\frac{n-1}{2}$ вариантов, которые симметричны. Тогда с учетом $c+d \in \{3;5;\dots;999\}$ имеем вариантов:

$1+2+\dots+499=\frac{500\cdot 499}{2}=124750$. Это и есть окончательный ответ, т.к. 4 одинаковых числа быть не может (в сумме чётное число), а 3 одинаковых уже посчитаны.

Ответ: 124750.

№2

Первые несколько чисел: 4, 6, 9, 14, 20, … Заметим, что разница между ними постоянно увеличивается, потому что $x_n > 2x_{n-1} - x_{n-2} = x_{n-1} + (x_{n-1} - x_{n-2})$, т.о. она строго возрастает. У каждого нового числа разница увеличивается на 1, кроме случаев, когда число простое. Но на самом деле такое случится лишь раз при переходе из 9 не в 13, а в 14.

см. след. лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	7	1	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

Далее идут 2 чётных числа и 2 нечётных, при этом каждое пятое будет делиться на 3, на 5 числа делятся через раз, через два чередования и т.д.

Т.о. можно рассмотреть последовательность, где $a_1 = 14$, а $a_{n+1} = a_n + ((n+1)+4)$; (т.е. $a_2 = 20$, $a_3 = 27 \ldots$);

Такой последовательности удовлетворяет

$a_n = \frac{(n+10)\cdot(n-1)}{2} + 14$ (сумма чисел от 6 до $n+4$)

Докажем это: $\frac{(n+11)(n-1+1)}{2} + 14 = \frac{n^2+11n}{2} + 14 = a_{n+1}$;

$a_n + n + 5 = \frac{(n+10)(n-1)}{2} + 14 + \frac{2n+10}{2} = \frac{n^2+9n-10+2n+10}{2} + 14 = \frac{n^2+11n}{2} + 14$;

Тогда $x_{100} = a_{97}$, т.к. $x_4 = a_1$.

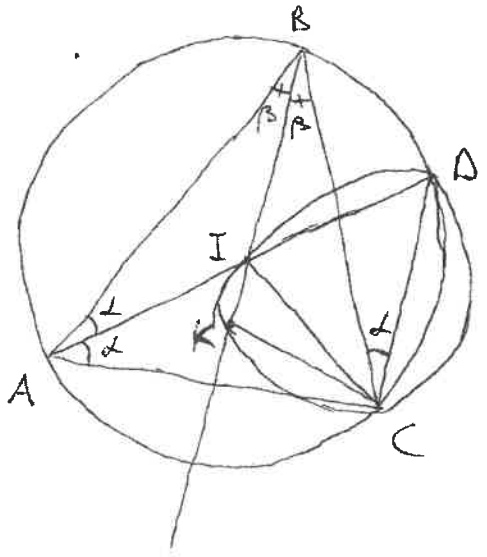
$a_{97} = 14 + \frac{107 \cdot 96}{2} = 14 + 107 \cdot 48 =$

$= 5136 + 14 = 5150$

$107 \times 48 = 856 + 4280 = 5136$

Ответ: 5150.

№4



Пусть $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$

$\angle BCD = \frac{1}{2}\cup BD = \angle BAD = \alpha$. Из $\triangle AIB$

$\angle AIB = \pi - \alpha - \beta$, смежный с ним

$\angle KID = \angle AIB = \pi - \alpha - \beta$ (вертикальные углы)

$\angle KID + \angle KCD = \pi$ (полная окружность)

$\angle KCD = \pi - \angle KID = \pi - \pi + \alpha + \beta =$

$= \alpha + \beta$.

см. след. лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	7	1	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

$\overset{\frown}{BCK} = \overset{\frown}{KCD} - \overset{\frown}{BCD} =$

$= \alpha + \beta - \alpha = \beta$

Т.к. о. в $\triangle BKC$: $\overset{\frown}{KBC} = \overset{\frown}{KCB} \Leftrightarrow \triangle BKC$ – равнобедренный, т. о. $|BK| = |KC|$.

№5

Заметим, что выражение симметрично, поэтому если $(a; b; c)$ – решение, то $(b; a; c)$ – тоже решение.

1). $a = b$: $2a^3 = (a^2c - 1)$, $\overset{a,c \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow}$ $a^2c - 1 = \sqrt{2a^3}$,

$c = \frac{1 + a\sqrt{2a}}{a^2}$, но чтобы такая дробь сокращалась числитель должен $\vdots a$, т. е. $1 + a\sqrt{2a} \vdots a$, т. е. $1 \vdots a$, т. е. $a = 1$, но тогда $c = 1 + \sqrt{2} \notin \mathbb{N}$.

2) далее можно считать, что $a > b$, не забывая о симметрии (см. начало),

~~Понятно, что числа a и b разной чётности, т.к. иначе $a \vdots 2$ и $b \vdots 2 \Rightarrow$ $\begin{cases} a^3 + b^3 \vdots 2 \text{ или } a \not\vdots 2 \text{ и } b \not\vdots 2 \Rightarrow \\ abc - 1 \not\vdots 2 \end{cases}$~~

$\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{Понятно, что числа } a \text{ и } b \text{ не могут быть одновременно чётными, т. к. иначе} \\ a \vdots 2 \text{ и } b \vdots 2 \Rightarrow \begin{cases} a^3 + b^3 \vdots 2, \\ abc - 1 \not\vdots 2. \end{cases} \end{cases}$

Но единственное возможное решение в таком случае: $a = 2$ и $b = 1$: $2^3 + 1^3 = 9 = (2c - 1)^2$,

$2c - 1 = 3$, $c = 2$.

Ответ: $\{(1; 2; 2); (2; 1; 2)\}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	1	6	9	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	20	2	111	82

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

$x_{n+1} = (n+1)^2 + 300 = n^2 + 2n + 301$

$x_n = n^2 + 300$

$НОД = (x_n; x_{n+1} - x_n) = (n^2+300; n^2+2n+301 - n^2 - 300) = (n^2+300; 2n+1)$

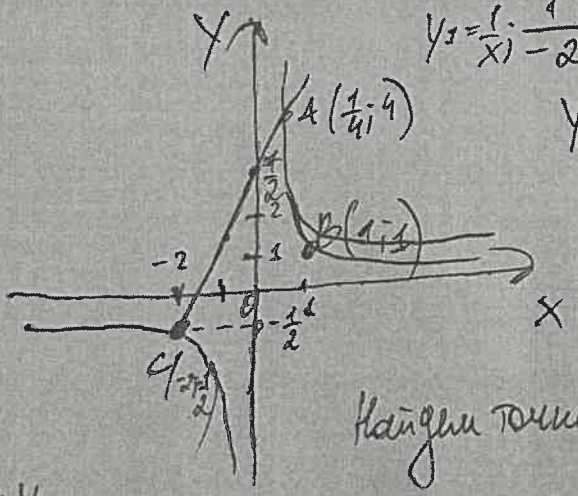
$(2n+1)$ - нечетное, а $x = n^2+300$ - четное, значит можно умножать на любую степень двойки и НОД не изменится.

$НОД(4n^2+1200; 2n+1) = (4n^2+4n+2+1200; 2n+1) =$

$= НОД((2n+1)^2 + 1201; 2n+1) = НОД(1201; 2n+1) \le 1201^{(2n+1)} =$

$\Rightarrow y_n = 1201$ при $n = 600$

№1



$y_1 = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{-2} = y_1 \Rightarrow y_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow C\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$

$y_2 = k_2 x + b_2;\ k_2 = 2 \Rightarrow b_2 = 2 \cdot 2 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

$y_2 = 2x + \frac{7}{2};\ y_2 = 2x + 3{,}5$

$y_3 = k_3 x + b_3$, где $k_3 = \frac{1}{2} \Rightarrow b_3 = 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$y_3 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Найдем точки пересечения гиперболы с прямыми:

y_1 и y_2:

$\frac{1}{x} = 2x + 3{,}5 \mid \cdot x$

$2x^2 + 3{,}5x - 1 = 0$

$D = 3{,}5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 = 20{,}25 = 4{,}5^2$

$x_{1/2} = \frac{-3{,}5 \pm 4{,}5}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}$ - т. A

$x_2 = -2$ - т. C

y_1 и y_3:

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{x} \mid \cdot 2x$

$x^2 + x = 2$

$x^2 + x - 2 = 0$

$D = 1 - 4 \cdot (-2) = 9 = 3^2$

$x_{1/2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 1$ - т. B

$x_2 = -2$ - т. C.

B(1; 1); C(-2; -1/2); A(1/4; 4)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ): М А 0 0 0 1 1 6 9 0 2 5

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

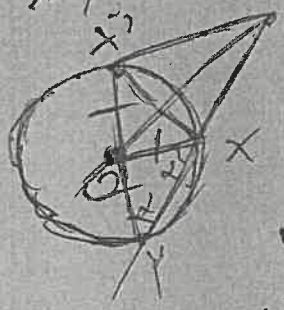
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа, в рамке справа

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{4}-x\right)^2+(4-y)^2=k^2 \\ (1-x)^2+(1-y)^2=k^2 \\ (-2-x)^2+\left(-\frac{1}{2}-y\right)^2=k^2 \end{cases}$$

R – это радиус описанной окружности около ABC с центр $x;y$

Из системы получим что $x=-\frac{11}{8}$, а $y=2$

Ответ: $R\left(-\frac{11}{8};2\right)$



т.к точки Y, X, X' – лежат на одной окр, то $X'O=OX=OY$ (как радиусы) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle X'XO$ – р/б $\Rightarrow \angle OX'X=\angle OXX'$

и также $\angle OYX=\angle YXO=\alpha$.

$\angle YOX=180-\angle OYX-\angle YXO=180-\alpha-\alpha=180-2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$\angle AOX$~~ $\angle X'OX=180-(180-2\alpha)=2\alpha$ (как смежные)

$\angle OXX'=OX'X=\frac{180-\angle X'OX}{2}=\frac{180-2\alpha}{2}=90-\alpha$.

$\angle X'XO+\angle OXY=90-\alpha+\alpha=90^\circ \Rightarrow \angle X'XY$ – опирается на YX' (т.е диаметр $X'Y$), где центр диаметра т.O $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ т. пересечения AO и $X'Y$ не зависит от выбора секущей и точка пересечения AO и $X'Y$ – это т. O

Ответ: доказано.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ): ИА000116902 5

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 3

Чтобы раздать бельчатам орехи различным 2 перегородки.

Всего мест - 1002 и порядок не имеет значения.

Значит способов без ограничений: $\frac{1000 \cdot 999}{2} = 500 \cdot 999 = 499500$.

Но нам не подойдет случай, когда у двух бельчат (у 3-х иначе не хватит, т.к. 1001 не кратно 3) одинаковое количество орехов.

Р/м случай, когда: 2-м достанется четное кол-во орехов, а 3-ему остальные: $\frac{1001-1}{2} = 500$

Остаюсь способов: $499500 - 500 = 499000$

Но! Не стоит забывать о том, что 3-м бельчатам нужно разное кол-во орехов, причем Боре больше всего.

Пусть подсчитаем за a, b и c, где c это Боря:

$a + b + c = 1001$, $a \neq b$; $b \neq c$; $a \neq c$

Только вариантов из $3! = 6$, где у Бори будет больше всех орехов всего 2, значит:

$\frac{2}{6} \cdot 499000 = \frac{1}{3} \cdot 499000 = 166000$ вариантов.

Ответ: 166000

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

M	A	0	0	0	1	1	6	9	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\frac{3^m+2}{3^n+2} \in \mathbb{Z}$ $\forall n$ $m > n$. Д-ть, что $m > n^2$

$(k+1)^2 = k^2 + \frac{(k+1)^2}{k^2} \Rightarrow k^2 + \frac{(k+\frac{1}{2}k)^2}{k^2} = k^2 + 2{,}25 > 3k^2$

$3^{k+2} > 3^{k^2} > (k+1)^2$

$\Downarrow$

Неравенство выполнено

$3 = \frac{3^m+2}{3^n+2} \in \mathbb{Z}$

$(3^m+2) : (3^n+2)$

$3^m \overset{3^n+2}{\equiv} 2$

При $n=m$ сравнение выполнено $(3^m; 3^n+2) = 1$

Т.к 3^n - степень, а $(3^n+2) \not\vdots 3$, то $3^m \overset{3^n+2}{\equiv} 2$ имеет разные остатки

При $m = 2, 5, \dots, (3^n+1)$ остатки повторяются с периодом (3^m+2)

При $m = n + 3^n + 2$

$n + 3^n + 2 > n^2$, т.к $3^n > n^2$

...

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	0	9	7	7	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	20	2	///	82

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1. Найдем корни этих квадратных трёхчленов:

$f(x) = x^2 - 2x - 1$

$D = 4 + 4 = 8 \qquad x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$g(x) = x^2 - 3x - 1$

$D = 9 + 4 = 13 \qquad x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

Теперь рассмотрим выражение $(g(x_1))^3 \cdot f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4)$

Всего есть 4 варианта наборов значений x_1, x_2, x_3, x_4.

Но в силу зеркальности слагаемых выражения, различные значения нам дадут лишь 2 набора:

I $\begin{cases} x_1 = 1 + \sqrt{2} \\ x_2 = 1 - \sqrt{2} \\ x_3 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \\ x_4 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \end{cases}$ II $\begin{cases} x_1 = 1 - \sqrt{2} \\ x_2 = 1 + \sqrt{2} \\ x_3 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \\ x_4 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \end{cases}$

Найдём значение выражения в I случае:

$g(x_1) = (1+\sqrt{2})^2 - 3(1+\sqrt{2}) - 1 = 3 + 2\sqrt{2} - 3 - 3\sqrt{2} - 1 = -(\sqrt{2} + 1)$

$(g(x_1))^3 = -(\sqrt{2}+1)^3 = -(\sqrt{2})^3 - 3 \cdot (\sqrt{2})^2 - 3 \cdot \sqrt{2} - 1 = -2\sqrt{2} - 6 - 3\sqrt{2} - 1 = -5\sqrt{2} - 7$

$f(x_3) = \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) - 1 = \frac{22 + 6\sqrt{13}}{4} - 3 - \sqrt{13} - 1 =$

$= \frac{22 + 6\sqrt{13} - 16 - 4\sqrt{13}}{4} = \frac{6 + 2\sqrt{13}}{4}$

$(g(x_1))^3 \cdot f(x_3) = -(5\sqrt{2} + 7)\left(\frac{6 + 2\sqrt{13}}{4}\right) = -\left(\frac{30\sqrt{2} + 10\sqrt{26} + 42 + 14\sqrt{13}}{4}\right)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	0	9	7	7	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$g(x_2) = (1-\sqrt{2})^2 - 3(1-\sqrt{2}) - 1 = 3 - 2\sqrt{2} - 3 + 3\sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} - 1$

$(g(x_2))^3 = (\sqrt{2}-1)^3 = 2\sqrt{2} - 3\cdot 2 + 3\sqrt{2} - 1 = 5\sqrt{2} - 7$

$f(x_4) = \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) - 1 = \frac{22-6\sqrt{13}}{4} - 3 + \sqrt{13} - 1 = \frac{6-2\sqrt{13}}{4}$

$(g(x_2))^3 \cdot f(x_4) = (5\sqrt{2}-7)\left(\frac{6-2\sqrt{13}}{4}\right) = \frac{30\sqrt{2} - 10\sqrt{26} - 42 + 14\sqrt{13}}{4}$

$(g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4) = \frac{-30\sqrt{2} - 10\sqrt{26} - 42 - 14\sqrt{13} + 30\sqrt{2} - 10\sqrt{26} - 42 + 14\sqrt{13}}{4} =$

$= \frac{-20\sqrt{26} - 84}{4} = \underline{-5\sqrt{26} - 21}$

Во втором случае: $g(x_1) = \sqrt{2} - 1$ (из I случая)

$(g(x_1))^3 = 5\sqrt{2} - 7$ (Из I случая)

$f(x_3) = \frac{6+2\sqrt{13}}{4}$ (из I случая)

$f(x_3) \cdot (g(x_1))^3 = \left(\frac{6+2\sqrt{13}}{4}\right)(5\sqrt{2}-7) = \frac{30\sqrt{2} + 10\sqrt{26} - 42 - 14\sqrt{13}}{4}$

$g(x_2) = -(\sqrt{2}+1)$ (из I случая)

$(g(x_2))^3 = -5\sqrt{2} - 7$ (из I случая)

$f(x_4) = \frac{6-2\sqrt{13}}{4}$ (из I случая)

$f(x_4) \cdot (g(x_2))^3 = \left(\frac{6-2\sqrt{13}}{4}\right)(-5\sqrt{2}-7) = \frac{-30\sqrt{2} + 10\sqrt{26} - 42 + 14\sqrt{13}}{4}$

$(g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 \cdot f(x_4) = \frac{30\sqrt{2} + 10\sqrt{26} - 42 - 14\sqrt{13} - 30\sqrt{2} + 10\sqrt{26} - 42 + 14\sqrt{13}}{4} =$

$= \frac{20\sqrt{26} - 84}{4} = \underline{5\sqrt{26} - 21}$

Ответ: $5\sqrt{26} - 21$ и $-5\sqrt{26} - 21$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	0	9	7	7	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2. Найдём следующие числа ряда:

$X_1 = 4 \quad X_2 = 6$

$X_3 > 2X_2 - X_1 = 12 - 4 = 8 \Rightarrow X_3 = 9$

$X_4 > 2X_3 - X_2 = 18 - 6 = 12 \Rightarrow X_4 = 14$ (т.к. число 13 - простое)

$X_5 > 2X_4 - X_3 = 28 - 9 = 19 \Rightarrow X_5 = 20$

$X_6 > 2X_5 - X_4 = 40 - 14 = 26 \Rightarrow X_6 = 27$

Заметим теперь, что если следующее натуральное число после $2X_{n-1} - X_{n-2}$ - составное, то число X_n увеличивается по сравнению с предыдущим на число равное разности предыдущего с предыдущим плюс 1:

$X_n = 2X_{n-1} - X_{n-2} + 1 = X_{n-1} + (X_{n-1} - X_{n-2} + 1)$

Теперь заметим, что число $X_4 = 14$, т.е. сумме всех натуральных чисел от 1 до 5 минус 1

Но его разница с предыдущим числом равна 5

Значит, учитывая замечание о том, как увеличиваются числа в последовательности, следующее число будет равно сумме натуральных чисел от 1 до 6 минус 1

Теперь осталось доказать, что предположение будет верно, и если мы будем так строить последовательность в ней не появится простых чисел.

Итак, мы можем представить каждый X_i для $i \geq 3$, как

$$\frac{(i+1)(i+2)}{2} - 1 = \frac{i^2+3i+2}{2} - 1 = \frac{i^2+3i}{2} = \frac{i(i+3)}{2}$$

Т.к. мы указали, что $i \geq 3$, то это число всегда составное, следовательно таким образом мы сможем представить каждый член искомой последовательности. И эта последовательность будет соответствовать условию.

$X_{100} = \frac{100 \cdot 103}{2} = 50 \cdot 103 = 5150$ Ответ: $X_{100} = 5150$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	0	9	7	7	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3. Пусть у нас в наборе есть два равных числа X

Тогда представим набор в виде (X; X; y; z).

Его сумма: $2X+y+z=1001$

Заметим, что при фиксированном значении $y+z$, значение X определяется однозначно

Также заметим, что так как мы имеем дело только с $X, y, z \in \mathbb{N}$, то если существует $x \in \mathbb{N}$, то $x+y \vdots 2$

Т.к. $X>0$; $y>0$; $z>0$, то, учитывая $y+z \vdots 2$, $y+z$ может быть равно 3; 5; 7; 9; ....; 999.

Кол-во вариантов решения каждого из этих уравнений в натуральных числа равно соответственно 2; 4; 6; 8; ....; 998.

Тогда общее количество вариантов равно $\frac{2+998}{2} \cdot 499 = 500 \cdot 499$

Но, так как нам не важен порядок чисел в наборе, то в этом количестве каждый вариант учтён 2 раза

Тогда искомое количество наборов равно $250 \cdot 499 = 124\,750$

(Заметим, что это число наборов включает и наборы с 3^мя равными числами, а наборы с четырьмя или с двумя парами равных чисел невозможны)

Ответ: $250 \cdot 499 = 124\,750$ наборов

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	0	9	7	7	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4. По лемме о трезубце:

$BD = DC = CI$

$\angle DBC = \angle DCB$ (т.к. $BD = DC$)

$\angle BID = \frac{\angle A + \angle B}{2}$ (как внешний угол $\triangle ABI$)

$\angle CID = \frac{\angle A + \angle C}{2}$ (как внешний угол $\triangle ACI$)

$\angle CIK = 180^\circ - \frac{\angle A + \angle B}{2} - \frac{\angle A + \angle C}{2} =$

$= 90^\circ - \frac{\angle A}{2} = \frac{\angle B + \angle C}{2}$

$\angle IKC = \angle ICD + \angle CID = 2\alpha$

Но $\alpha = \frac{\angle A + \angle C}{2}$ (Углы ICD и CID равны т.к. опираются на равные дуги)

$\angle BCK = 180^\circ - \angle IKC - \angle CIK =$

$= 180^\circ - \angle A - \angle C - \frac{\angle B + \angle C}{2} = \frac{\angle B - \angle C}{2}$

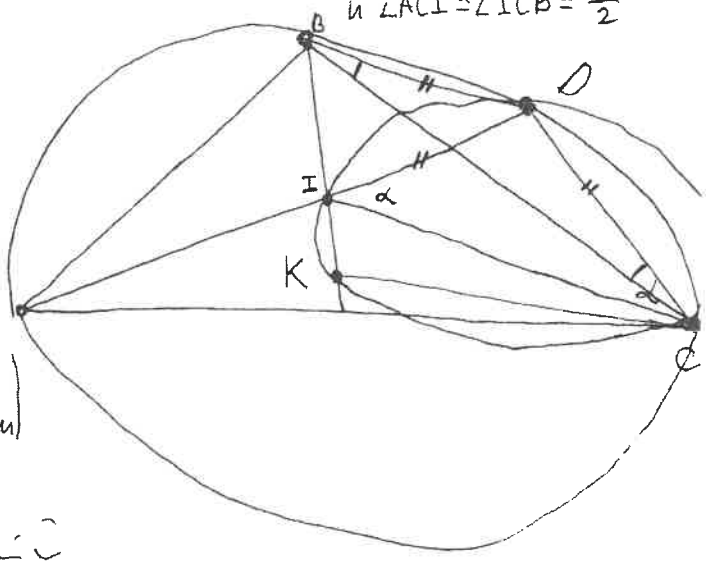
Тогда $\angle BCK = \angle BCI + \angle ICK = \frac{\angle C}{2} + \frac{\angle B - \angle C}{2} = \frac{\angle B}{2}$

Т.е. $\angle BCK = \angle KBC \Rightarrow BK = CK$

$\angle BAI = \angle IAC = \frac{\angle A}{2}$ (т.к. I – т. опис. окр. $\Rightarrow$ AI – бис. $\angle A$)

Аналогично: $\angle ABI = \angle CBI = \frac{\angle B}{2}$

и $\angle ACI = \angle ICB = \frac{\angle C}{2}$



№5. $a^3 + b^3 = (abc - 1)^2$

Тройки (1; 2; 2) и (2; 1; 2) являются решениями

Заметим, что так как $a; b; c \in \mathbb{N}$, то числа $(abc-1)^2$ являются квадратом натурального числа

Т.е. сумма двух кубов натуральных чисел, должна равняться полному квадрату.

Но при числах ≥ 3 сумма кубов не может являться полным квадратом

Значит, эти решения единственные. Ответ: (1; 2; 2); (2; 1; 2)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	5	8	7	4	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	20	2	111	82

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 1)

$f(x) = x^2 - 4x - 1$ – парабола с ветвями вверх

Найдем его корни: $f(x) = x^2 - 4x - 1 = 0$.

$D = 16 - 4 \cdot (-1) = 20 = 4 \cdot 5$.

$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$.

$g(x) = x^2 - 5x - 1$ – парабола с ветвями вверх

Найдем его корни: $g(x) = x^2 - 5x - 1 = 0$.

$D = 25 - 4 \cdot (-1) = 25 + 4 = 29$

$x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}$.

$g(x_1) = x_1^2 - 5x_1 - 1$.

Т.к мы знаем, что $f(x_1) = x_1^2 - 4x_1 - 1 = 0$, то

$g(x_1) = 0 - x_1 = -x_1$.

Так же и с $g(x_2) = -x_2$.

$f(x_3) = x_3^2 - 4x_3 - 1$.

Т.к. $g(x_3) = x_3^2 - 5x_3 - 1 = 0 \Rightarrow f(x_3) = 0 + x_3 = x_3$

так же $f(x_4) = x_4$.

Найдем значение $(g(x_1))^3 = (-x_1)^3 = -(x_1)^3$.

1) $-(2+\sqrt{5})^3 = -(4 + 4\sqrt{5} + 5)(2 + \sqrt{5}) =$

$= -(8 + 8\sqrt{5} + 10 + 4\sqrt{5} + 20 + 5\sqrt{5}) = -38 - 17\sqrt{5}$

2) $(-(2-\sqrt{5}))^3 = (\sqrt{5} - 2)^3 = (5 - 4\sqrt{5} + 4)(\sqrt{5} - 2) =$

$= 5\sqrt{5} - 20 + 4\sqrt{5} - 10 + 8\sqrt{5} - 8 = 17\sqrt{5} - 38$.

При $x_1 = 2 + \sqrt{5}$, $x_2 = 2 - \sqrt{5}$, $x_3 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$, $x_4 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2}$ и

$x_1 = 2 - \sqrt{5}$, $x_2 = 2 + \sqrt{5}$, $x_3 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2}$, $x_4 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$ значение выр-я одинаковое:

$\Rightarrow$ ①. $(g(x_1))^3 \cdot f(x_3) + (g(x_2))^3 \cdot f(x_4) =$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	5	8	7	4	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

① $(g(x_1))^3 \cdot f(x_3) + (g(x_2))^3 \cdot f(x_4) =$

$= (-38 - 17\sqrt{5}) \cdot \left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right) + (17\sqrt{5} - 38) \cdot \left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right) =$

$= \frac{-190 - 38\sqrt{29} - 85\sqrt{5} - 17\sqrt{5 \cdot 29} + 85\sqrt{5} - 17\sqrt{5 \cdot 29} - 190 + 38\sqrt{29}}{2} =$

$= \frac{2(-190 - 17\sqrt{145})}{2} = -190 - 17\sqrt{145}.$

② При $x_1 = 2+\sqrt{5}$, $x_2 = 2-\sqrt{5}$, $x_3 = \frac{5-\sqrt{29}}{2}$, $x_4 = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$ и

$x_1 = 2-\sqrt{5}$, $x_2 = 2+\sqrt{5}$, $x_3 = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$, $x_4 = \frac{5-\sqrt{29}}{2}$ дают одинаково.

$\Rightarrow (g(x_1))^3 \cdot f(x_3) + (g(x_2))^3 \cdot f(x_4) =$

$= (-38 - 17\sqrt{5}) \cdot \left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right) + (17\sqrt{5} - 38) \cdot \left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right) =$

$= \frac{-190 + 38\sqrt{29} - 85\sqrt{5} + 17\sqrt{145} + 85\sqrt{5} + 17\sqrt{145} - 190 - 38\sqrt{29}}{2} =$

$= \frac{2 \cdot (-190 + 17\sqrt{145})}{2} = 17\sqrt{145} - 190.$

Ответ: $-190 - 17\sqrt{145}$; $17\sqrt{145} - 190$.

Задача №2) $x_1 = 5$, $x_2 = 7$. $x_{98} - ?$

$x_n > 2x_{n-1} - x_{n-2} = x_{n-1} + (x_{n-1} - x_{n-2})$

$\Rightarrow x_n$ больше предыдущего числа, как минимум на разность предыдущего и предпредыдущего плюс 1.

$x_n - x_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-2} + 1$ (как минимум).

Рассм. следующие после за числа:

$x_3 > 7 + (7-5) = 9 \Rightarrow x_3 = 10$ (сост $5 \cdot 2$). $x_3 - x_2 = 10 - 7 = 3$.

$x_4 > 10 + (10-7) = 13 \Rightarrow x_4 = 14 = 7 \cdot 2$ (сост) $x_4 - x_3 = 4$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	5	8	7	4	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$x_5 > 14 + (14-10) = 18$

Т.к. 19 – простое число $x_5 = 20 = 2 \cdot 10$.

$x_5 - x_4 = 20 - 14 = 6$.

$\Rightarrow$ x_5 можно представить в виде

$5+2+3+4+6 = 2+3+4+5+6 = 20$ – это сумма натур. чисел от 2 до 6. (x_5). Разность между x_5 и $x_4 = 6$. След. число $x_6 = x_5 + 7$ (если оно составное)

Разность между двумя записанными подряд числами на доске увеличивается на 1.

Докажем, что все такие числа будут составными.

Т.е. $x_n = 2+3+\ldots+n+(n+1) = \frac{(n+3)\cdot n}{2}$.

1) при n – четном и $n > 2$.

$x_n = \frac{(n+3)\cdot n}{2} = (n+3)\cdot \frac{n}{2}$, где $\frac{n}{2}$ – целое число, большее 1; $n+3$ также больше 1.

$\Rightarrow$ x_n – составное число и делится на $(n+3)$ и $\frac{n}{2}$.

2) при n – нечетном и $n > 2$.

$x_n = \frac{(n+3)\cdot n}{2} = \frac{n+3}{2} \cdot n$

Т.к n – нечетное $\Rightarrow$ $n+3$ – четное (кратно 2) $\Rightarrow$ $\frac{n+3}{2}$ – целое число большее 1, также n больше 1.

$\Rightarrow$ x_n – составное число и делится на $\frac{n+3}{2}$ и n.

Мы доказали, что все такие числа составные.

Тогда $x_{98} = \frac{98 \cdot 101}{2} = 101 \cdot 49 = 4949$

Ответ: $x_{98} = 4949$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	5	8	9	4	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №3)

a, b, c, d – натуральные числа (по условию).

$a+b+c+d=1005$.

1005 не кратно 4 $\Rightarrow$ поэтому a, b, c, d не могут все быть равны друг другу.

Также если $a=b$, то $c \neq d$, т.к $1005-2a$ = нечетное число, и поэтому не кратно двум ($1005-2a \neq 2c$).

Рем все наборы. Не умаляя общности будем считать, что $a=b$. (в которых среди чисел есть равные).

При $a=b=1$. $c+d=1005-2=1003$.

Всего разл. наборов

c	d
1	1002
2	1001
3	1000
⋮	
501	502

} 501

Также заметим, что мы рассматриваем и те случаи, в которых три числа равны (условно $a=b=c$)

~~В этом случае может принимать значение от 1 до 501.~~ Всего различных наборов $\frac{c+d-1}{2}$.

Пусть $a \neq b = n$. $\Rightarrow c+d=1005-2n$.

Всего наборов $\frac{1005-2n-1}{2} = 502-n$.

При $a=b=n+1 \Rightarrow c+d=1005-2(n+1)$

Всего наборов $\frac{1005-(2n+2)-1}{2} = \frac{1002-2n}{2} = 501-n$.

– Кол-во наборов меньше предыдущего кол-ва на 1.

~~Последний~~ При $a=b=501$, $c+d=1005-1002=3$.

$\frac{c}{1}\ \frac{d}{2}$ – всего 1 набор

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	5	8	7	4	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

При $a=b=502$,

$c+d=1005-1004=1$.

Т.к. c и d – натур. числа это невозможно.

⇒ Всего кол-во наборов из 4 натур. чисел с суммой 1005 среди которых есть равные

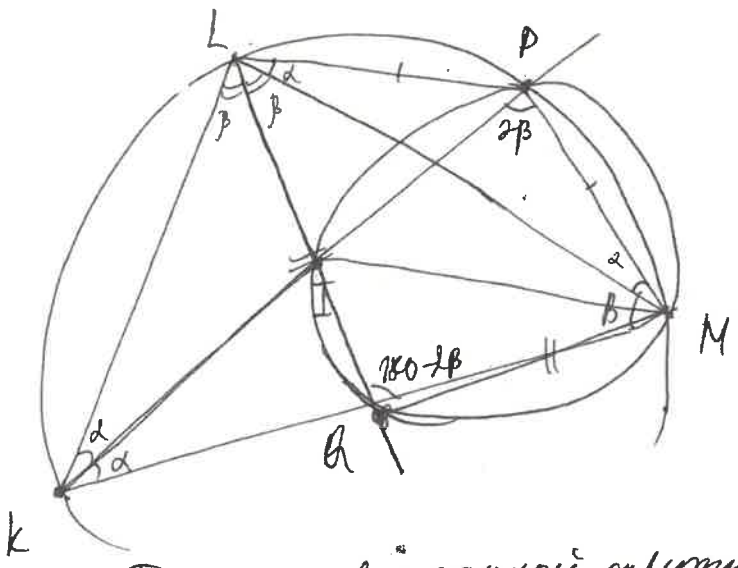
$$N=501+500+499+498+\ldots+1=$$

$$=\frac{501\cdot 502}{2}=501\cdot 251=125751.$$

$$\begin{array}{r} \times 501 \\ 251 \\ \hline 501 \\ 2505 \\ 1002 \\ \hline 125751 \end{array}$$

Ответ: 125751.

Задача N4)



(!) $LQ=MQ$.

I – центр вписанной окружности $\triangle KLM$

⇒ I – точка пересечения биссектрисс $\triangle$-ка

⇒ $\angle LKI=\angle IKM=\alpha$ и $\angle KLI=\angle MLI=\beta$.

Луч KI пересекает описанную окружность $\triangle KLM$ в (·) P

⇒ ~~K, L, P, M~~ (·) K, L, P, M лежат на одной окружности

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

M	A	0	0	0	1	5	8	7	4	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

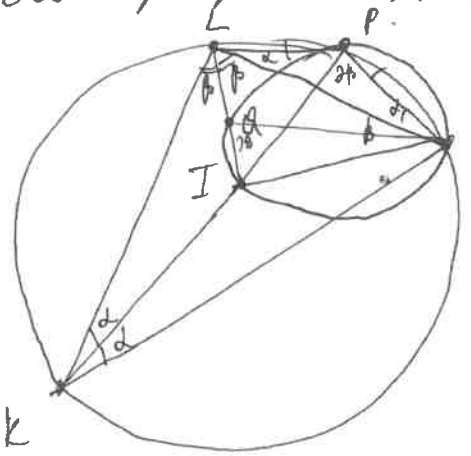
Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$\angle LKP = \angle LMP$ (т.к. они опираются на одну дугу $\overset{\frown}{LP}$)
$\angle MKP = \angle MLP$ (т.к. они опираются на одну дугу $\overset{\frown}{PM}$).
$\Rightarrow \angle PLM = \angle PML = \alpha \Rightarrow \Delta PLM$ – р/б. ($PL = PM$).
Также $\angle KLM = \angle KPM = 2\beta$. (т.к. они опираются на одну дугу $\overset{\frown}{KM}$)

Окружность, проходящая через (.) P, I и M вторично пересекает луч в (.) Q. $\Rightarrow$ (.) P, I, M, Q лежат на одной окружности.

$\Rightarrow \angle IPM + \angle IQM = 180°$ (противоположные углы вписанного четырехугольника IQMP)
$\angle IQM = 180° - 2\beta$.
Точки L, I, Q лежат на одном луче $\Rightarrow \angle MLQ = \beta$.
$\angle LMQ = 180° - \angle QLM - \angle LQM = 180° - 180° + 2\beta - \beta = \beta$.
$\Rightarrow \angle QLM = \angle QML \Rightarrow \Delta QLM$ – р/б $\Rightarrow LQ = MQ$
ч.т.д.

Если рисунок будет такой:



То по вышеописанным рассуждениям $\angle KPM = 2\beta$.
$\angle IQM = \angle IPM = 2\beta$ (т.к. они опираются на одну дугу $\overset{\frown}{IM}$)
$\angle IQM = 2\beta = \angle ILM + \angle LMQ$ (внешний угол)
$\Rightarrow \angle LMQ = 2\beta - \beta = \beta$.
$\Rightarrow \angle LMQ = \angle QLM = \beta \Rightarrow \Delta LQM$ – р/б
$\Rightarrow LQ = MQ$ ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	5	8	7	4	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Точка I не может быть точкой Q.

Т.к. в этом случае при $LQ = QM$ ($LI = IM$) $\Rightarrow \angle ILM = \angle IML = \beta$.

Т.к. MI – биссектриса $\angle LMK$.

$\Rightarrow \angle LMI = \angle KMI = \beta$.

$\Rightarrow \angle LMK = 2\beta$, также $\angle KLM = 2\beta \Rightarrow \Delta KLM$ – МБ, что противоречит условию.

Задача №5)

a, b, c – натуральные числа.

$a^3 - b^3 = (abc-1)^2$. (!) $a = b = c = 1$.

При $a < b$:

$a^3 - b^3 < 0$, т.к. a, b – натур.

$\Rightarrow (abc-1)^2 < 0$ – что невозможно.

При $a = b$:

$a^3 - b^3 = 0 \Rightarrow (abc-1)^2 = 0$.

$abc - 1 = 0$

$a^2c - 1 = 0$.

a, b, c – натур. числа, следовательно $a^2c = 1$ только в том случае, когда $a = b = c = 1$.

При $a > b$:

$a^3 - b^3 > 0$.

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) = (abc-1)^2$. Заметим, что $(abc-1)^2$ не кратно abc

$\Rightarrow a^3 - b^3$ не кратно abc

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	5	8	7	4	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$a^3-b^3=(abc)^2-2abc+1$.

$a^3-b^3-1=abc(abc-2)$.

$\Rightarrow a^3-b^3-1 \vdots abc$

$a^3-b^3-1\equiv 0 \pmod{abc}$

$a^3-b^3\equiv 1 \pmod{abc}$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)\equiv 1 \pmod{abc}$

если $\Rightarrow$ $a-b\equiv 1 \pmod{abc}$

$(a^2+ab+b^2)\equiv 1 \pmod{abc}$ $\quad 1\cdot 1=1$.

$a-b<abc$

Т.к. $a-b>abc$ $\quad a>abc+b$ (невозможно).

$\Rightarrow a-b=1$. $\Rightarrow a=b+1$.

a и b – разные по четности.

$a^3-b^3=(4-н)(н-4)=$ н – нечетное число.

$(abc)^2-2(abc)+1=(abc-1)^2$

четное, т.к. среди a и b – есть четное

$a^2+ab+b^2\equiv 1 \pmod{abc}$

$(a-b)^2+3ab\equiv 1 \pmod{abc}$.

$3ab+1\equiv 1 \pmod{abc}$

$3ab\equiv 0 \pmod{abc} \Rightarrow c=3$.

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=(abc-1)^2$.

$a^2+ab+b^2=(3ab-1)^2=(3b^2+(3b-1))^2$

$b^2+2b+1+b^2+b+b^2=9b^4+6b^2\cdot 3b-6b^2+9b^2-6b+1=$

$\Rightarrow 3b=9b^4+18b^3-6b$.

$3b^3+6b^2-2=1 \Rightarrow 3b^3+6b^2-3=0$.

$b^3+2b^2-1=0$.

$b^2(b+2)=1$. – невозможно, т.к. b – натур. число.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	6	2	8	2	5

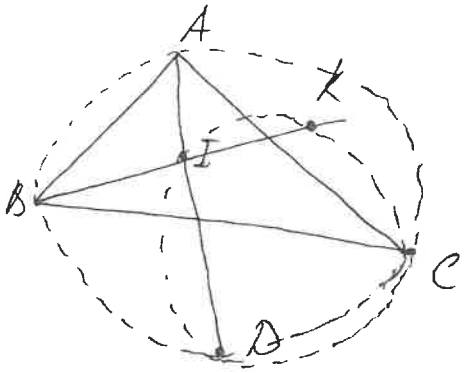
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	~~20~~	2	111	82

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

~4.



Решение:

$\angle AKC = 2\beta$; $\angle KCA = 2\gamma$;

$\angle KAC = 2\alpha$

$\angle BKC = 180° - \angle ADC$

(т.к. вписаны и с разных сторон от IC)

$\angle ADC = \angle AKC = 2\beta$ (с одной стороны от AC)

$\triangle BKC$: $\angle B = \beta$ (т.к. BI - бисс. $\angle ABC$);

$\angle K = 180° - 2\beta \Rightarrow \angle C = 180° - \angle B - \angle K = \beta \Rightarrow$

$\angle B = \angle C = \beta \Rightarrow BK = CK$ ч.т.д.

~1.

$f(x) = x^2 - 2x - 1 = g(x) + x$; $g(x) = x^2 - 3x - 1 = f(x) - x$

$(g(x_1))^3 = ((f(x_1) - x_1)^3 = -x_1^3$ т.к. x_1 и x_2 - корни $f(x)$

$(g(x_2))^3 = -x_2^3$

$f(x_3) = g(x_3) + x_3 = x_3$ т.к. x_3 и x_4 - корни $g(x)$

$f(x_4) = x_4$

$x^2 - 2x - 1 = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{array}\right.$

$x^2 - 3x - 1 = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$

1) $x_1 = 1 + \sqrt{2}$; $x_3 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	1	6	2	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$(f(x_1))^3 \cdot f(x_3) + (f(x_2))^3 \cdot f(x_4) = S$

$S = -(1+\sqrt{2})^3 \cdot \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) + (\sqrt{2}-1)^3 \cdot \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) =$

$= -(1+3\sqrt{2}+6+2\sqrt{2})\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) + (2\sqrt{2}-6+3\sqrt{2}-1)\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) =$

$= -(7+5\sqrt{2})\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) + (5\sqrt{2}-7)\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) =$

$= -\left(\frac{21+7\sqrt{13}+15\sqrt{2}+5\sqrt{26}}{2}\right) + \left(\frac{15\sqrt{2}-5\sqrt{26}-21+7\sqrt{13}}{2}\right) =$

$= \frac{1}{2}(-42-10\sqrt{26}) = -21-5\sqrt{26}$

2) $x_1 = 1+\sqrt{2} \quad x_3 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$

$S = -(7+5\sqrt{2})\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) + (5\sqrt{2}-7)\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) =$

$= -\frac{1}{2}(21-7\sqrt{13}+15\sqrt{2}-5\sqrt{26}) + \frac{1}{2}(15\sqrt{2}+5\sqrt{26}-21-7\sqrt{13}) =$

$= \frac{1}{2}(-42+10\sqrt{26}) = 5\sqrt{26}-21$

3) Если $x_1 = 1-\sqrt{2}$; $x_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$, получаем ситуацию 2)

4) Если $x_1 = 1-\sqrt{2}$; $x_3 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$, получаем ситуацию 1).

Ответ. $-21-5\sqrt{26}$; $5\sqrt{26}-21$

№3.

Зафиксируем первыми двумя числами – пару одинаковых

$\underline{n}\ \underline{n}\ __\ __$; $n \in [1; 499]$

Способов выбрать оставшиеся 2: $\frac{1001-2n+1}{2} = 500-n$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	6	2	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Способов выбрать 4 с парой равных:

$1+2+\ldots+499 = \frac{499+1}{2}\cdot 499 = 250\cdot 499 = 250\cdot 500 - 250 =$

$= 125000 - 250 = 124750$

Комментарий: 1) $n \le 499$ т.к., если $n \ge 500$, то $2n \ge 1000$, значит на оставшиеся 2 числа цифрами ≤ 1, но сумма 2 натуральных ≥ 2.

2) Не посчитано ничего дважды т.к. не может в четверке двух непересекающихся пар, потому что $2a + 2b$ – чет, а 1001 – не чет.

Ответ. 124750

2.

Выпишем первые несколько чисел

$4_1;\ 6_2;\ 9_3;\ 14_4;\ 20_5;\ 27_6;\ 35_7$

$X_5 = \frac{5(5+3)}{2}$; $X_6 = \frac{6(6+3)}{2}$ $X_7 = \frac{7(7+3)}{2}$

Докажем что $X_n = \frac{n(n+3)}{2}$, при $n \ge 5$

очев., что $\frac{n(n+3)}{2}$ – составное

Значит осталось док-ть:

$$\frac{n^2+3n}{2} = 2X_{n-1} - X_{n-2} + 1 = 2\left(\frac{(n-1)^2+3(n-1)}{2}\right) - \frac{(n-2)^2+3(n-2)}{2} + 1$$

$$n^2+3n = 2n^2 - 4n + 2 + 6n - 6 - n^2 + 4n - 4 - 3n + 6 + 2$$

$$n^2+3n = n^2+3n$$

$0 = 0$ – верно

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	1	6	2	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$X_{100} = \frac{100(100+3)}{2} =$

$= 50 \cdot 103 = 5150$

Ответ. 5150

5. При $a=2$ $b=1$ $c=2$ и $a=1$ $b=2$ $c=2$ равенства

Если найти a, b : $a^3 + b^3 = n^3$, при некоторых $n \in N$, то можно найти c по формуле:

$c = \frac{n+1}{ab}$, если $n+1 : ab$

$a^3+b^3+1 : a^2b^2 \Rightarrow \begin{cases} b^3+1 : a^2 \\ a^3+1 : b^2 \end{cases}$

Сложность в том, что эти условия выполняются крайне редко (в конечном числе случаев)

Ответ. (2; 1; 2) и (1; 2; 2)

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	7	7	2	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	20	2	111	82

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

1) Найдём координаты точки C

$y = \frac{1}{x}$ при $x = -2$: $y = -\frac{1}{2}$ тогда $C(-2; -\frac{1}{2})$

2) уравнения прямых через т.C

$y = 2x + b$ найдем b $-\frac{1}{2} = 2 \cdot (-2) + b \Rightarrow b = \frac{7}{2}$

$y = 2x + \frac{7}{2}$

$y = \frac{1}{2}x + b$ найдем b $-\frac{1}{2} = -1 + b$ $b = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

3) Найдем координаты точек A и B

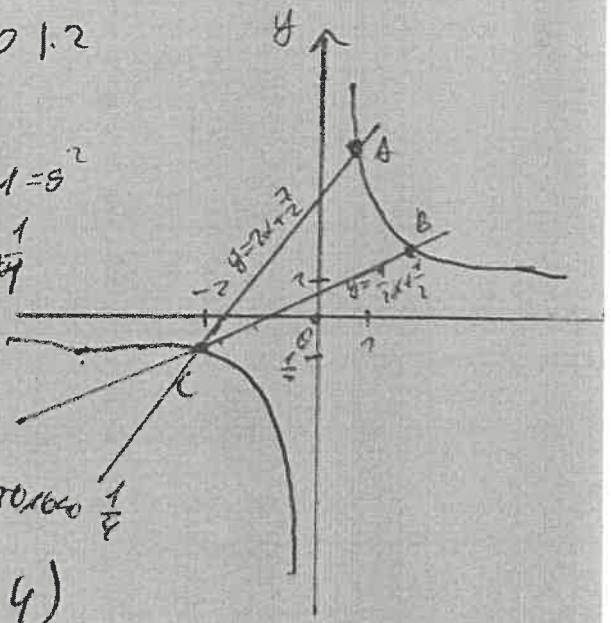
A: $\begin{cases} y = 2x + \frac{7}{2} \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$ $2x + \frac{7}{2} = \frac{1}{x}$ $| \cdot x \neq 0$ (т.к. $y = \frac{1}{x}$ не пер. через 0)

$2x^2 + \frac{7}{2}x - 1 = 0 \quad | \cdot 2$

$4x^2 + 7x - 2 = 0$

$D = 49 + 32 = 81 = 9^2$

$x_{1,2} = \frac{-7 \pm 9}{8} = \begin{cases} \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \\ -\frac{16}{8} = -2 \end{cases}$



Но по рисунку

$x_A > 0 \Rightarrow$ подходит только $\frac{1}{4}$

$y = \frac{1}{x}$ при $x = \frac{1}{4}$ $y = 4$ $A(\frac{1}{4}; 4)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	7	7	2	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

B: $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{x} \quad | \cdot 2x$

$x^2 + x - 2 = 0$

$x = 1 \quad x = -2$ по $x > 0$ по усл. $\Rightarrow x_B = 1 \quad B(1;1)$

$y_B = \frac{1}{1} = 1$

4) Найдем серединные перпендикуляры к AB и AC

AB: $x = \frac{\frac{1}{4} + 1}{2} = \frac{5}{8}$

$y = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$

AC: $x = \frac{\frac{1}{4} - 2}{2} = -\frac{7}{8}$

$y = \frac{4 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{7}{4}$

5) Найдем угловой коэффициент серединных перпендикуляров к AB и AC

AB: $y - \frac{5}{2} = \frac{1}{4}\left(x - \frac{5}{8}\right)$

$y = \frac{1}{4}x + \frac{25}{32}$

AC: $y - \frac{7}{4} = -\frac{1}{2}\left(x - \left(-\frac{7}{8}\right)\right)$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{21}{16}$

6) Теперь найдем пересечение серединных перпендикуляров — это и будет центр описанной окружности

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	7	7	2	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{21}{16} \\ y = \frac{1}{4}x + \frac{75}{32} \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2}x + \frac{21}{16} = \frac{1}{4}x + \frac{75}{32}$$

$$\frac{3}{4}x = \frac{42 - 75}{32}$$

$$\frac{3}{4}x = -\frac{33}{32}$$

$$x = -\frac{33}{32} \cdot \frac{4}{3} = -\frac{11}{8}$$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{11}{8}\right) + \frac{21}{16}$$

$$y = \frac{11}{16} + \frac{21}{16} = \frac{32}{16} = 2$$

Ответ: $\left(-\frac{11}{8}; 2\right)$

№2

1) $x_n = n^2 + 300$

$x_{n+1} = (n+1)^2 + 300$

$x_{n+1} - x_n = n^2 + 2n + 1 + 300 - n^2 - 300 = 2n + 1$

$x_{n+1} - x_n = 2n + 1$

$НОД(x_n; x_{n+1}) = НОД(n^2 + 300; 2n + 1)$

Пусть d – общий делитель

d дел $2n + 1 \Rightarrow 2n \equiv -1 \bmod d$

$n \equiv -\frac{1}{2} \bmod d$

$n^3 + 300 \equiv 0 \bmod d$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 300 \equiv 0 \bmod d$

$\frac{1}{4} + 300 \equiv 0 \bmod d \mid \cdot 4$

$1 + 1200 \equiv 0 \bmod d$

$1201 \equiv 0 \bmod d$

$1201 : d \Rightarrow$

$1201 -$ простое

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$a_{n+1} = 0 \mod 1201$

$a_n = -1 \mod 1201$

$n = -600 \mod 1201$

$n = 600$

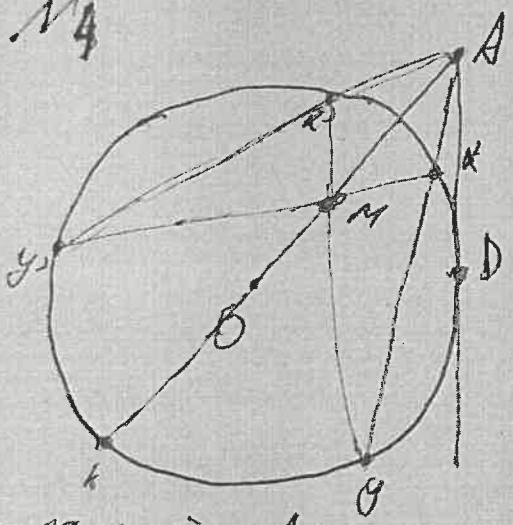
$x_{600} = 600^2 + 300 = 360300 = 1201 \cdot 300$

$x_{601} = 601^2 + 300 = 361801 = 1201 \cdot 301$

Оба числа делятся на 1201 – это НОД

Ответ: 1201

№4



1) Т.к. OA проходит через центр окр-ти, то проведём AO до пересечения с окр-тью в т. k

2) Проведём AD – касательную к окр-ти

3) Точки x' и y' симм. x и y отн-о прямой AO, где x'y' ∥ xy в т. M

4) $AD^2 = Ax \cdot Ay$

$AD^2 = AM \cdot Ak$

AD – ~~секущая~~ касательная, фиксирована (при данной A)

Ak – отрезок, фиксирован (при данной A)

тогда и AM – фиксирован, а M – точка пересеч. x'y' и OA значит M всегда определена и не зависит от выбора секущей т.е. O

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 9

М	А	0	0	0	1	7	7	2	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 5

$k = \frac{3^m+2}{3^n+1}$ $k \in Z$

$3^m + 2 = k(3^n+1)$

$3^m = k3^n + 2k - 2$

$3^n(3^{m-n} - k) = 2k-2$

$3^n \nmid 2 \Rightarrow (3^{m-n} - k) : 2$

$3^{m-n} = \underbrace{k}_{\in Z} + \frac{2k-2}{3^n} \in Z$

$2k-2 \in Z \quad | \quad k-1 : 3^n$

$3^n \nmid 2 \quad | \Rightarrow k = 1 \bmod 3^n$

$3^{m-n} = 1 + \frac{2(3^n+r)-2}{2}$

r - остаток от деления k на 3^n

$3^{m-n} \sim 1 + \frac{2r}{3^n}$

При больших n имп. ев

$m-n > n$

$m > 2n$ Т.е. сильно превосходит остальное то

$m > n^2$

ГОТ

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

M	A	0	0	0	1	7	7	2	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Пусть x – орел для Бори

y – орлов для Вани

z – орлов для Пети

Всего способов распределить орлов чтобы Ване хватило

$$C_{(1000-1)}^{(3-1)} = \frac{1000!}{2!(1000-2)!} = \frac{1000 \cdot 999}{2} = 665 \cdot 999 = 499500$$

2) Вычтем варианты, когда $x = y$ или $y = z$ или $z = x$

$2x + z = 1001$

$x_{min} = 1$

$x_{max} = 500$ | 500 вариантов

$500 \cdot 3 = 1500$ т.к. мы посчитали только $x = y$

$499500 - 1500 = 498000$ вариантов без одинак. кол-ва (все 3 одинаковыми быть не могут $x + x + 1001 \neq 3$)

но вариантов где у Вани больше орлов ровно $\frac{1}{3}$

Тогда $498000 \cdot \frac{1}{3} = 166000$

Ответ: 166000

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	4	9	9	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	X	20	20	///	80

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Ордината точки C это $y = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

Найдем прямую с коэффициентом 2:

$y = 2x + b$

$-\frac{1}{2} = 2 \cdot (-2) + b$

$b = 3{,}5$

$y = 2x + 3{,}5$

Найдем точку A:

$2x + 3{,}5 = \frac{1}{x}$

$4x^2 + 7x - 2 = 0$

$x = -2;\ \frac{1}{4}$

при $x = -2$ получается точка C, поэтому точка это $(\frac{1}{4}, 4)$

Найдем прямую с коэффициентом $\frac{1}{2}$:

$y = \frac{1}{2}x + b$

$-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot (-2) + b$

$b = 0{,}5$

$y = 0{,}5x + 0{,}5$

Найдем точку B:

$0{,}5x + 0{,}5 = \frac{1}{x}$

$x^2 + x - 2 = 0$

$x = -2;\ 1$

Снова при $x = -2$ получается точка C, поэтому B это $(1, 1)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	4	9	9	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Центр описанной окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров треугольника

Найдем серединный перпендикуляр к AC:

A (0,25; 4) C (-2; -0,5) их середина

$M\left(\frac{-2+0,25}{2}; \frac{4-0,5}{2}\right) = M\left(-\frac{7}{8}; \frac{7}{4}\right)$

Уравнение перпендикуляра к $y = 2x + 3,5$:

$y = -\frac{1}{2}x + b$

Подставим точку M:

$\frac{7}{4} = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{7}{8}\right) + b$

$b = \frac{21}{16}$

Получили: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{21}{16}$

Найдем серединный перпендикуляр к BC:

B (-1,1) C (-2; -0,5) их середина

$N\left(\frac{-1-2}{2}; \frac{1-0,5}{2}\right) = N\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$

Уравнение перпендикуляра к $y = 0,5x + 0,5$:

$y = -2x + b$

Подставим точку N

$\frac{1}{4} = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + b$

$b = -\frac{3}{4}$

Получили $y = -2x - \frac{3}{4}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	4	9	9	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Найдем пересечение:

$$-2x - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}x + \frac{21}{16}$$

$$-\frac{3}{2}x = \frac{33}{16}$$

$$x = -\frac{11}{8}$$

Подставим в уравнение перпендикуляра и BC:

$$y = -2\left(-\frac{11}{8}\right) - \frac{3}{4} = 2$$

Получили точку $\left(-\frac{11}{8}; 2\right)$

Ответ: $\left(-\frac{11}{8}; 2\right)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	4	9	9	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

$X_n = n^2 + 300$ $X_{n+1} = (n+1)^2 + 300$

Нужно найти НОД $(n^2+300, (n+1)^2+300) =$ НОД,

Воспользуемся алгоритмом Евклида, вычтем из большего числа, меньшее:

$n^2 + 2n + 301 - (n^2 + 300) = 2n + 1$

Тогда искомый НОД это НОД $(n^2+300, 2n+1)$ будет выполнено:

НОД $(n^2+300, 2n+1) =$ НОД $(4 \cdot (n^2+300), 2n+1)$

Так как НОД $(n^2+300, 2n+1)$ будет делителем $4(n^2+300)$ и $2n+1$

Теперь, воспользуемся алгоритмом Евклида для второго НОД $(2n-1)$ раз:

НОД $(4 \cdot (n^2+300), 2n+1) =$
$=$ НОД $(4 \cdot (n^2+300) - (2n+1) \cdot (2n-1), 2n+1) =$
$=$ НОД $(1201, 2n+1) \leq 1201$ (потому что делитель не может быть больше числа)

при $n = 100$ НОД $(1201, 2 \cdot 600 + 1) = 1201$, а так как НОД $(600^2 + 300, 2 \cdot 600 + 1) =$ НОД $(600^2 + 300, 1201) =$ НОД $(360300, 1201) = 1201$ (потому что $360300 : 1201$)

Ответ: 1201

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	4	9	9	6	2	5

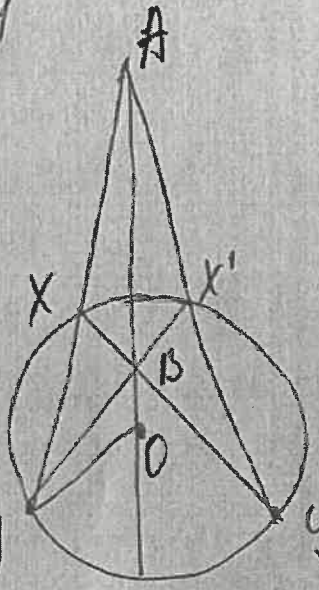
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

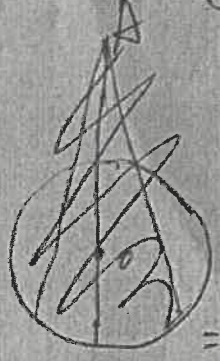
№4



Так как X симметр. X', то прямая AX симметр. прямой AX' (т.к A лежит на линии симметр.) Окружность симметрична относ. OA, т.к OA содержит диаметр окружности. Тогда и точки пересеч. AX и AX' с окруж. симметричны, т.е. Y и Y'. Т.к. X и X' Y и Y' симметр. относ. OA, то и прямые XY', X'Y симметр. отн. OA. Тогда они пересек. в точке B, лежащей на прямой OA.

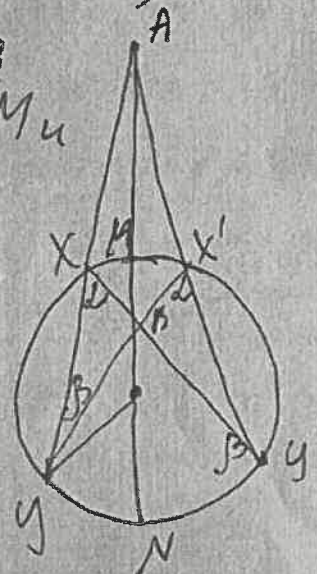
Пусть $\angle YXY' = \alpha = \angle YX'Y'$ (как вис.)

$\angle XYX' = \beta = XY'X'$ (как вписан.)



Из симметрии дуга XM равна дуге X'M и равна $\angle XY'X' = \beta$

Аналогично $\smile YN = \smile Y'N = \alpha$



$\angle XBA = \frac{1}{2}(\smile XM + \smile NY') = \frac{\alpha+\beta}{2}$

$\angle XAB = \frac{1}{2}(\smile YN - \smile XM) = \frac{\alpha-\beta}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	4	9	9	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\angle AXB = 180^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}$ -

$- \frac{\alpha-\beta}{2} = 180 - 2.$

$\angle AOY = \smile MY = 180^\circ - \smile YN = 180^\circ - 2$

Рассмотрим ΔAXB и ΔAOY:

$\angle AXB = \angle AOY = 180^\circ - 2$

$\angle XAB = \angle OAY$ (т.к. он общий)

$\Delta AXB \sim \Delta AOY$ (по 2 равным углам)

$\frac{AX}{AO} = \frac{AB}{AY}$ $\quad AX \cdot AY = AO \cdot AB$

$AB = \frac{AX \cdot AY}{AO}$ $\quad AX \cdot AY$ – величина,

зависящая только от выбора A и окружности, а значит при данных A и окружности фиксированная (т.к. это произведение всей секущей на всю секущую, т.е. степень точки относительно окружности). Тогда B – это точка на OA, расположенная на расст. $\frac{AX \cdot AY}{AO}$ от точки A т.к. $AX \cdot AY$ – степень точки A, т.е. $AX \cdot AY = AO^2 - R^2$, где R – радиус окружности. Тогда B располагается на расстоянии

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	4	9	9	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\frac{AO^2 - R^2}{AO}$ от точки

A на луче OA

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	4	9	9	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

Так как $m > n$, то

пусть $m = an + b$, $0 \leq b < n$

Так как $\frac{3^m+2}{3^n+2} \in Z$, то по модулю

$3^n+2 : 3^m+2 \equiv 3^{an} \cdot 3^b + 2 \equiv (3^n)^a \cdot 3^b + 2 \equiv$

$\equiv (-2)^a \cdot 3^b + 2 \equiv 3^n + 2$

Пусть $m \leq n^2$, тогда $a \leq n$

$(-2)^a \cdot 3^b \equiv 3^n \pmod{3^n+2}$

$(-2)^a \equiv 3^{n-b} \pmod{3^n+2}$, т.к. $НОД(3^n+2, 3^b) = 1$

т.к. $a \leq n$, то $|(-2)^a| < 3^n < 3^n+2$.

$3^{n-b} < 3^n+2$.

Тогда либо $(-2)^a = 3^{n-b}$, что невозможно

т.к. $a \geq 1$, либо $3^{n-b} + 2^a = 3^n + 2$

$2^a = 3^n - 3^{n-b} + 2 \geq 3^n - 3^{n-1} + 2 = 2 \cdot 3^{n-1} + 2$,

т.к. $b \geq 1$ (иначе $a = 1$ и $b = 0 \Rightarrow m = n$,

$2^{a-1} \geq 3^{n-1} + 1$, $2^{a-1} > 3^{n-1}$, $a > n$.

Противоречие.

Значит: $a > n$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	7	6	2	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	X	20	///	80

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

$x_c = -2$, $y_c = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $C(-2; -\frac{1}{2})$

Уравнение прямой, проходящей через $C(-2; -\frac{1}{2})$ с наклоном $k = 2$:

$y - (-\frac{1}{2}) = 2(x - (-2)) \Rightarrow y + \frac{1}{2} = 2(x+2)$

$y + \frac{1}{2} = 2x + 4 \Rightarrow y = 2x + 4 - \frac{1}{2} = 2x + \frac{7}{2}$

Т. пересеч. с прямой $y = \frac{7}{x}$:

$$\begin{cases} y = \frac{7}{x} \\ y = 2x + \frac{7}{2} \end{cases}$$

$\frac{7}{x} = 2x + \frac{7}{2}$

$2x \cdot \frac{7}{x} = 2x\left(2x + \frac{7}{2}\right) \Rightarrow 2 = 4x^2 + 7x$

$4x^2 + 7x - 2 = 0$

$4x^2 + 8x - x - 2 = 0 \Rightarrow (4x - 1)(x + 2) = 0$

Т.е. $x = \frac{1}{4}$

$x_2 = -2 \rightarrow$ это т. C

$y = \frac{7}{\frac{1}{4}} = 4$

Точка искомая: $A(\frac{1}{4}; 4)$

Аналогично рассмотрим прямую с $k = \frac{1}{2}$:

Уравнение прямой, проходящей через $C(-2; -\frac{1}{2})$ с наклоном $k = 0{,}5$:

$y - (-\frac{1}{2}) = 0{,}5(x - (-2)) \Rightarrow y + \frac{1}{2} = 0{,}5(x+2)$

$y + \frac{1}{2} = 0{,}5x + 1 \Rightarrow y = 0{,}5x + 1 - \frac{1}{2} = 0{,}5x + \frac{1}{2}$

Найдем т. пересеч. с $y = \frac{2}{x}$:

$$\begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ y = 0{,}5x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\frac{2}{x} = 0{,}5x + \frac{1}{2}$

$2x \cdot \frac{2}{x} = 2x(0{,}5x + \frac{1}{2}) \Rightarrow 2 = x^2 + x$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x+2)(x-1) = 0$

$x = -2$ т. C, $x = 1$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 9

М	А	0	0	0	1	7	6	2	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1 (продолжение)

$y = \frac{2}{9} = 1$.

Таким образом:

$B(7;1)$

3 вершина $\triangle ABC$:

$A(\frac{2}{9};4)$ $B(7;1)$ $((-2;-\frac{2}{2})$

OA центр окр, проведенных от всех вершин. Тогда: $O(x;y)$ $OA^2 = OB^2 = OC^2$

$OA^2 = (x-\frac{2}{9})^2 + (y-4)^2$

$(x-\frac{2}{9})^2 = x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{4}{81}$

$(y-4)^2 = y^2 - 8y + 16$

$(x-7)^2 = x^2 - 14x + 49$

$(y-1)^2 = y^2 - 2y + 1$

$OB^2 = (x-7)^2 + (y-1)^2$

$x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{4}{81} + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1$

(вычтем уравнение слева и справа части)

$24x - 9y + 225$

$OC^2 = (x+2)^2 + (y+\frac{1}{2})^2$

Решим систему ур-ий:

$\begin{cases} 24x - 9y + 225 = 0 \\ 9x + 4y - 3 = 0 \end{cases}$

$9x = 4y - 3$

$x = -\frac{y+3}{9} = -\frac{2}{9}y - \frac{1}{3}$

Подставим x в 1 ур-ие:

$24(-\frac{2}{9}y - \frac{1}{3}) - 9(y+12) = 0$

$-24y - 9y - 9y + 225 = 0 \Rightarrow -70y + 225 = 0$

$\Rightarrow -70y + 221 = 0 \Rightarrow y = 2$

$x = -\frac{2}{9} \cdot 2 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{9} - \frac{1}{3} = -\frac{4}{9} - \frac{3}{9} = -\frac{7}{9}$

Таким образом, координаты центра описанной окр.:

$O = (x;y) = (-\frac{7}{9};2)$. Ответ: $(-\frac{7}{9};2)$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 6 | 2 | 0 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

Полученное квадратное уравнение:

$2\lambda+1=1201 \Rightarrow \lambda=600$

Для $\lambda=600$ удалены 2 клетки 1201:

$2\lambda+1=2\cdot 600+1=1201$, очевидно, что делится на 1201

$x_{600}=600^2+300=360000+300=360300$,

заметим, что $360300=1201\cdot 300 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{600} \vdots 1201$

$x_{601}=601^2+300=361201+300=361501$.

$x_{601}-x_{600}=361501-360300=1201 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{601}=x_{600}+1201 \Rightarrow$ ~~Так~~ Так клетка 1201 (т.к. сумма двух клеток ~~кратна~~ кратна 1201)

Таким образом: x_{600} и x_{601} кратно 1201

Таким же образом можно получить клетки кратные 1201 и для функции λ, если $(2\lambda+1)\vdots 1201$.

Поэтому наиб. знач. $y_1=1201$. Это максимальный общий делитель, который может быть у двух соседних членов последовательности.

Ответ: 1201.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 6 | 2 | 0 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данные таблицы заполняются жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

Переход от 3^k+2 к 3^{k-1}:

$3^k+2 \mid 3^k+2 \Rightarrow 3^{k+2} \mid (3^k+2) - (3^k+2) = 3^k - 3^k$

Тогда: $3^k - 3^k = 3^k(3^{n-k}-1)$

Заметим: $\text{НОД}(3^k+2, 3^k) = \text{НОД}(3^k+2-3^k, 3^k) =$

$= \text{НОД}(2, 3^k)$

Однако 3^k всегда нечетно $\Rightarrow \text{НОД}(2, 3^k) = 1$.

Т.е. Поэтому, если 3^k+2 делит нацело $3^k(3^{n-k}-1)$, а $(3^k$ и 3^k не имеют общих делителей, то:

$3^k+2 \mid 3^{n-k}-1$

Таким образом уже: $3^k+2 \mid 3^k+2$ следует еще одно: $3^k+2 \mid 3^{n-k}-1$

Аналогично, если 3^k+2 делит $3^{n-k}-1$, то:

$3^k+2 \mid (3^{n-2k}-1) - (3^k-1) = 3^{n-2k} - 3^k$

По тому же рассуждению получаем:

$3^k+2 \mid 3^k(3^{n-2k}-1) \Rightarrow 3^k+2 \mid 3^{n-2k}-1$

Таким образом на каждом шаге убывает показатель на k каждый раз, сохраняя делимость:

1. $3^k+2 \mid 3^k+2$
2. $\Rightarrow 3^k+2 \mid 3^{n-k}-1$
3. $\Rightarrow 3^k+2 \mid 3^{n-2k}-1$
4. ...
5. $\Rightarrow 3^k+2 \mid 3^{n-kk}-1$

где k – любое целое число, пока показатель $n-kk$ остается неотрицательным

Предположим, что $n = k^2$. Тогда рассмотрим шаг $k=k$: $3^k+2 \mid 3^{n-k\cdot k}-1 = 3^{n-k^2}-1$

Если $n < k^2$, то показатель $n-k^2$ отрицателен.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 6 | 2 | 0 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано в этой области листа

№5 (Недалекие)

$m-h^2=0 \Rightarrow 3^{m-h^2}=1$,

а значит $3^{m-h^2}-1=0$.

Но ни при каком числе $3^h+2>0$, и это не может делать отрицательное число (кроме 0), — получаем противоречие.

При $m=h^2$: $3^{m-h^2}-1=3^0-1=0$. 3^h+2 действительно делит 0. Но надо проверить, будет ли это нам действительно целое $\frac{3^h+2}{3^h+2}$. При $m=h^2$ легко видеть, что $h \neq 2$, т.к. 3^h+2 не делится на 3^h+2. Например, для $h=2$: $3^2+2=11$, а $3^2+2=11$. 11 и 11 делятся нацело и при больших h.

Таким образом, при $m=h^2$ получается только одно подходящее условию задачи. Отсюда заключаем, что единственный верный вариант — это $m=h^2$.

№3 (РАВ) — нас интересует $V(Вова)$. Т.к. Вова Петя — это A + $V(Вова)$ = $A+D$ (т.к. в больнице $P \geq 1$), а $B(Вова)=A+D+E$ (Вова в больнице $E \geq 11$). Здесь $A \geq 1$, $D \geq 1$, $E \geq 1$ — целые числа.

$P+V+B=4A+D)+(A+D+E)=3A+2D+E=1001$

Для A фиксированного: $2D+E=1001-3A$.

$E=1001-3A-2D$. $D \geq 1$. $E \geq 11 \Rightarrow 1001-3A-2D \geq 11$

$\Rightarrow 3A+2D \leq 1000$. Макс. $A=332$. Для каждого A существует и единственный сын Вовы, каждое пятёрок (Р+А+В) соответствует уже конкретное распределение мест (Вова и Петя могут обменяться местами). Р и В. Поэтому искомое $332 \cdot 2 = 664$ способов распределения.

Ответ: 664 способа.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	6	2	5	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	20	X	///	80

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

$y = \frac{1}{x}$

Найдем точки пересечения заданных прямых с гиперболой

$y = kx + m$ - ур-ие прямой. Подставим с.

$k = 2$:

$-\frac{1}{2} = -2 \cdot 2 + m$

$m = 3,5$

$y = 2x + 3,5$

$k = \frac{1}{2}$:

$-\frac{1}{2} = -2 \cdot \frac{1}{2} + m$

$m = 0,5$

$y = 0,5x + 0,5$

Найдем точки пересечения прямых с гиперболой

$2x + 3,5 = \frac{1}{x}$

$\frac{1 - 2x^2 - 3,5x}{x} = 0$

$D = 3,5^2 + 8 = 20,25$

$x = \frac{-3,5 + 4,5}{4} = \frac{1}{4}$ $x = \frac{-3,5 - 4,5}{4} = -2$

$A(\frac{1}{4}; 4)$

$0,5x + 0,5 = \frac{1}{x}$

$\frac{0,5x^2 + 0,5x - 1}{x} = 0$

$x = 1$ $x = -2$ (удовл. координатам)

$B(1; 1)$

Центр описанной окружности - точка пересечения серединных перпендикуляров

середина AC $\left(\frac{-2 + \frac{1}{4}}{2}; \frac{-\frac{1}{2} + 4}{2}\right)$ $\left(-\frac{7}{8}; \frac{7}{4}\right)$

Если прямые перпендикулярны, то произведение их угловых коэффициентов $= -1$.

$2 \cdot k = -1$ $k = -\frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{2}x + m$, подставим середину AC: $\frac{7}{4} = +\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{8} + m \Rightarrow m = \frac{21}{16} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{21}{16}$

середина BC $\left(\frac{1-2}{2}; \frac{1-0,5}{2}\right)$ $\left(-\frac{1}{2}; 0,25\right)$

$\frac{1}{2} \cdot k = -1 \Rightarrow k = -2$, подставим середину BC: $0,25 = -0,5 \cdot (-2) + m \Rightarrow m = -0,75 \Rightarrow y = -2x - 0,75$

Найдем точку пересечения:

$-\frac{1}{2}x + \frac{21}{16} = -2x - 0,75$

$1,5x = -\frac{33}{16}$

$x = -\frac{11}{8}$

$y = -\frac{11}{8} \cdot (-2) - 0,75 = \frac{11}{4} - \frac{3}{4} = 2$

Ответ: центр описанной окружности $\left(-\frac{11}{8}; 2\right)$.

№2

Оценка: НОД $(n^2 + 300; (n+1)^2 + 300)$

НОД $(n^2 + 300; n^2 + 2n + 1 + 300)$. Заметим, больше чем произведение меньших по св-ам НОД.

НОД $(n^2 + 300; 2n + 1)$

По алгоритму Евклида делимое больше чем его остаток, при делении на меньшее.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ): МА0001625525

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$n^2+300 \mid 2n+1$

$n^2+\frac{1}{2}n \quad \mid \frac{1}{2}n-\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{2}n+300$

$-\frac{1}{2}n-\frac{1}{4}$

$\frac{1201}{4}$ (ост.)

НОД $(2n+1;\ \frac{1201}{4})$ | вознаграждение от начальника

$2n+1$ - нечетное при любом n => можно домножить $\frac{1201}{4}$ на 4 без изменения НОД.

НОД $(2n+1;\ 1201)$, наибольший НОД этих чисел не может быть больше одного из чисел под НОД => наибольший НОД 1201

Пример: $n=600$.

НОД $(600^2+300;\ (600+1)^2+300)$

НОД $(360300;\ 361501) = 1201$.

№3

1) хотя бы 1 орех у каждого

$C_{1000}^2 = \frac{1000!}{998!\cdot 2} = \frac{1000\cdot 999}{2}$ (кол-во вариантов разделить 1000 орех на 3 кучи (метод шаров и перегородок))

2) Есть одинаковое кол-во орехов у 2 белок (у 3 быть не может, т.к. 1001 на 3 не делится)

$500 \cdot C_3^2 = 500 \cdot 3 = 1500$ (500 вариантов кол-во орехов $(1000-1):2$)

3) у всех есть орехи и их разное кол-во.

$\frac{1000\cdot 999}{2} - 1500$

4) у Бори орехов больше всех

$\frac{\frac{1000\cdot 999}{2} - 1500}{3} = \frac{500(999-3)}{3} = \frac{500\cdot 996}{3} = 166000$ (делим на 3 т.к. всего вариантов распределения орехов между 3 белками $3\cdot 2$ и в 2 из них у Бори больше всех, то есть подходящих вариантов $\frac{2}{3\cdot 2}$ от всех).

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

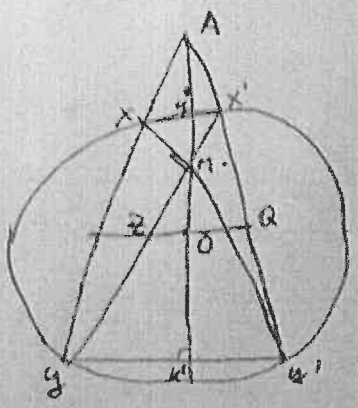
М	А	0	0	0	1	6	2	5	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)



Исходя из симметрии: $XN' = N'X'$, $YN' = N'Y'$, $XX' \parallel YY'$

Так $XX' \parallel YY'$, то $XX'Y'Y$ - вписанная трапеция. Так трапеция вписана, то она равнобедренна. Проведем через O прямую параллельную XX'. $\triangle XX' = \triangle ZMA \Rightarrow HM = MO \Rightarrow$

$\frac{HM}{MN'} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ какая бы секущая не была выбрана, частное в 1 месте

1	2	3	4	5	6	Σ
20	X	20	20	20	///	80

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1) D

Запишем координаты C:

$y = \frac{1}{x} = -\frac{1}{2}$; $C\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$

Запишем уравнение прямой с угловым коэфф. 2 (прямой через C):

$y = 2(x+2) - \frac{1}{2} = 2x + 3{,}5$

Запишем уравнение прямой с угловым коэфф. $\frac{1}{2}$ (прямой через C):

$y = \frac{1}{2}(x+2) - \frac{1}{2} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

Найдем A:

$2x + 3{,}5 = \frac{1}{x}$

$2x^2 + 3{,}5x - 1 = 0$

$4x^2 + 7x - 2 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 49 + 32 = 81$

$x_{1,2} = \frac{-7 \pm 9}{8}$

$x = -2; \frac{1}{4}$

-2 - соответствует C следовательно $A\left(\frac{1}{4}; 4\right)$

Найдем B:

$\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{x}$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x+2) \cdot (x-1) = 0$

$x = -2; 1$

-2 - соответствует C следовательно $B(1; 1)$

Центр описанной окружности и есть центр пересечения серединных перпендикуляров.

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

(продолжение 1)

серединный перпендикуляр к СВ проходит через ~~центр~~ середину СВ $\left(\frac{-2+1}{2}; \frac{\frac{1}{2}+1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ и перпендикулярно СВ следовательно имеет наклон: -2

Получим уравнение:

$y = -2\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}$

серединный перпендикуляр к СА проходит через середину СА $\left(\frac{-2+\frac{1}{4}}{2}; \frac{-\frac{1}{2}+4}{2}\right) = \left(-\frac{7}{8}; \frac{7}{4}\right)$, перпендикулярно СА следовательно имеет наклон: $-\frac{1}{2}$

Получим уравнение

$y = -\frac{1}{2}\left(x+\frac{7}{8}\right)+\frac{7}{4}$

Найдем центр

$-2\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4} = -\frac{1}{2}\left(x+\frac{7}{8}\right)+\frac{7}{4} \quad | \cdot 16$

$-32x - 16 + 4 = -8x - 7 + 28$

$-24x = 33$

$-8x = 11$

$x = -\frac{11}{8}$

$y = -\frac{1}{2}\left(-\frac{11}{8}+\frac{7}{8}\right)+\frac{7}{4} = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{7}{4} = 2$

Ответ: $\left(-\frac{11}{8}; 2\right)$

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

3) Найдем кол-во упорядоченных троек (A, B, C), удовлетворяющих условиям:

$A+B+C=1001$, $A, B, C > 0$

Общее число таких троек равно:

$C_{1000}^{2} = \frac{1000 \cdot 999}{2} = 499\,500$, стоит подметить, что нам не подходят тройки, в которых хотя бы 2 числа совпадают, полностью одинаковые тройки невозможны, т.к. 1001 не делится на 3.

Рассмотрим случай 2 из этих чисел совпадают обозначим их как (x, y)

$1001 - 2x > 0$, $1001 - 2x = y$

подходит для x $(1 \leq x \leq 500)$, значит существуют 500 неупорядоченных троек с повторяющимися элементами, каждая такая тройка может быть упорядочена 3 способами, таким образом полученное упорядоченных троек с различными парами чисел:

$499\,500 - 1500 = 498\,000$

число неупорядоченных троек различных чисел:

$$\frac{498\,000}{3!}$$

Ноль принимает максимальное значение — 1 способ, оставшиеся 2 числа могут быть распределены между ними и Ваней 2-мя способами.

Значит общее число способов:

$$\left(\frac{498\,000}{3!}\right) \cdot 2 = 166\,000$$

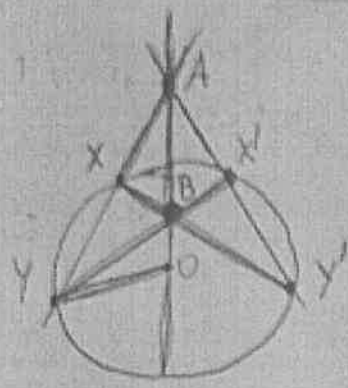
Ответ: 166 000

МА 0000108 4523

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная графа заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

4)



Т.к. X симметрична X', то прямая AX симметрична прямой AX' (т.к. A лежит на линии симметрии)

Окружность симметрична относительно OA, т.к. OA содержит диаметр окружности

Тогда и точки пересечения AX и AX' с окружностью симметричны, т.е. Y и Y'.

Т.к. Y и X', Y' и Y - симметричны относительно OA то и прямые XY', X'Y - симметричны относительно OA.

Тогда они пересекаются в (·) B лежащей на прямой OA.

Пусть ∠ XXY' - равен α и равен ∠ YX'Y' (как внешний)

∠ XY'X' равен β и равен XY'X' (как внешний)

из симметрии дуга XM равна дуге X'M и равна ∠XY'X' аналогично дуга Y'M ~~X'M~~ равна дуге YM и равно α.

∠ XBA равен: $\frac{1}{2}\cdot(UNY' + UXM) = \frac{\alpha+\beta}{2}$

∠ X+B равен: $\frac{1}{2}\cdot(UYN - UXM) = \frac{\alpha-\beta}{2}$

∠ AXB равен $180^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} = 180^\circ - \alpha$

∠ AOY равен: $UMY = 180^\circ - UYN = 180^\circ - \alpha$

(продолжение №)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Рассмотрим $\triangle AXB$ и $\triangle AOY$

$\angle AXB = \angle AOY = 120° - \angle$

$\angle XAB = \angle OAY$ (т.к от общий) ~~$\triangle AXB$~~ следовательно

$\triangle AXB$ эквивалентен $\triangle AOY$ (по 2-ум равным углам)

следовательно $\frac{AX}{AO} = \frac{AB}{AY}$, $AX \cdot AY = AO \cdot AB$

$AB = \frac{AX \cdot AY}{AO}$, AX умножить на AY – величина

зависящая только от выбора точки A и окружности, а значит при данных A и окружности (т.к. это произведение внешней части секущей на всю секущую, т.е. степень точки относительно окружности), тогда B – это точка на OA, находящаяся на расстоянии $\frac{AX \cdot AY}{AO}$ от точки A, а т.к. ~~$AX \cdot AY$~~ $AX \cdot AY$ – степень точки A, то $AX \cdot AY = AO^2 - R^2$ (R – радиус окружности) Тогда B находится на расстоянии $\frac{AO^2 - R^2}{AO}$ от точки A на луче OA.

$2 \cdot 8^n + 2 - 3^{n-1} \cdot (n-2)$

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри ОЛЕ ЗАПОЛНЯТЬ

$\forall n \in N: n < m$,

$\frac{3^m+2}{3^n+2} \in N$

Пусть $m = nk + r$, где k - частное от деления m на n, r - остаток

$n > r$ и $k \geq 0$, $k \geq 1$

Рассмотрим $3^{n-r} + n$ по модулю:

$3^m + 2 = 3^{m \cdot k + r} + 2 \equiv (3^m)^k \cdot 3^r + 2 \equiv ((-2)^k) \cdot 3^r + 2$

следовательно $(-2)^k \cdot 3^r + 2 \equiv 3^n + 2$ |

$(-2)^k \cdot 3^r \equiv 3^n \quad | : 3^r$

$(-2)^k \equiv 3^{n-r}$, если k - чётное, то $(-2)^k > 0$ и $3^{n-r} > 0$, то тогда получим $(-2)^k = 3^{n-r}$, такого быть не может, т.к. $k \geq 1$ или $(-2)^k - 3^{n-r} \geq 3^n + 2$, тогда получим $2^k \geq 3^n$ следовательно $k > n$ и следовательно $m > n^2$,

если k - нечётное, то тогда получим $(-2)^k < 0$, а $3^{n-r} > 0$ следовательно $3^{n-r} - (-2)^k = 3^n + 2$ или $3^{n-r} - (-2)^k \geq 2(3^n + 2)$.

В первом случае у нас получим

$2^k = 3^n + 2 - 3^{k-r}$ если $r < 0$, то $k = 1$ следовательно $m = n$, но $m > n$ (по условию) следовательно $r \geq 1$ следовательно

$2^k \geq 3^n + 2 - 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} + 2$ следовательно

$2^{k-1} \geq 3^{n-1} + 1$ следовательно $k - 1 > n - 1$ следовательно $k > n$ и следовательно $m > n^2$

Рассмотрим 2 случай:

$3^{n-r} - (+2)^k \geq 2 \cdot (3^n + 2)$

$2^k \geq 2 \cdot 8^n + 2 - 3^{n-r} \geq 2 \cdot 3^n + 2 - 3^n = 3^n + 2$

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

(Продолжение 5)

последовательно $k > n$,

последовательно $m > n^2$,

и т.д.

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано в этой странице

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	4	7	8	8	2	5

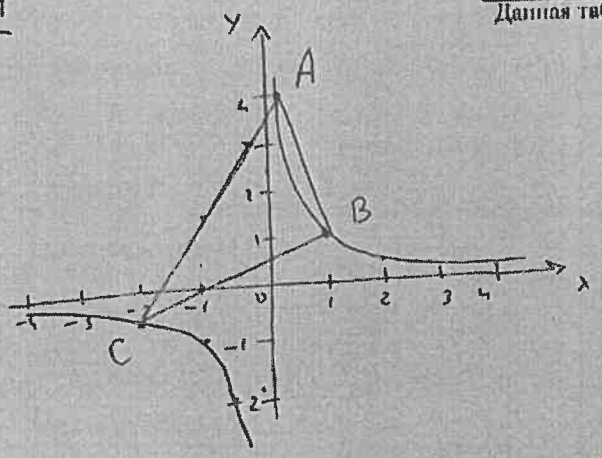
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	20	×	111	80

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа и рамке справа

№1



$C(-2; y_C)$

Т.к. точка C лежит на гиперболе $y = \frac{1}{x}$, и абсцисса точки C равна -2, то

$y_C = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow C\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$

Т.к. через точку C проведены 2 прямые с коэффициентами угла наклона 2 и $\frac{1}{2}$, то составим ур-ия прямых:

$y = 2(x+2) - \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}(x+2) - \frac{1}{2}$ | учитывая сдвиг точки C относительно нуля)

Т.к. данные прямые пересекают гиперболу в точке C, а также в точках A и B соответственно, то:

$2(x+2) - \frac{1}{2} = \frac{1}{x} \mid \cdot 2x, x \neq 0$ и $\frac{1}{2}(x+2) - \frac{1}{2} = \frac{1}{x} \mid \cdot 2x, x \neq 0$

$4x^2 + 8x - x - 2 = 0$ $x^2 + 2x - x - 2 = 0$

$4x^2 + 7x - 2 = 0$ $x^2 + x - 2 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49+32}}{8} = \frac{-7 \pm 9}{8} \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{4} \\ -2 \end{vmatrix}$ $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix}$

Т.к. -2 → абсцисса точки C, то тогда $x_A = \frac{1}{4}$, $x_B = 1$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 7 | 8 | 8 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Подставим найденные значения в ур-ия для нахождения y_A и y_B:

$y_A = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$ $\quad y_B = \frac{1}{1} = 1$

$\Rightarrow A(\frac{1}{4}; 4)$, $B(1; 1)$

Если вокруг $\triangle ABC$ описать окружность, то ее центр будет равноудален от точек A, B и C (наш радиусы) $\Rightarrow OA = OB = OC$

Т.к. длина отрезков — всегда положительное число, то $OA^2 = OB^2 = OC^2$ (можно возвести в квадрат)

(Точка O — центр описанной окружности.

Пусть координаты точки O $\rightarrow$ $O(x_0; y_0)$)

Т.к. координаты точек A, B и C известны, то по Т. Пифагора, используя метод координат:

$OA^2 = (x_0 - \frac{1}{4})^2 + (y_0 - 4)^2$ (т.е. находим длину отрезка OA; $(x_0 - \frac{1}{4})$, $(y_0 - 4)$ — катеты прямоуг. $\triangle$-ка с гипотенузой OA)

$OB^2 = (x_0 - 1)^2 + (y_0 - 1)^2$

$OC^2 = (x_0 - (-2))^2 + (y_0 - (-\frac{1}{2}))^2$

Используя полученные данные, составим систему ур-ий:

$$\begin{cases} (x_0 - \frac{1}{4})^2 + (y_0 - 4)^2 = (x_0 - 1)^2 + (y_0 - 1)^2 \\ (x_0 - 1)^2 + (y_0 - 1)^2 = (x_0 + 2)^2 + (y_0 + \frac{1}{2})^2 \end{cases}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	4	7	8	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа и рамке справа

$$\begin{cases} x_0^2 - \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{16} + y_0^2 - 8y_0 + 16 = \\ \quad = x_0^2 - 2x_0 + 1 + y_0^2 - 2y_0 + 1 \\ x_0^2 - 2x_0 + 1 + y_0^2 - 2y_0 + 1 = x_0^2 + 4x_0 + 4 + y_0^2 + y_0 + \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x_0 - 6y_0 = 2 - 16 - \frac{1}{16} \\ -6x_0 - 3y_0 = 4 + \frac{1}{4} - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x_0 = 6y_0 - \frac{225}{16} \\ -6x_0 = 3y_0 + \frac{9}{4} \quad | \cdot 2 \end{cases}$$

$$- \begin{cases} \frac{3}{2}x_0 = 6y_0 - \frac{225}{16} \\ -12x_0 = 6y_0 + \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\frac{3}{2}x_0 + 12x_0 = -\frac{225}{16} - \frac{9}{2}$$

$$\frac{27}{2}x_0 = -\frac{297}{16}$$

$$x_0 = -\frac{297 \cdot 8}{27 \cdot 16}, \quad x_0 = -\frac{11}{8}, \quad x_0 = -1\frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{3}{2} \cdot \frac{11}{8} = 6y_0 - \frac{225}{16}$$

$$\frac{225}{16} - \frac{33}{16} = 6y_0$$

$$y_0 = \frac{192}{16 \cdot 6}, \quad y_0 = 2$$

$$\Rightarrow \quad O\left(-\frac{11}{8}; 2\right)$$

Ответ: O – центр описанной окружности $\triangle ABC$, $O\left(-\frac{11}{8}; 2\right)$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	4	7	8	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

$n \in N$

$x_n = n^2 + 300$

$y_n = НОД(x_n, x_{n+1})$

$x_{n+1} = (n+1)^2 + 300$

Тогда $НОД(x_n; x_{n+1}) = (n^2+300;\ n^2+2n+1+300) =$

$= (n^2+300;\ 2n+1)$

Воспользуемся алгоритмом Евклида:

по его свойствам т.к. $(2n+1)$ – нечетное число, то и НОД будет нечетным

Тогда $НОД(4n^2+1200;\ 2n+1) = (-2n+1200;\ 2n+1) =$

$= (1201;\ 2n+1)$

Т.к. число 1201 – простое, то НОД либо 1201, либо 1

Т.к. $y_n \to$ максимальное число, и 1201 достигается при $n=600$, то

$НОД(x_n; x_{n+1}) = 1201$

Ответ: 1201.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	4	7	8	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Решается только то, что записано с этой стороны листа и рамке справа

№3

Всего – 1001 орех

Пусть у Бори „x" орехов, у Васи – „y", у Пети – „z". По условию $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$; $x \neq y \neq z$; $x > y$, $x > z$. $x+y+z=1001$

Для начала определим кол-во возможных комбинаций раздачи орехов, чтобы у каждого оказался хотя бы 1 орех (т.е. соблюдает условие $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$):

Все орехи нужно разделить между 3-мя бельчатами по „3-м корзинам"

$$\underbrace{ooo\ldots oo}_{x} \mid \underbrace{ooo\ldots oo}_{y} \mid \underbrace{ooo\ldots oo}_{z}$$

Расставим между „корзинами" перегородки в количестве 2х штук

Чтобы в каждой „корзинке" было хотя бы по 1 ореху, перегородки можно расставить $\frac{1000 \cdot 999}{2} = 999 \cdot 500$ способами

1000 – кол-во мест для 1й перегородки, 999 – кол-во мест для 2й. делим на 2, убирая повторения. Можно заменить на C_{1000}^{2}).

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	4	7	8	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамках строки

Более, для соблюдения условия $x \neq y \neq z$, р/м случай, при котором какие-то из 2х корзинок имеют одинаковое кол-во орехов. Пусть $x = y = a$.

Тогда $2a + z = 1001$

Значит, максимальное ~~кол-во~~ значение a составит 500 (при $z=1$ $2a = 1000$, $a = 500$)

$\Rightarrow a \in [1; 500]$

Т.к. при определении какого-то „а" „у" дает однозначное значение (1я степень, линейная ф-ия, 1 корень), то есть 500 возможных случаев, когда первые две „корзины" будут наполнены одинаково.

Для случаев $y = z$ и $x = z$ рассуждения будут аналогичны

Тогда $500 \cdot 3$ – случаи, не подходящие под условие $y \neq x \neq z$

$\Rightarrow 999 \cdot 500 - 3 \cdot 500 = 500 \cdot 996$

Вариантов

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____

М	А	0	0	0	1	4	7	8	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Т.к. в 3 „корзинки" можно поставить по возрастанию 6ю способами, и только 2 из них подходят (когда $x>y$ и $x>z$)

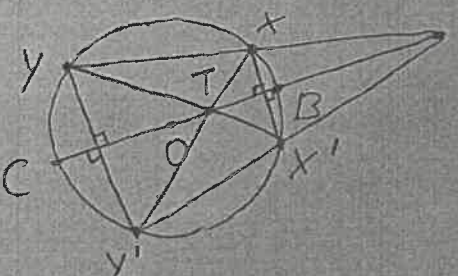
Значит, число $500 \cdot 996$ нужно разделить на 3 для соблюдения последнего условия

$$\Rightarrow \frac{500 \cdot 996}{3} = 500 \cdot 332 = 166000$$

Ответ: 166000

№4

1) Т.к. прямая AO проходит через центр, на ней лежит диаметр. Обозначим его BC, где B ближе к A.



2) x' симметрична относительно OA $\Rightarrow$ она симметрична относительно и диаметра $\Rightarrow$ x' лежит на окружности

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

3) Аналогично

Y относительно $OA \Rightarrow Y'$ симметрична относительно диаметра $\Rightarrow Y'$ лежит на окружности

Получаем, что XX' и YY' перпендикулярны $AO \Rightarrow XX' \parallel YY'$

Тогда $XX'Y'Y$ – равнобедренная трапеция.

Пусть $X'Y \cap AO = T \Rightarrow XY'$ также пересекает AO в точке T в силу симметрии относительно OA

4) Обозначим $OT = t$, $OA = d$, радиус – R.

Точка A фиксирована, как и радиус

$\Rightarrow$ степень точки A: $d^2 - R^2$

степень точки T: $R^2 - t^2$

Если точка T фиксирована, то степень точки будет постоянна с учетом того, что T лежит на выбранном диаметре BC

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 7 | 8 | 8 | 2 | 5 | Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Продолжение решения, что записано с этой стороны листа в другую сторону

5) Р/м подобные

Δ-ки: $\Delta XX'T$ и $\Delta YY'T$, а также

$\Delta AXX'$ и $\Delta AYY'$

Точки пересечения OA с XX' и YY' обозначим M и K соответственно.

Тогда: $\frac{AM}{AK} = \frac{AX}{AY} = \frac{XM}{YK}$

$\frac{XM}{YK} = \frac{XT}{YT}$ в силу того, что $YK = KY'$, $XM = MX'$.

Степень точки A: $AX \cdot AY$ — постоянна

$\Rightarrow XM \cdot YK$ — постоянная $\Rightarrow XT \cdot TY$ — постоянная $\Rightarrow X'T \cdot TY$ — постоянная

6) По Т. об отрезках хорд:

$CT \cdot TB = X'T \cdot TY$

$\Rightarrow (R+t)(R-t) = const$

$R^2 - t^2 = const \Rightarrow t$ — постоянная

что.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	8	2	2	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	20	×	///	80

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

$a+b+c+d=1001$,

Заметим, что если среди чисел есть равные, то это можно задать условием $a=b$, очевидно, что это условие не выполнится для всех наборов с различными числами и полностью охватывает требуемое в условии.

$2a+(c+d)=1001$, заметим, что $c+d \not\vdots 2$, если задано $(c+d) \not\vdots 2$, то a задано однозначно. Тогда $c+d=3$ или $c+d=5$ ... или $c+d=999$, заметим, что $c+d=2k+1$ означает, что одно из чисел $\vdots 2$, а другое — нет, пусть $c \vdots 2$, тогда $c=2$ или $c=4$ ... или $c=2k$, всего — k вариантов, при этом d восстанавливается однозначно. $c+d=3$ (1 вар), $c+d=5$ (2 вар)..., $c+d=999$ (499 вариантов), всего: $1+2+3...+499=$ $=499 \cdot 250$ вариантов, удовлетворяющих условию.

Ответ: $499 \cdot 250 = 124\,750$ вариантов

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	8	2	2	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

По лемме о трезубце:

$BD = DI = DC$, тогда

пусть $\angle DBC = \beta$, тогда

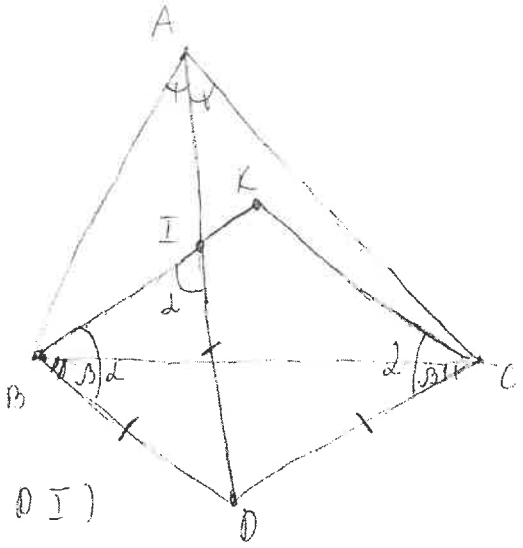
$\angle DCB = \beta$ ($\triangle BDC$, $BD = DC$),

$\angle KCD = \alpha$, тогда

т.к. $DIKC$ – вписанный,

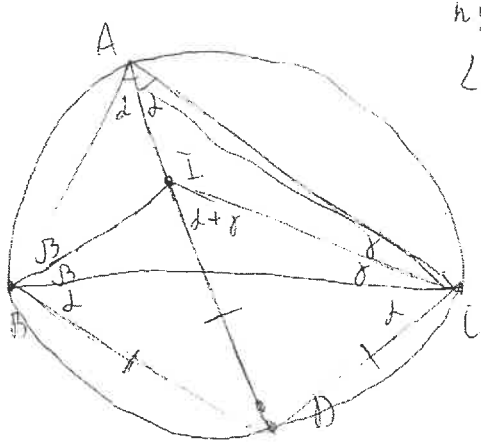
то $\angle DIB = \alpha$, тогда

$\angle DBI = \alpha$ ($\triangle BDI$, $BD = DI$)



$\angle KBC = \alpha - \beta = \angle KCB \Rightarrow \triangle KBC$ – равнобедр. $\Rightarrow KB = KC$

Доказательство леммы о трезубце:



пусть $\angle A = 2\alpha$, тогда

$\angle BAI = \angle CAI = \alpha$, аналогично

$\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$, тогда

$\angle CID = \angle CAI + \angle ACI$ (внешний)

$\angle CID = \alpha + \gamma$, т.к.

$ABCD$ – вписанный, то

$\angle BCD = \angle BAD = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DIC = \angle DCI = \alpha + \gamma \Rightarrow ID = DC$, аналогично

$BD = ID$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	8	2	2	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

$f(x) = x^2 - 2x - 1 =$

$= x^2 - 3x - 1 + x = g(x) + x$, $g(x) = f(x) - x$, тогда

$g(x_1) = f(x_1) - x_1 = -x_1$; $g(x_2) = f(x_2) - x_2 = -x_2$,

$f(x_3) = g(x_3) + x_3 = x_3$, $f(x_4) = g(x_4) + x_4 = x_4$, тогда

$(g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4) = -(x_1^3 x_3 + x_2^3 x_4)$

$x_1 = 1 + \sqrt{2}$, $x_2 = 1 - \sqrt{2}$ или $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$;

$x_3 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$, $x_4 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$ или наоборот, тогда

возможны два варианта: $-(1+\sqrt{2})^3 \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) -$

$-(1-\sqrt{2})^3 \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)$ или $-(1-\sqrt{2})^3 \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) -$

$-(1+\sqrt{2})^3 \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)$.

1) $x_1 = 1+\sqrt{2}$, $x_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$: $(1+\sqrt{2})^3 = 7 + 5\sqrt{2}$

$(1-\sqrt{2})^3 = 7 - 5\sqrt{2}$

$-\frac{1}{2}\left((3+\sqrt{13})(7+5\sqrt{2}) + (7-5\sqrt{2})(3-\sqrt{13})\right) = -21 - 5\sqrt{26}$

2) $x_1 = 1-\sqrt{2}$, $x_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

$-\frac{1}{2}\left((3+\sqrt{13})(7-5\sqrt{2}) + (7+5\sqrt{2})(3-\sqrt{13})\right) = -21 + 5\sqrt{26}$

Ответ: $-21 + 5\sqrt{26}$; $-21 - 5\sqrt{26}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	8	2	2	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№7

Составим первые 5 чисел последовательности $\frac{1}{4}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{14}, \frac{5}{20}$, докажем, что эти последовательности $x_1 = 9$, $x_2 = 14$, $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} + 1$:

$x_n = \frac{(n+2)(n+5)}{2}$, для $n \geq 3$; По индукции:

База: $x_3 = 20 = \frac{5 \cdot 8}{2}$, Переход: $x_4 = 27 = \frac{6 \cdot 9}{2}$, Пусть:

$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} + 1$, пусть верно

$x_{n-1} = \frac{(n+1)(n+4)}{2}$; $x_{n-2} = \frac{n(n+3)}{2}$

$x_n = (n+1)(n+4) - \frac{n(n+3)}{2} + 1 =$

$= \frac{2n^2 + 10n + 8}{2} - \frac{n^2 + 3n}{2} + \frac{2}{2} = \frac{n^2 + 7n + 10}{2} = \frac{(n+2)(n+5)}{2}$

$\Rightarrow$ $x_n = \frac{(n+2)(n+5)}{2}$ верно, тогда т.к это верно для $n \geq 3$, то $\frac{(n+2)(n+5)}{2}$ составное $\Rightarrow$

в пятой изначальной последовательности все x_n для $n \geq 5$: $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} + 1$,

$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} + 1 = \frac{n(n+3)}{2}$ для $n \geq 5$, тогда

$x_{100} = \frac{100 \cdot 103}{2} = 50 \cdot 103 = 5150$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	8	2	2	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2 (продолжение)

Также нужно сказать, что

$2x_{n-1} - x_{n-2} + 1$ – минимальное значение

x_n ; т.к $x_n \in \mathbb{N}$, $x_n > 2x_{n-1} - x_{n-2}$,

для $n \geq 5$ $x_n = \frac{(n+3)(n+1)}{2}$ – составлено

Ответ: $50 \cdot 103 = 5150$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	1	3	7	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	12	20	6	///	78

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Т.к. x_1, x_2 – корни $f(x)$, то $g(x_1) = x_1^2 - 4x_1 - 1 = (x_1^2 - 3x_1 - 1) = -x_1$,

$g(x_2) = -x_2$

Аналогично т.к $x_3\ x_4$ – корни g, то $f(x_3) = x_3, f(x_4) = x_4 \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x_1)^3 f(x_3) + g(x_2)^3 f(x_4) = -(x_1^3 x_3 + x_2^3 x_4)$. Можно считать, что корни x_1 и x_2 поменять местами, получится то же самое, что и если x_3 с x_4 поменять местами.

Пусть $x_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$, $x_2 = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \Rightarrow$ $x_1^3 = 18 + 5\sqrt{13}$, $x_2^3 = 18 - 5\sqrt{13}$

$x_3 x_4 = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$

x_1 – меньший, x_3 – меньший:

$-\left(\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^3 (2-\sqrt{5}) + \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^3 (2+\sqrt{5})\right) = -\left((18-5\sqrt{13})(2-\sqrt{5}) + (18+5\sqrt{13})(2+\sqrt{5})\right) = 36 - 18\sqrt{5} - 10\sqrt{13} + 5\sqrt{65} + 36 + 18\sqrt{5} + 10\sqrt{13} + 5\sqrt{65} = -72 - 10\sqrt{65}$

Пусть теперь x_2 – меньший и x_3 – меньший:

$-\left(\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^3 (2-\sqrt{5}) + \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^3 (2+\sqrt{5})\right) = -\left(36 - 18\sqrt{5} + 10\sqrt{13} - 5\sqrt{65} + 36 + 18\sqrt{5} - 10\sqrt{13} - 5\sqrt{65}\right) = -72 + 10\sqrt{65}$

Заметим, что ~~случай~~ случай x_1 – меньший, x_4 – меньший аналогичен случаю x_2 – меньший, x_3 – меньший, а случай x_2 – меньший, x_4 – меньший аналогичен случаю x_1 – меньший, x_3 – меньший.

Ответ: $-72 - 10\sqrt{65}$, $-72 + 10\sqrt{65}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	1	3	7	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

Назовём число 2 - числом на шаге 0, число 3 - числом на шаге 1. Утверждение „Для $n \geq 1$ число на шаге n равно $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$" докажем по индукции.

~~База: $n=1$: $3 = \frac{(1+1)(1+2)}{2}$ - верно, $n=2$~~

База: $n=1$: $3 = \frac{(1+1)(1+2)}{2}$ - верно

$n=2$: $x_2 = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$

верно, 6 - минимальное составное число, большее $2 \cdot 6 - 3 = 9$

Пусть на шаге $n-2$ нашли a_{n-2}, а на шаге $n-1$ нашли a_{n-1}. Тогда $a_{n-2} = \frac{(n-1)n}{2}$ и $a_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2}$

$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = n(n+1) - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2n^2 + 2n - n^2 + n}{2} =$

$= \frac{n^2+3n}{2}$

Рассмотрим минимальное число, большее a_n:

$a_n + 1 = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 1 = \frac{n^2+3n}{2} + 1 = \frac{n^2+3n+2}{2} =$

$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Заметим, что при $n \geq 4$, a_n является составным. Утверждение доказано. Т. к. $x_0 = 2$, $x_1 = 3$ и т. д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	1	3	7	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

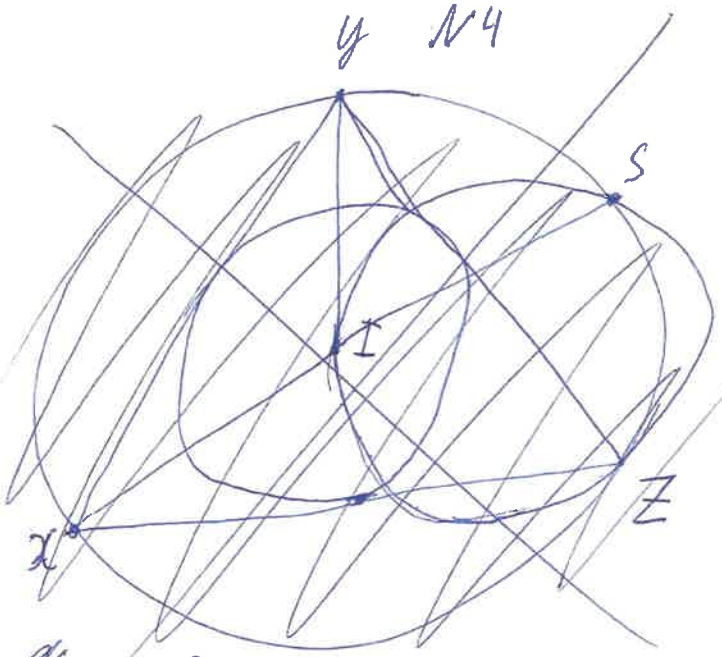
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

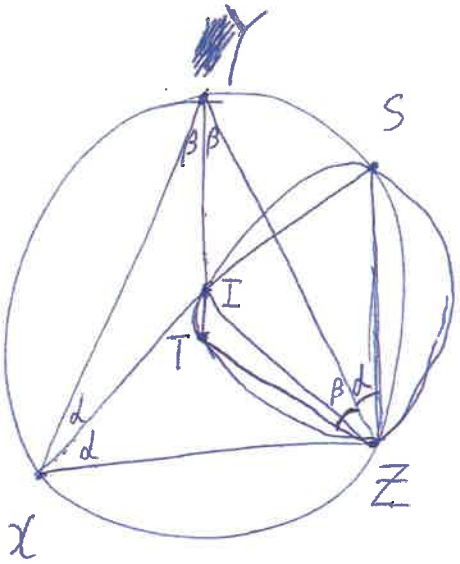
Под номером 99 будет

$$x_{98} = \frac{(98+1)(98+2)}{2} = 99 \cdot 50 = 4950$$

Ответ: 4950

у №4





Д-то: YT = ZT

Центр впис. окр-ти лежит на биссектрисах, тогда XI и YI - биссектрисы, тогда ∠YXS = α,

∠ZYX = 2β, ∠ZXY = 2α

∠XYI = ∠IYZ = β

∠SXY и ∠YZS опираются на одну дугу ⇒

⇒ ∠SXY = ∠YZS (окр-ть XYZ, дуга SY)

SITZ - впис., значит ∠TZS = 180° − ∠TIS ⇒ ∠TZS = ∠XIT,

т.к. ∠TIX = 180 − ∠TIS = ∠TZS.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	1	3	7	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Рассмотрим $\triangle XYI$:

$\angle TIX = \alpha + \beta$ - как внешний угол

тогда $\angle TZS = \alpha + \beta$

получим $\angle TZY = \angle TZS - \angle SZY = \alpha + \beta - \alpha = \beta = \angle TYZ$.

значит $\triangle TYZ$ - равнобедренный с основанием YZ и $TZ = YT$ ч. т. д.

№3

Надо найти кол-во (a, b, c, d) таких, что

$a + b + c + d = 1003$ и есть 2 равных среди (a, b, c, d).

Разобьём на случаи. Будем считать, что $a \le b \le c \le d$ и в каждом случае отдельно учитывать перестановки.

1) $a = b < c < d \Rightarrow c + d = 1003 - 2a \Rightarrow 1 \le a \le 250$ (т.к. $251 + 251 + 252 + 253 > 1003$).

$d + 1 \le c \le \frac{1003 - 2a}{2}$, тогда $c \le 501 - a$. Кол-во вариантов выбора чисел a и c = сумме чисел $(501 - 2a)$ для $a \in [1; 250]$, то есть $(499 + 497 + \ldots + 1) =$

$= \frac{1 + 499}{2} \cdot 250 = 250^2$

Всего существует $P_4 = \frac{4!}{2!} = 12$ перестановок выбранных чисел. Итого $12 \cdot 250^2 = 750000$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	1	3	7	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2) $a < b = c < d$. Получим:

$a + d = 1003 - 2b$

$a \le 249$ (т.к. $250 + 251 \cdot 2 + 252 > 1003$)

$d = 1003 - 2b - a > b$, $3b < 1003 - a$, $b < \frac{1003 - a}{3}$.

целая часть

Получим при $a \vdots 3$: $a + 1 \le b \le 333 - [\frac{a}{3}]$

при $a : 3$: $a + 1 \le b \le 334 - [\frac{a}{3}]$. Тогда общее кол-во вариантов в этом случае

$$P_4 \left(\sum_{a=1}^{249} 333 - [\tfrac{a}{3}] \right) + \sum_{a=1,\, a:3}^{249} 1 - \sum_{a=1}^{249} a =$$

$$12 \cdot \left(249 \cdot 333 + 83 - \frac{249 \cdot 250}{2} - 3 \cdot \sum_{a=1}^{82} a - 83 \right) =$$

$$= 12 \left(249 \cdot 333 - \frac{249 \cdot 250}{2} - 3 \cdot \frac{82 \cdot 83}{2} \right) = 498996$$

3) $a < b < c = d$, получим $a + b = 1003 - 2c$, $1 \le a \le 249$

$(250 + 251 + 252 \cdot 2 > 1003)$

$2c = 1003 - b - a > 2b$

$b \ge a + 1$, $b < \frac{1003 - a}{3}$ $\Rightarrow$ аналогично второму случаю здесь 498996 вариантов

4) $a = b = c < d$, получим $d = 1003 - 3a > a$

$4a < 1003$, $a \le 250$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	1	3	7	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

в данном случае $\overline{P}_4$ перестановок. $\overline{P}_4 = \frac{4!}{3!} = 4$. Каждому значению a соответствует единственное значение c. Следовательно $250 \cdot 4 = 1000$ вариантов.

5) $a < b = c = d$, получим $a = 1003 - 3d < d$, $a \leq 250$

[redacted] Также 4 комбинации для перестановок $\Rightarrow 4 \cdot 250 = 1000$ вариантов

6) $a = b = c = d$

т.к. $1003 \not\vdots 4$, подобное невозможно

значит всего $2000 + 2 \cdot 498996 + 750000 = 1749992$ варианта

№ 5

$(a^3 + b^3) = (abc+1)^2$

Если числа a и b не взаимнопростые, то $a = kx$, $b = ky$, $k = НОД(a;b)$, $НОД(x;y) = 1$. Получим $a^3 + b^3 = k^3(x^3 + y^3) : k$, но $(abc+1)^2$ не кратно k, значит НОД [redacted] $(a;b) = 1$. Без потери общности $a \leq b$.

$a^3 + b^3 = a^2b^2c^2 + 2abc + 1$

$a^3 + b^3 - 1 = abc(abc+2)$

$a^3 - 1 = abc(abc+2) - b^3$

$a^3 - 1 \vdots b$

$b^3 - 1 = abc(abc+2) - a^3$

$b^3 - 1 \vdots a$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	1	3	7	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$b^3 - 1 = ka$

$b^3 = ka + 1$

значит $\sqrt[3]{b} > a$, $a^3 \leq b^3$

Заметим, что $(ab(+1)^2 = a^3 + b^3 \leq 2b^3$,

$ab(+1 \leq \sqrt{2b^3}$, $ab(< \sqrt{2b^3}$, $ac < \sqrt{2b}$

$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = (ab(+1)$

Тогда $НОД(a+b; 3ab) = НОД(a+b, (a+b)^2 - 3ab) =$

$= НОД(a+b, 3ab) = НОД(a+b; 3)$

Значит, $a+b = k^2$ и $a^2 - ab + b^2 = t^2$, либо

$a+b = 3k^2$ и $a^2 - ab + b^2 = 3t^2$

Тогда подходят только $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ (=1 \end{cases}$ и $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ (=1 \end{cases}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

M	A	0	0	0	1	4	3	9	1	2	5

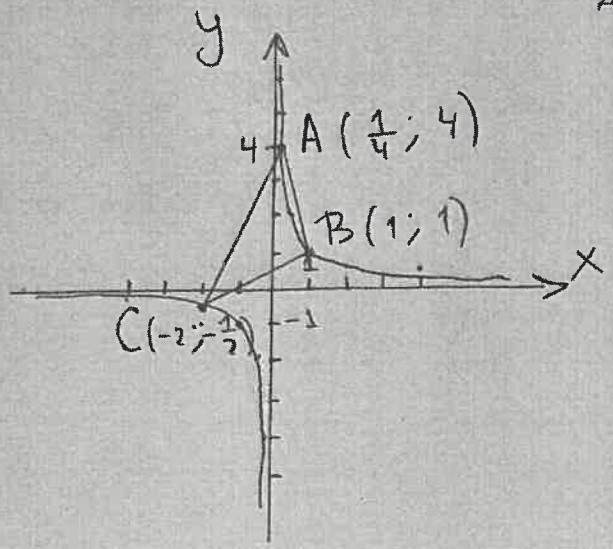
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание № 1.

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	18	20	×	111	~~98~~ 98

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)



$y_1 = k_1 x + b_1$

$y_1 = 2x + b_1$

$y_1(-2) = -\frac{1}{2}$

$2 \cdot (-2) + b_1 = -\frac{1}{2}$

$b_1 = -\frac{1}{2} + 4 = \frac{7}{2} = 3{,}5$

$y_1 = 2x + 3{,}5$

Найдём точку A:

точка A – пересечение y и y_1

$y = y_1 \Rightarrow \frac{1}{x} = 2x + 3{,}5$

$1 = 2x^2 + 3{,}5x$;

$4x^2 + 7x - 2 = 0$.

По методу переброски:

$x^2 + 7x - 8 = 0$;

$x_1 = -8$, $x_2 = 1$.

Значит $x_1 = -2$; $x_2 = \frac{1}{4}$

$y(-\frac{1}{4}) = 4$, $A(\frac{1}{4}; 4)$

$y_2 = k_2 x + b_2$

$y_2 = \frac{1}{2}x + b_2$

$y_2(-2) = -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}(-2) + b_2 = -\frac{1}{2}$

$b_2 = -\frac{1}{2} + 1 = 0{,}5$

Найдем точку B:

точка B – пересечение y и y_2

$y_1 = y_2$;

$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}x + 0{,}5$;

$2 = x^2 + x$;

$x^2 + x - 2 = 0$;

$x_1 = 1$; $x_2 = -2$;

$y(1) = 1$;

$B(1; 1)$

Получили $\triangle ABC$: $A(\frac{1}{4}; 4)$, $B(1; 1)$, $C(-2; -\frac{1}{2})$

Уравнение окружности имеет вид $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	4	3	9	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задание №1. Продолжение

$O(a;b)$ – искомая

Так как окружность описана около $\triangle ABC$, то точки A, B, C принадлежат окружности.

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{4}-a\right)^2+(4-b)^2=R^2 \quad (1) \\ (1-a)^2+(1-b)^2=R^2 \quad (2) \\ (2+a)^2+\left(\frac{1}{2}+b\right)^2=R^2 \quad (3) \end{cases}$$

Вычтем (2) из (1) и (3) из (2):

$$\begin{cases} \frac{1}{16}-\frac{1}{2}a+a^2+16-8b+b^2-1+2a-a^2-1+2b-b^2=0; \\ 1-2a+a^2+1-2b+b^2-4-4a-a^2-\frac{1}{4}-b-b^2=0; \end{cases}$$

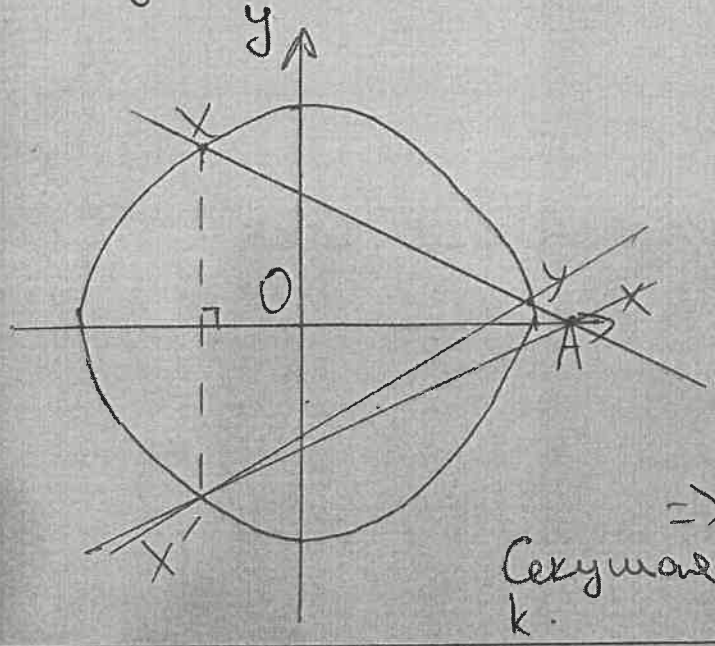
$$\begin{cases} \frac{3}{2}a-6b+\frac{225}{16}=0; \\ -6a-3b-\frac{9}{4}=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24a-96b+225=0; \\ 24a+12b+9=0; \end{cases}$$

$108b=216 \Rightarrow b=2;$

$24a=-33 \Rightarrow a=-\frac{11}{8}$

Ответ: $O\left(-\frac{11}{8};2\right)$

Задание №4



Пусть $O(0;0)$, $A(a;0)$

Уравнение окружности:

$x^2+y^2=k^2$; $k<a$

Уравнение секущей:

$y=kx+b$

Секущая проходит через точку $A \Rightarrow$

$0=ka+b \Rightarrow b=-ka \Rightarrow$

$\Rightarrow y=kx-ka=k(x-a)$

Секущая задаётся коэффициентом k.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

M	A	0	0	0	1	4	3	9	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание №4. Продолжение

Найдём координаты точек X, Y:

Из уравнения окружности:

$\begin{cases} y = \sqrt{R^2 - x^2} \\ y = -\sqrt{R^2 - x^2} \end{cases}$

Не ущемляя общности будем рассматривать верхнюю часть окружности:

Найдём пересечение: $\begin{cases} y = \sqrt{R^2 - x^2} \\ y = k(x-a) \end{cases}$

$k^2(x-a)^2 = R^2 - x^2$

$k^2x^2 - 2k^2xa + k^2a^2 - R^2 + x^2 = 0$

Пусть $D = 4a^2k^4 - 4(k^2+1)(k^2a^2 - k^2) = 4(a^2k^4 - a^2k^4 + k^2k^2 - k^2a^2 + k^2) = 4(R^2k^2 - k^2a^2 + k^2)$;

$D = k^2k^2 - k^2a^2 + k^2$

$x_{1,2} = \frac{2ak^2 \pm 2\sqrt{D}}{2(k^2+1)} = \frac{ak^2 \pm \sqrt{D}}{k^2+1}$;

$y_{1,2} = k(x-a) = k\left(\left(\frac{ak^2 \pm \sqrt{D}}{k^2+1}\right) - a\right)$

Итого: $X(x_1; y_1)$, $Y(x_2; y_2) \Rightarrow X'(x_1; -y_1)$

Прямая OA: $y = 0$. Прямая $X'Y$: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y + y_1}{y_2 + y_1}$

Найдём абсциссу пересечения

$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1}{y_2 + y_1}$; $x - x_1 = \frac{y_1(x_2 - x_1)}{y_2 + y_1}$;

$x = \frac{y_1(x_2 - x_1)}{y_2 + y_1} + x_1$, $x_2 - x_1 = \frac{ak^2 - \sqrt{D} - ak^2 - \sqrt{D}}{(k^2+1)} = \frac{-2\sqrt{D}}{(k^2+1)}$

$y_2 + y_1 = k\left(\left(\frac{2ak^2}{k^2+1}\right) - 2a\right) = \frac{2ak(k^2 - k^2 - 1)}{k^2+1} = -\frac{2ak}{k^2+1}$

$\frac{x_2 - x_1}{y_2 + y_1} = \frac{2\sqrt{D}}{k^2+1} \cdot \frac{k^2+1}{2ak} = \frac{\sqrt{D}}{ak}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	4	3	9	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание №4. Продолжение

$$y_1 \cdot \frac{x_2 - x_1}{y_2 + y_1} = k\left(\left(\frac{ak^2 \pm \sqrt{D}}{k^2+1}\right) - a\right) \times$$

$$\times \frac{\sqrt{D}}{ak} = \frac{ak^2 \pm \sqrt{D}}{k^2+1} \cdot \frac{\sqrt{D}}{a} - a\frac{\sqrt{D}}{a} = \frac{ak^2\sqrt{D} + D}{a(k^2+1)} - \sqrt{D}$$

$$y_1 \cdot \frac{x_2 - x_1}{y_2 + y_1} + x_1 = \frac{ak^2\sqrt{D}+D}{a(k^2+1)} - \sqrt{D} + \frac{ak^2 + \sqrt{D}}{k^2+1} =$$

$$= \frac{ak^2\sqrt{D} + D - ak^2\sqrt{D} - a\sqrt{D} + a^2k^2 + a\sqrt{D}}{a(k^2+1)} = \frac{a^2k^2 + D}{a(k^2+1)}$$

Подставим $D = R^2k^2 - a^2k^2 + R^2$

$$\frac{a^2k^2 + R^2k^2 - a^2k^2 + R^2}{a(k^2+1)} = \frac{R^2(k^2+1)}{a(k^2+1)} = \frac{R^2}{a} = x$$

Итого, точка пересечения: $\left(\frac{R^2}{a}; 0\right)$

Видно, что точка пересечения не зависит от k, следовательно, она не меняется от выбора секущей.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	4	3	9	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

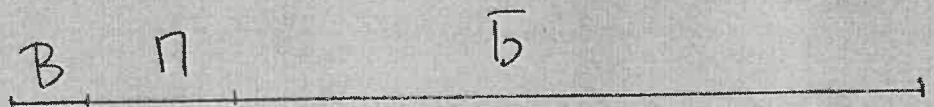
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задание №3.

$S = 1001$, пусть количество орехов, которое собрал каждый из мальчиков: Гоша — Б орехов, Вася — В орехов, Петя — П орехов.



Рассмотрим $Б > П > В$, потом умножим на 2, чтобы учесть случай $Б > В > П$.

Рассмотрим уравнение $Б + В + П = 1001$. Рассадим 1001 орех в ряд, выберем два промежутка между ними и поставим там по черточке. Число способов выбрать два промежутка:

$\frac{1000 \cdot 999}{2} = 499.500$.

Вычтем из этого числа количество случаев, когда среди Б, В, П есть равные.

Пусть $Б = В$, тогда $2Б + П = 1001$, $2Б$ - четное, может меняться от 2 до 1000, от этого следует, что количество ненулевых решений равно:

$\frac{1000-2}{2} = 499$. Аналогично для случаев $Б = П$ или $В = П$.

Итого, $499.500 - 3 \cdot 499 = 498.003$.

Случай $Б = П = В$ невозможен, так 1001 не делится на 3.

Так как нам нужен порядок $Б > П > В$, разделим на количество перестановок трёх элементов: $3! = 6$

При этом нам не важно, $В > П$ или $В < П$, поэтому умножим количество перестановок двух элементов: $2! = 2$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

M	A	0	0	0	1	4	3	9	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Итого, $\frac{498.003}{6} \cdot 2 =$

$= 166.001$

Ответ: 166001.

Задание №2.

$\max y_n - ?$, $y_n = НОД(x_n; x_{n+1})$

$y_n = НОД(n^2+300; n^2+2n+301)$

Найдем y_n по алгоритму Евклида:

$b = n^2+300$, $a = n^2+2n+301$

$a = n^2+2n+301 = (n^2+300) + 2n + 1$

$b = n^2+300 = (2n+1)\cdot\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}n + 300$

$r_1 = 2n+1 = (-\frac{1}{2}n+300)\cdot(-4) + 1201$ (1)

$r_2 = -\frac{1}{2}n + 300 = 1201\left(-\frac{n}{2402}\right) + 300$

$r_3 = 1201 = 300 \cdot 4 + 1$

$r_4 = 300 = 300 \cdot 1 \Rightarrow НОД(a; b) = 1$ в общем случае

Рассмотрим случай (1): если x_n или x_{n+1} кратно 1201, тогда $НОД(x_n; x_{n+1}) = 1201$

Покажем, что такое возможно

$x_n = n^2 + 300 = 1201k$

Пусть $k = 300$, тогда $n^2 = 1201 \cdot 300 - 300 = 1200 \cdot 300 = 4 \cdot 300 \cdot 300 \Rightarrow n = 2 \cdot 300 = 600$.

То есть при $n = 600$: $x_n : 1201$

Из этого следует $НОД(x_n; x_{n+1}) = 1201$

Ответ: y_n максимальное — это 1201.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	1	2	6	6	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	12	20	6	//	78

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1 Рассмотрим $f(x)$ и $g(x)$:

$f(x) = x^2 - 3x - 1 = g(x) + x$; $g(x) = f(x) - x$.

Тогда если x_1 и x_2 - корни $f(x)$, x_3 и x_4 - корни $g(x)$, то

$g(x_1) = x_1^2 - 4x_1 - 1 = f(x_1) - x_1 = -x_1$, т.к. $f(x_1) = 0$

$g(x_2) = x_2^2 - 4x_2 - 1 = f(x_2) - x_2 = -x_2$.

$f(x) = g(x) + x$

$f(x_3) = g(x_3) + x_3 = x_3$

$f(x_4) = g(x_4) + x_4 = x_4$.

Тогда $g^3(x_1) f(x_3) + g^3(x_2) f(x_4) = -x_1^3 x_3 + (-x_2)^3 x_4 =$

$= -(x_1^3 x_3 + x_2^3 x_4)$

$f(x) = 0$: $x^2 - 3x - 1 = 0$

$D = 9 + 4 = 13$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

$g(x) = 0$: $x^2 - 4x - 1 = 0$

$D = 16 + 4 = 20$

$x_{3,4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$

Если $x_1 < x_2$ и $x_3 < x_4$:

$-\left(\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^3 (2-\sqrt{5}) + \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^3 (2+\sqrt{5})\right)$

$\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^3 = \frac{27 - 3 \cdot 9\sqrt{13} + 9 \cdot 13 - 13\sqrt{13}}{8} = \frac{144 - 40\sqrt{13}}{8} = 18 - 5\sqrt{13}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	2	6	6	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^3 = \frac{27 + 27\sqrt{13} + 9\cdot 13 + 13\sqrt{13}}{8} = 18 + 5\sqrt{13}$

Получим:

$-\left((18-5\sqrt{13})(2-\sqrt{5}) + (18+5\sqrt{13})(2+\sqrt{5})\right) = -(36 - 18\sqrt{5} - 10\sqrt{13} + 5\sqrt{65} + 36 + 18\sqrt{5} + 10\sqrt{13} + 5\sqrt{65}) = -(72 + 10\sqrt{65}) = -72 - 10\sqrt{65}$

Если $x_2 < x_1$ и $x_3 < x_4$:

$-\left(\frac{(3+\sqrt{13})^3}{8}(2-\sqrt{5}) + \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^3(2+\sqrt{5})\right) =$

$= -\left((18+5\sqrt{13})(2-\sqrt{5}) + (18-5\sqrt{13})(2+\sqrt{5})\right) =$

$= -(36 - 18\sqrt{5} + 10\sqrt{13} + 36 + 18\sqrt{5} - 10\sqrt{13} - 5\sqrt{65} - 5\sqrt{65}) =$

$= -(72 - 10\sqrt{65}) = -72 + 10\sqrt{65}$

Если $x_1 < x_2$ и $x_3 > x_4$, получим $-72 + 10\sqrt{65}$

Если $x_1 > x_2$ и $x_3 > x_4$, получим $-72 - 10\sqrt{65}$

Ответ: $-72 - 10\sqrt{65}$, $-72 + 10\sqrt{65}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	2	6	6	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2. Пусть на шаге 0 было написано 2, на шаге 1 число 3. Предположим, что число, полученное на шаге с номером n равно $x_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

при $n=1$ $x_1 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$ (верно)

при $n=2$ $x_2 = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$

действительно, 6 - минимальное составное число, большее $2 \cdot 3 - 2 = 4$

при $n=3$ $x_3 = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$

действительно, 10 - наименьшее составное число, большее $2 \cdot 6 - 3 = 9$

Используем метод мат. индукции.

Пусть a_{n-2}, a_{n-1} - числа, полученные на $n-2$ и $n-1$ шаге соответственно, Согласно утверждению, $a_{n-2} = \frac{(n-1)n}{2}$ и $a_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2}$ a_n равно наименьшему составному числу, большему $2a_{n-1} - a_{n-2} = n(n+1) - \frac{n(n-1)}{2} =$

$= n^2 + n - \frac{n^2 - n}{2} = \frac{2n^2 + 2n - n^2 + n}{2} = \frac{n^2 + 3n}{2}$.

Рассмотрим $2a_{n-1} - a_{n-2} + 1 = \frac{n^2 + 3n}{2} + 1 = \frac{n^2 + 3n + 2}{2} =$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	1	2	6	6	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

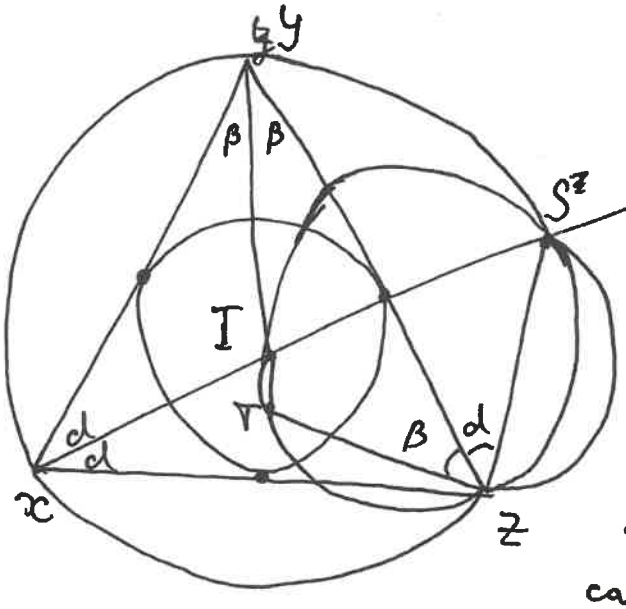
Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Это число будет составным при $n \geq 4$ и оно является наименьшим, большим $2a_{n-1} - a_{n-2}$

Учитывая, что $x_0 = 2$; $x_1 = 3$ и т.д., 99-м появится число: $x_{98} = \frac{(98+1)(98+2)}{2} = 99 \cdot 50 = 4950$

Ответ: 4950

4.



Пусть $\angle yxz = 2\alpha$, $\angle xyz = 2\beta$, $\angle yxS = \alpha$, т.к. $x\bar{I}$ – биссектриса, аналогично $\angle xy\bar{I} = \angle \bar{I}yz = \beta$.

$\angle yzS = \angle yxS$ как вписанные углы окружности (xyz), опирающиеся на дугу yS. Четырёхугольник $S\bar{I}\gamma z$ является вписанным, тогда $\angle \gamma zS = 180^\circ - \angle \gamma \bar{I}S \Rightarrow \angle \gamma zS = \angle \gamma \bar{I}x$. Но из $\triangle xIy$: угол γIx внешний $\Rightarrow \angle \gamma \bar{I}x = \alpha + \beta \Rightarrow \angle \gamma zS = \alpha + \beta$.

$\angle \gamma zy = \angle \gamma zS - \angle yzS = \beta = \angle \gamma yz$, тогда $\triangle y\gamma z$ равнобедренный.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	2	6	6	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Пропишется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

и УТ=ТZ

№3. Пусть $a+b+c+d=1003$, среди чисел a,b,c,d есть 2 равных.

Пусть $a\le b\le c\le d$.

Случай 1. $a=b<c<d$, тогда $c+d=1003-2a$

Заметим, что в этом случае a не может быть >250, т.к. $251+251+252+253>1003$. Значит, $1\le a\le 250$.

$c\ge a+1$, $\frac{1003-2a}{2}=501.5-a$,

Тогда $c\le 501-a$. Тогда выбрав a и c числа b и d определяются единственным образом. Тогда в этом случае будет $\frac{4!}{2}=12$ различных перестановок при выбранных числах a,c. Число a можно выбрать 250 способами, число c для каждого a можно выбрать ещё $(501-2a)$ способами. Тогда в случае 1 получим

$$12\cdot\sum_{a=1}^{250}(501-2a)=12\cdot(499+497+\ldots+1)=12\cdot\frac{1+499}{2}\cdot 250=12\cdot 250^2=750\,000$$

Случай 2 $a<b=c<d$. Тогда $a+d=1003-2b$, а не может быть больше 249, поскольку $250+251\cdot 2+252>1003$. Тогда $d=1003-2b-a>b$, $3b<1003-a$, $b<\frac{1003-a}{3}$, $b\ge a+1$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	2	6	6	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке ниже

Если $a \vdots 3$, то $b < 334 \leftarrow \frac{a}{3}$,

иначе $b < 333 - [\frac{a}{3}]$, где $[\,]$ - целая часть.

Возможных перестановок a, b, c, d тех же 12, и имеем 83 значения a, кратных 3.

Тогда всего

$$12 \cdot \left(\sum_{\substack{a \vdots 3 \\ a \in [1; 249]}} 1 \cdot (1+2+\ldots+249) + \sum_{a=1}^{249} \left(333 - [\tfrac{a}{3}]\right) \right) =$$

$$= 12 \left(249 \cdot 333 + 83 - \frac{249 \cdot 250}{2} - 3 \cdot (1+\ldots+82) - 83\right) =$$

$$= 12(249 \cdot 333 - 249 \cdot 125 - 3 \cdot 41 \cdot 83) = 498996$$

Случай 3. $a < b < c = d$, тогда $a + b = 1003 - 2c$,

$1 \le a \le 249$, т.к. $250 + 251 + 252 \cdot 2 > 1003$, $2c = 1003 - a - b > 2b$

$b \ge a + 1$, $b < \frac{1003 - a}{3}$. Значит, тут, как в случае 2, 498996 вариантов.

Случай 4. $a = b = c < d$

$d = 1003 - 3a > a$; $4a < 1003$, $a \le 250$.

имеем $\frac{4!}{3!} = 4$ перестановки, число d определяется однозначно через a. Тогда $250 \cdot 4 = 1000$ вариантов.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	2	6	6	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Продолжение решения, что записано в этой строчке листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Случай 5. $a<b=c=d$.

$a=1003-3d<d$, $a\le 250$, и переставим

Тогда всего

$4\cdot 250=1000$ вариантов

Случай 6. $a=b=c=d$.

невозможно, $1003\not\vdots 4$

Итог: $200+2\cdot 499996+750000=1749992$ вариантов

№5.

$(a^3+b^3)=(abc+1)^2$.

Пусть $a\vdots d$ и $b\vdots d$, $d\ge 2$, тогда $(a^3+b^3)\vdots d$, но $(abc+1)^2\not\vdots d$,

т.е. a и b не должны иметь общих делителей. Допустим, $a\le b$. Раскрыв скобки получим $a^3+b^3-1=abc(abc+2)$

$a^3-1\vdots b$ и $b^3-1\vdots a$, но

Тогда $\sqrt[3]{b}<a$,

$(abc+1)^2\le 2b^3$, значит, $abc\le\sqrt{2}b\sqrt{2}\Rightarrow ac\le\sqrt{2}b$.

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=(abc+1)^2$.

Тогда $НОД(a+b,\ a^2-ab+b^2)=НОД(a+b,\ 3ab)=НОД(a+b,3)$

Тогда $a+b$ и a^2-ab+b^2 являются полными квадратами либо числами вида $3k^2$. Тогда решением являются только тройки $\begin{cases}a=1\\b=2\\c=1\end{cases}$ $\begin{cases}a=2\\b=1\\c=1\end{cases}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

M	A	0	0	0	1	7	0	0	2	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	X	16	111	76

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1.

1) $x_C = -2$

$C \in y = \frac{1}{x} \Rightarrow y_C = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ **$C(-2; -\frac{1}{2})$**

2) $k_1 = 2$; $k_2 = \frac{1}{2}$

3) $y = 2x + b$

$-\frac{1}{2} = 2(-2) + b$

$b = \frac{7}{2}$

$\begin{cases} y = 2x + \frac{7}{2} \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$

$\frac{1}{x} = 2x + \frac{7}{2}$

$x^2 + \frac{7}{4}x - \frac{1}{2} = 0$

$(x+2)(x - \frac{1}{4}) = 0$

$x_A = \frac{1}{4}$; $y_A = 4$

$A(\frac{1}{4}; 4)$

4) $y = \frac{1}{2}x + b$

$-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(-2) + b$

$b = \frac{1}{2}$

$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$

$x^2 + x - 2 = 0$

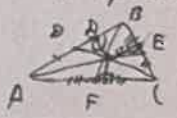
$(x+2)(x-1) = 0$

$x_B = 1$; $y_B = 1$

$B(1; 1)$

5) $A(\frac{1}{4}; 4)$; $B(1; 1)$; $C(-2; -\frac{1}{2})$.

6) найдем ур-ие серединных $\perp$, т.к. их пересечение - середина опис. окр.



7) $D = \frac{A+B}{2}$ $D(\frac{5}{8}; \frac{5}{2})$

8) $E = \frac{B+C}{2}$ $E(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4})$

9) $F = \frac{A+C}{2}$ $F(-\frac{7}{8}; \frac{7}{4})$

10) $k_{AB} = \frac{1-4}{1-\frac{1}{4}} = -4$; $k_{BC} = \frac{-\frac{1}{2}-1}{-2-1} = \frac{1}{2}$; $k_{AF} = \frac{4-(-\frac{1}{2})}{\frac{1}{4}-(-2)} = 2$

11) $DO: y = (-\frac{1}{k_{AB}})x + b$

$y = \frac{1}{4}x + b$

$\frac{5}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} + b \Rightarrow b = \frac{75}{32}$

$DO: y = \frac{1}{4}x + \frac{75}{32}$

12) $EO: y = (-\frac{1}{k_{BC}})x + b$

$y = -2x + b$

$\frac{1}{4} = -2(-\frac{1}{2}) + b$

$b = -\frac{7}{4}$

$EO: y = -2x + \frac{7}{4}$

13) $FO: y = (-\frac{1}{k_{AC}})x + b$

$y = -\frac{1}{2}x + b$

$\frac{7}{4} = -\frac{1}{2}(-\frac{7}{8}) + b$

$b = \frac{21}{16}$

$FO: y = -\frac{1}{2}x + \frac{21}{16}$

14) $\begin{cases} y = \frac{1}{4}x + \frac{75}{32} \\ y = -2x + \frac{7}{4} \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{21}{16} \end{cases}$

из 1 и 2 найдем x_0; y_0, а

в 3 проверим $\Rightarrow$

$\frac{1}{4}x_0 + \frac{75}{32} = -2x_0 + \frac{7}{4}$

$\frac{9}{4}x_0 = -\frac{9}{32}$

$x_0 = -\frac{1}{8}$; $y_0 = 2$

15) проверка: $2 = -\frac{1}{2}(-\frac{1}{8}) + \frac{21}{16} = 2$

Ответ: $O(-\frac{1}{8}; 2)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	7	0	0	2	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2.

$n \in N$

$x_n = n^2 + 300$

$y_n = НОД(x_n, x_{n+1})$

$\max y_n = ?$

вычтем свойства НОД:

$НОД(a,b) = НОД(a \pm b, b)$

$НОД(a, 2b+1) = НОД(2a, 2b+1)$

$x_n = n^2 + 300$

$x_{n+1} = (n+1)^2 + 300 = n^2 + 2n + 301$

$y_n = НОД(n^2+300; n^2+2n+301) = НОД(n^2+300, n^2+2n+301-n^2-300) = НОД(n^2+300, 2n+1) = НОД(2n^2+600, 2n+1) = НОД(2n^2+600 - n(2n+1), 2n+1) =$

$= НОД(600-n, 2n+1) = НОД(1200-2n, 2n+1) = НОД(1200-2n+2n+1, 2n+1) =$

$= НОД(1201, 2n+1)$.

Число 1201 - простое $\Rightarrow$ у него равно 1, либо 1201. Так как нас интересует max y_n, то найдем явный пример для $y = 1201$. Тогда:

$1201 : 2n+1$

$n = 600$

$x_{600} = 600^2 + 300 = 360300$

$x_{601} = 601^2 + 300 = 600^2 + 2 \cdot 600 + 301 = 361501$

$x_{600} : 1201 = 360300 : 1201 = 300$

$x_{601} : 1201 = 361501 : 1201 = 301$

300 и 301 - взаимно простые

Ответ: $y_{600} = 1201$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	7	0	0	2	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

Боря - Б; Вася - В; Петя - П

Б + В + П = 1001

Б - x; В - y; П - z

$$\begin{cases} x+y+z=1001 \\ x,y,z \geq 0 \\ x \neq y \neq z \\ x>y, x>z \end{cases}$$

1) Сначала найдем количество разбиений числа 1001 на 3 ненулевых:

$$\frac{(1001-1)!}{2!\cdot(1001-1-2)!} = \frac{1000!}{2!\cdot 998!} = \frac{999\cdot 1000}{2} = 499500$$

2) теперь найдем количество случаев, когда какие-то 2 числа равны друг другу:

$x = y \Rightarrow 2x + z = 1001$

$x = \frac{1001 - z}{2}$

$x \in [1; 500] \Rightarrow$ 500 вариантов для $y = z$ и $x = z$ аналогично $\Rightarrow$ всего комбинаций когда какие-то 2 числа равны:

$3 \cdot 500 = 1500$

$499500 - 1500 = 498000$

3) варианты, где все 3 числа равны быть не может, т.к. 1001 ~~т.3 не равно 0~~ не делится на 3.

4) получили 498000 упорядоченных троек различных чисел (x, y, z), теперь надо учесть, что у Бори больше всех $\Rightarrow$ $x > y, x > z$. Из всех шести перестановок 3 чисел только в двух x на первом месте $\Rightarrow$ только $\frac{1}{3}$ всех комбинаций подходит: $\frac{498000}{3} = 166000$.

Ответ: 166000

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

M	A	0	0	0	1	7	0	0	2	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

$n, m \in N$

$m > n$

$\frac{3^m+2}{3^n+2} \in Z$

доказать: $m > n^2$

1) $\frac{3^m+2}{3^n+2} = K$

$3^m+2 = 3^n K + 2K$

$3^m - 3^n \cdot k = 2(K-1)$

$3^n(3^{m-n} - k) = 2(K-1)$

2) 2 не кратно $3^n \Rightarrow K-1$ кратно $3^n \Rightarrow m-n(n-2) > 2n$

$K-1 \vdots 3^n$

$K \vdots 3^n+1$

3) $3^m+2 = (3^n+2)\cdot k$

$3^m+2 \vdots (3^n+2)\cdot(3^n+1)$

$3^m+2 \vdots 3^{2n} + 3\cdot 3^n + 2$

$3^m \vdots 3^{2n} + 3^{n+1} > 3^{2n}$

$m > 2n$

4) теперь рассмотрим $\frac{3^{m-n}+2}{3^n+2} = K \in Z$.

$3^{m-n}+2 = 3^n \cdot K + 2K$

$3^n \cdot (3^{m-2n} - K) = 2(K-1)$

5) $K-1$ кратно 3^n (из 2)

$K \vdots 3^n+1$

$3^{m-n}+2 \vdots (3^n+2)\cdot(3^n+1)$

$3^{m-n} \vdots 3^{2n} + 3^{n+1} + 6 \Rightarrow m-n \geq 2n \Rightarrow m \geq 3n$, продолжим подобные шаги и придем к: $\frac{3^{m-n(n-2)}+2}{3^n+2} = K \in Z$.

6) $\frac{3^{m-n(n-2)}+2}{3^n(3^{m-n(n-2)} - K)} = 2(k-1)$

7) $(k-1)$ кратно $3^n \Rightarrow K \geq 3^n+1$

$3^{m-n(n-2)}+2 \geq (3^n+2)(3^n+1)$

$3^{m-n(n-2)} \geq 3^{2n} + 3^{n+1} + 1 > 3^{2n}$

$m-n(n-2) > 2n$

8) $m \geq n(n-2)+2n \Rightarrow$

$m > n^2$, что.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	2	6	4	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	16	20	0	///	76

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1.

$x^2 - 2x - 1 = 0$

$\sqrt{D} = 2\sqrt{2}$

$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$x^2 - 3x - 1 = 0$

$\sqrt{D} = \sqrt{13}$

$x_{3/4} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

Заметим, что $f(x) - x = g(x)$

Тогда выражение

$(g(x_1))^3 \cdot f(x_3) + (g(x_2))^3 \cdot f(x_4) =$

$= (f(x_1) - x_1)^3 \cdot f(x_3) + (f(x_2) - x_2)^3 \cdot f(x_4)$

$f(x_1) = f(x_2) = 0$, тогда $(f(x_1) - x_1)^3 = -x_1^3$, т.к. остальные множители содержат $f(x_1) = 0$.

Аналогично и $(f(x_2) - x_2)^3 = -x_2^3$.

Т.к. $g(x) + x = f(x)$, то и $f(x_3) = g(x_3) + x_3 = x_3$,

$f(x_4) = g(x_4) + x_4 = x_4$

Тогда выражение выходит так:

$-x_1^3 \cdot x_3 - x_2^3 \cdot x_4$, тогда рассмотрим два возможных случая (остальные симметричны):

1) $x_1 = 1 + \sqrt{2}$, $x_2 = 1 - \sqrt{2}$, $x_3 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$, $x_4 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$

$-((1 + \sqrt{2})^3 \cdot \frac{3 + \sqrt{13}}{2} + (1 - \sqrt{2})^3 \cdot \frac{3 - \sqrt{13}}{2}) =$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	2	6	4	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

~~ответ: $\frac{33+11\sqrt{13}+15\sqrt{2}+5\sqrt{26}}{2}$~~

$= -\left(\frac{21+7\sqrt{13}+15\sqrt{2}+5\sqrt{26}}{2}, \frac{21-7\sqrt{13}-15\sqrt{2}+5\sqrt{26}}{2}\right)$

$= -21-5\sqrt{26}$

2) $x_1 = 1+\sqrt{2}$, $x_2 = 1-\sqrt{2}$, $x_3 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$, $x_4 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

$-\left((1+\sqrt{2})^3\cdot\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) + (1-\sqrt{2})^3\cdot\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\right) =$

$= -\left(\frac{21-7\sqrt{13}+15\sqrt{2}+5\sqrt{26}}{2} + \frac{21+7\sqrt{13}-15\sqrt{2}-5\sqrt{26}}{2}\right)$

$= -21+5\sqrt{26}$

Ответ: $-21-5\sqrt{26}$ или $-21+5\sqrt{26}$.

№2

Пп. и $x_1=4$, $x_2=6$, тогда $x_3=9$, $x_4=14$, $x_5=20$...

Докажем при помощи мат. индукции, что при $n\geq 3$ $x_n = \frac{n(n+3)}{2}$

Б База: при $n=3$ $x_3 = \frac{3\cdot 6}{2} = 9$, - верно

П Предположение: пусть для всех n от 3 до k $x_n = \frac{k(k+3)}{2}$.

П Переход: докажем, что и для $n=k+1$ $x_{k+1} = \frac{(k+1)(k+4)}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	2	6	4	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Приведется только то, что написано в рамке ответа

По условию $2x_{k-1} - x_{k-2} < x_k$

Тогда $x_{k+1} > \frac{2(k+3)\cdot k}{2} - \frac{(k-1)(k+2)}{2}$

$x_{k+1} > \frac{2k^2+6k-k^2-k+k+2}{2}$

$x_{k+1} > \frac{k^2+5k+2}{2} \Rightarrow x_{k+1} \geq \frac{k^2+5k+2}{2} + 1 = \frac{(k+1)(k+4)}{2}$

Заметим, что число $\frac{(k+1)(k+4)}{2}$ точно не составное, т.к. $k+1 \geq 4 \Rightarrow$ это число является произведением каких-то двух чисел больших 1, то есть точно не является простым.

Тогда $x_{k+1} = \frac{(k+1)(k+4)}{2}$ обладательно.

Что и требовалось доказать.

Тогда $x_{100} = \frac{100\cdot 103}{2} = 50\cdot 103 = 5150$

Ответ: 5150.

№3

Пусть у нас есть 1001 шар и мы делим их группы из этих шаров, хотя бы 2 из которых равны по величине. Это известный всем метод шаров и перегородок. Хотя бы 2 равные группы мы будем делать так:

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	2	6	4	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

условию, мы возьмем наши шары в ряд.
Мы выбираем четные числа шаров в самом начале (большее число), это и будет две одинаковые группы, а остальные шары как-то делим одной перегородкой.
Как мы расположим все возможные варианты, убедимся, что никакого варианта нет дважды.
Заметим, что наши шаров нечетное, поэтому и равные группы возникнуть не могут, то есть их либо 1, либо 3. Также и две одинаковые группы из них не быть не могут.
Итого во всех случаях у нас есть только 1 группа, которая по величине группы, никакая другая равной быть не может, то есть этот вариант только единственный.
Посчитаем кол-во вариантов: мы ставим первую перегородку (для 2 равных групп) после $2k$-того шара, где $k = 1, 2, 3, \dots, 499$. У нас остается еще $1000-2k$ перегородок, из которых мы можем выбрать любую, то есть $(1000-2k)$ $= 1000-2k$, а перегородка, делящая на 2 равные группы среди шаров в начале определена однозначно. То есть кол-во вариантов это $\sum_{k=1}^{499}(1000-2k)$ - сумма всех наших вариантов, где $k = 1, 2, 3, \dots, 499$ равно это

$998+996+\dots+4+2 = 2(1+2+3+\dots+499) = 2 \cdot \frac{499 \cdot 500}{2} = 499 \cdot 500$

$= 249500$ вариантов

Ответ: 249500 наборов

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

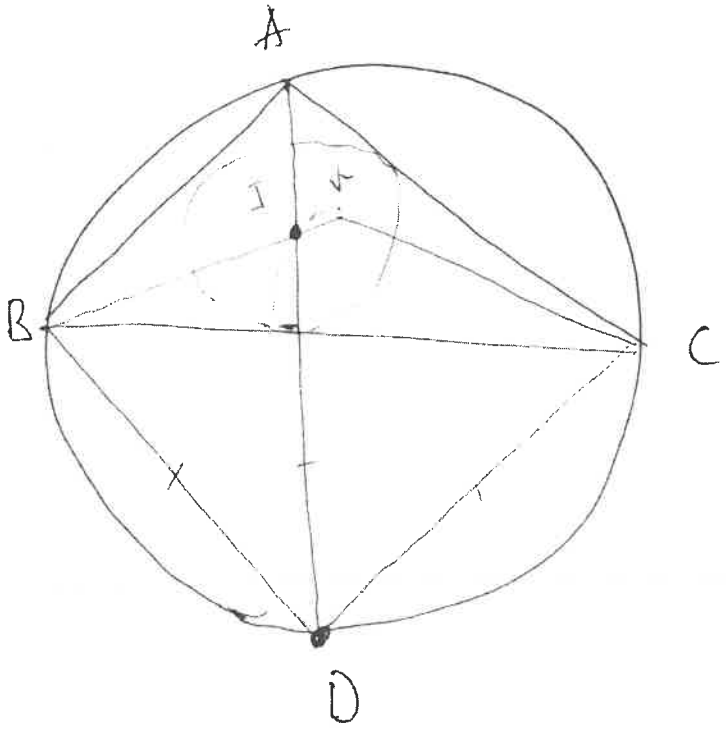
М	А	О	О	О	1	2	6	4	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)



1) По лемме Мансионьона (лемме о курительной трубке) $BD = DI = DC$

2) Рассмотрим треугольники $\triangle BDK$ и $\triangle DKC$

2.1. Сторона DK у этих треугольников общая. $BD = DC$ по лемме.

2.2. Т.к. $DIKC$ - вписанный, то $\angle DCK = \angle BID$, т.к. $\angle DCK + \angle DIK = 180°$ и $\angle DIK + \angle BID = 180°$

А $\angle BID = \angle IBD$, т.к. $BD = DI$, $\triangle BDI$ - р/б

3) Т.к. $\angle CBD = \angle BCD$, т.к. D - середина дуги BC и $\angle KBD = \angle KCD \Rightarrow \angle KBC = \angle KCB$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	2	6	4	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Приверяется только то, что записано с этой стороны листа и только в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

т.к. $\angle KBC = \angle KBD - \angle CBD$
$= \angle KCD - \angle BCD = \angle KCB$

Пусть в треуг. $\triangle BKC$ $\angle KBC = \angle KCB \Rightarrow$

он равнобедренный $\Rightarrow BK = KC$

Что и требовалось доказать.

№ 5.

Если $a^3 + b^3 = (abc-1)^2$

$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = (abc-1)^2$

Ответ: $(a+b) \mid (abc-1)^2$

$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = k^2(a+b)$

$a^2 - ab + b^2 = k^2(a+b) \Rightarrow a^2 - ab + b^2 \vdots a+b$

$\Rightarrow$ при k $(a+b)^2 \vdots a+b$ при и $\forall a$

$(a+b)^2 - (a^2 - ab + b^2) = 3ab \vdots a+b$

Если a и b - делятся на $3ab \vdots a+b$, тогда a и b не могут быть взаимно простыми, что не может быть.

$(ab(c-1))^2 \vdots a+b$, но $(abc-1, a) = 1$, $(abc-1, b) = 1$

тогда $(a, b) = 1$.

Можно рассмотреть наше уравнение как кубическое, относительно a, со старш. коэфф. $= 1$, откуда получить противоречие

Ответ: таких пар нет.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	7	3	2	8	2	5

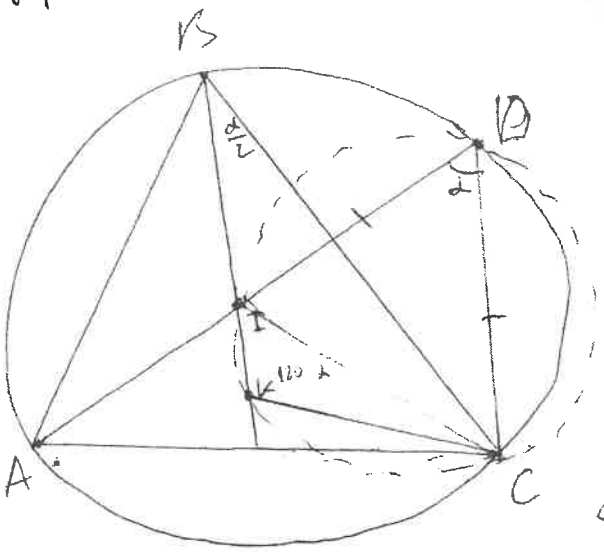
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Приведена только та информация, которая записана в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
8	20	20	20	6	//	74

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4



Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда

$\angle APC = \alpha$, т.к. опираются на одну дугу $\overset{\frown}{AC}$;

$\angle IBC = \frac{\alpha}{2}$, т.к. BI - биссектриса.

$\angle IKC = 180 - \alpha$, т.к. противоположен $\angle IPC = \alpha$

рассмотрим $\triangle KBC$, в нем

$\angle BKC = 180 - \alpha$, $\angle KBC = \frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow \angle BCK = 180 - 120 + \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow$ в $\triangle BKC$ $\angle KBC = \angle BCK \Rightarrow$ он р/б $\Rightarrow BK = KC$

№1

$x^2 - 2x - 1$

$D = 4 + 4 = 8$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} \\ x_2 = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} \end{array}\right.$

Подставим эти в $g(x)$

1) $(1-\sqrt{2})^2 - 3(1-\sqrt{2}) - 1 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 - 3 + 3\sqrt{2} - 1$

$= \sqrt{2} - 1$

2) $(1+\sqrt{2})^2 - 3(1+\sqrt{2}) - 1 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 3 - 3\sqrt{2} - 1$

$= -\sqrt{2} - 1$

Посчитаем $g(x_1)^3$ и $g(x_2)^3$

$(\sqrt{2}-1)^3 = 2\sqrt{2} - 3 \cdot 2 + 3\sqrt{2} - 1 = 5\sqrt{2} - 7$

$-(\sqrt{2}+1)^3 = -(2\sqrt{2} + 6 + 3\sqrt{2} + 1) = -5\sqrt{2} - 7$

Рома $x^2 - 3x - 1$

$D = 9 + 4 = 13$

$\left[\begin{array}{l} x_3 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \\ x_4 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$

Посчитаем $f(x_3)$; $f(x_4)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	7	3	2	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$f(x_3) = \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) - 1$

$= \frac{9+2\sqrt{13}+13}{2} - 3 - \sqrt{13} - 1 = 11 + \sqrt{13} - 3 - \sqrt{13} - 1 = 7$

$f(x_4) = \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) - 1$

$= \frac{9+13-2\sqrt{13}}{2} - 3 + \sqrt{13} - 1 = 11 - \sqrt{13} - 4 + \sqrt{13} = 7$

Не важно какой из x_3 или x_4 мы подставим, там получ. одно и тоже.

Тогда

$(5\sqrt{2}-7)\cdot 7 + (-5\sqrt{2}-7)\cdot 7 = 7(\sqrt{2}\cdot 5 - 7 - 5\sqrt{2} - 7) = 7 \cdot -14 = -98$

Ответ: -98.

№2

По индукции докажем, что начиная с пятого числа, число $x_i = 2x_{i-1} - x_{i-2} + 1$ будут составными и очевидно, что наименьшим составным больше $2x_{i-1} - x_{i-2}$

тогда $x_5 = 28 - 9 + 1 = 20$

база при $i=5$

Предполож: $i = k-1$; Заметим, что тогда $x_5 = 14 + 6$,

$x_7 = 16 + 6 + 7$, $x_8 = 14 + 6 + 7 + 8$

$x_i = 14 + \frac{(i+2)(i+1)}{2} - 15 = \frac{(i+2)(i+1)}{2} - 1$.

Докажем что это число составное:

под одним чисел $i+2$ или $i+1$ - четное, пусть

$i+1 = 2y$, тогда $2y+1 \equiv y \bmod y+1$

$x_i = y(2y+1) - 1$

$y \equiv -1 \bmod y+1 \Rightarrow x_i \equiv 0 \bmod y+1$ аналогичен случай при $i+2 = 2y$.

и $x_i > y+1$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	7	3	2	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа

4 значит, что

$X_{100} = \frac{102 \cdot 101}{2} - 1$

$X_{100} = 51 \cdot 101 - 1$

Ответ: $51 \cdot 101 - 1$

№3

Пусть ~~число~~ в сумме есть хотя бы 2 равные числа, тогда его можем представить как

$2a + b + c = 1001$.

$a \in [1; 499]$, заметим что кол-во разбиений чисел $1001 - i$ и $1001 - 499 + i$ равна 500, к примеру при $a = 1$

$b + c = 999$

и при $a = 499$

$b + c = 3$

кол-во разбиений здесь в сумме 500.

аналогично для всех пар i и $499 - i$

Понятно, что никакие одинаковые наборы мы не посчитали потому что ~~для определённого a~~: пусть

$2a_1 + b_1 + c_1 = 1001$

и

$2a_2 + b_2 + c_2 = 1001$, ~~тогда~~

при $a_1 \neq a_2$ мы не можем посчитать эти наборы 2 раза, ведь тогда $2a_2 = b_1 + c_1 \Rightarrow 2a_1 + 2a_2 = 1001$

$\Rightarrow$ что все наборы мы посчитали только один раз

Ответ $499 \cdot \frac{500}{2} = 499 \cdot 250$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

И	А	0	0	0	1	7	3	2	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамках строки

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

$a^3+b^3=(abc-1)^2$

рассмотрим какие остатки дают кубы по mod 4

$1^3 \equiv 1 \bmod 4$
$2^3 \equiv 0 \bmod 4$
$3^3 \equiv 3 \bmod 4$
$4^3 \equiv 0 \bmod 4$
$5^3 \equiv 1 \bmod 4$
$6^3 \equiv 0 \bmod 4$
$7^3 \equiv 3 \bmod 4$

; а квадраты чисел всегда сравнимы с 0; 1 mod 4.

если $(abc-1)^2 \equiv_4 0$, то $a^3+b^3 \equiv_4 0$

но при этом $a^3 \not\vdots 2$ и $b^3 \not\vdots 2$, ведь тогда

$abc-1 \not\vdots 2 \Rightarrow a^3 \equiv_4 1$ и $b^3 \equiv_4 3$

пусть — или наоборот,

тогда $a=2m$, $b=4k+1$

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=(abc-1)^2$

$(2m+4k+1)(4m^2-2m(4k+1)+(4k+1)^2)=(abc-1)^2$

$\equiv_4 2m+1$ $\equiv_4 2m+1$ $=((4k+1)2mc-1)^2$

то есть эти две скобки дают одинаковый остаток по модулю 4, но очевидно по нер-ву коши, что $a+b \le a^2-ab+b^2$. поэтому единственный возможный случай, это когда две скобки равны, ведь в левую скобку все множители входят в четной степени.

$a+b=a^2-ab+b^2 \Rightarrow (a;b)=(2,1);(1,2)$

$9=(2c-1)^2 \Rightarrow c=2$

Ответ: $(2,1,2),(1,2,2)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	0	5	4	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

1	2	3	4	5	6	Σ
20	12	20	20	2	1111	74

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$a + b + c + a = 1001$

1) Вначале посчитаем количество таких наборов будем последовательно брать два равных числа и считать количество наборов с ними

$\underbrace{1\ 1}_{2}\ \underbrace{_\ _}_{998} = 1001$; 499 наборов (также подберем оставшиеся 2 числа, но уже необязательно равные

$a + b = 499$

1 498
2 497
...
499 500

$\Big\} \Rightarrow 499$ наборов

аналогично

2 2 ; 498 наборов

3 3 ; 497 наборов

4 4 ; 496 наборов

...

498 498 ; 2 набора

499 499 ; 1 набор

посчитаем сколько таких наборов в сумме:

~~$\frac{498+1}{2} \cdot 249$~~

$\frac{498+1}{2} \cdot 498 + 250 = 250 \cdot 499 = 124750$ наборов

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 | 4 | 6 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3 (продолжение)

2) докажем, что при таком подсчете никакой набор мы не посчитали два раза: рассмотрим общий случай

$\underbrace{a}_{2} + \underbrace{a}_{2} + \underbrace{b}_{1} + \underbrace{c}_{1} = \underbrace{1001}_{4}$ значит: $b \neq c$, однако есть случаи когда $b=a \vee c=a$

В результате, если в нашем наборе 3 числа равны между собой, то четверное всегда будет отлично от них и в след. раз такие 3 числа никогда не окажутся в наборе, т.к. мы возьмем след. два равных числа „a" и останется подобрать еще 2 числа (a надо 3 раза, чтобы был повтор) $\Rightarrow$ 3 числа никогда не повторятся (равных числа). Рассмотрим варианты повтора двух равных чисел в каком-нибудь из следующих наборов.

$a + a + b + c$ (В тот момент, когда мы уже взяли два равных числа, оставшиеся два равные быть не могут (док-но выше через четность).

Значит из чисел „b", „c" в лучшем случае какое-то окажется равна „a" в одном из наборов с конкретными „a", а в след. раз с другими „a" мы возвращаемся к началу рассуждения про повтор двух чисел. ∎

Ответ: 124750

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	0	5	4	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 1

~~По ТВ делал сокращ.~~

$f(x)$ По схеме Горнера:

$(x-x_1)(x-x_2)=f(x)$

$(x-x_3)(x-x_4)=g(x)$

$x_{12}=\frac{2\pm\sqrt{4+4}}{2}=1\pm\sqrt{2}$

$x_{34}=\frac{3\pm\sqrt{9+4}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

Варианты распределения:

I: $\begin{cases} x_1=1+\sqrt{2} \\ x_2=1-\sqrt{2} \end{cases}$ II: $\begin{cases} x_3=1-\sqrt{2} \\ x_4=1+\sqrt{2} \end{cases}$

III: $\begin{cases} x_3=\frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ x_4=\frac{3-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$ IV: $\begin{cases} x_3=\frac{3-\sqrt{13}}{2} \\ x_4=\frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$

Всего максимум может быть 4 значения выражения

$(g(x_1))^3 f(x_3)+(g(x_2))^3 f(x_4)$

~~2~~ посчитаем $g(x_1)$; ~~3~~ $g(x_2)$; $f(x_3)$; $f(x_4)$

$(g(1-\sqrt{2}))^3=((1-\sqrt{2})^2-3(1-\sqrt{2})-1)^3=(1-2\sqrt{2}+2-3+3\sqrt{2}-1)^3=$

$=(\sqrt{2}-1)^3=5\sqrt{2}-7$

$g(1+\sqrt{2}))^3=((1+\sqrt{2})^2-3(1+\sqrt{2})-1)^3=(1+2+2\sqrt{2}-$

$-3-3\sqrt{2}-1)^3=(-1-\sqrt{2})^3=-5\sqrt{2}-7$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	0	5	4	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1 (продолжение)

$f\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) = \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^2 - \frac{3-\sqrt{13}}{2}\cdot 2 - 1 = \frac{-\sqrt{13}-3}{2}$

$f\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) = \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^2 - \frac{3+\sqrt{13}}{2}\cdot 2 - 1 = \frac{\sqrt{13}+3}{2}$

подставим все 4 варианта:

$\Rightarrow (g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4) = y$

$\begin{cases} \text{I} \\ \text{III} \end{cases}$ $y' = (-5\sqrt{2}-7)\cdot\frac{\sqrt{13}-3}{2} + (5\sqrt{2}-7)\cdot\frac{-\sqrt{13}-3}{2} =$

$= 21 - 5\sqrt{26}$

$\begin{cases} \text{I} \\ \text{IV} \end{cases}$ $y'' = (-5\sqrt{2}-7)\cdot\frac{-\sqrt{13}-3}{2} + (5\sqrt{2}-7)\frac{\sqrt{13}-3}{2} =$

$= 21 + 5\sqrt{26}$ остальные два аналогично:

$\begin{cases} \text{II} \\ \text{III} \end{cases}$ $y''' = y' = 21 - 5\sqrt{26}$

$\begin{cases} \text{II} \\ \text{IV} \end{cases}$ $y'''' = y'' = 21 + 5\sqrt{26}$

в этих случаях ничего не меняется кроме расположения слагаемых

Ответ: $\{21+5\sqrt{26};\ 21-5\sqrt{26}\}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	0	5	4	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

Сначала рассмотрим чет. и нечет. числа a, b, c

Ч - четная; Н - нечетная

- если a ∧ b - чет., то $Ч^3+Ч^3=(Ч\cdot Ч\cdot c-1)^2 \Leftrightarrow$
  $Ч=(Ч-1)^2 \Leftrightarrow Ч=Н$!? при любом c
- если a ∧ b - нечетн., то $Н^3+Н^3=(Н\cdot Н\cdot c-1)^2 \Leftrightarrow$
  $Ч=(Н\cdot c-1)^2$ - истина при c - нечетн.
- если a и b разной четности, то $Н^3+Ч^3=(Н\cdot Ч\cdot c-1)^2 \Leftrightarrow$
  $Н=(Ч\cdot c-1)^2$ - истина при любом c

числа a и b взаимно заменимы

заменим $(abc-1)^2$ на z для удобства

$a^3+b^3=z^2$

подберем такие a, b, z, но чтобы выполнялось условие четности;

1) $1^3+2^3=3^2$

~~2)~~

(I) a=1, b=2, c=2

(II) a=2, b=1, c=2

Ответ: (1; 2; 2); (2; 1; 2)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	0	5	4	6	2	5

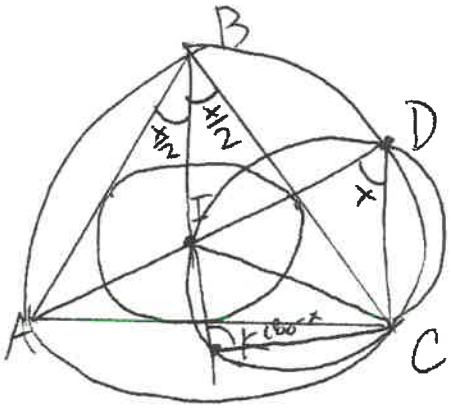
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4



• $\angle ABC = x$

Тогда $\angle ADC = x$

($\angle ABC = \angle ADC$, оба опираются на дугу AC)

• По необх. и дост. условию вписанного ч-х угольника вписан, в окр.:

$\angle CKI = 180 - \angle CDI =$

$= 180 - x$

• BI - бисс. $\triangle ABC$

По опр. бисс:

$\angle IBC = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2}x$

• $\triangle BCK$:

$\angle BCK = 180 - \angle CKB - \angle KBC = 180 - 180 + x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x$

~~$\triangle BCKB$~~:

$\angle KBC = \angle BCK = \frac{1}{2}x \Rightarrow$ по ~~опр.~~ признаку $\triangle KCB$ - р/б треуг.

По опр. р/б треуг.: $|BK| = |CK|$

Ч.т.д.

Лист 6 из 7

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	0	5	4	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

рассмотрим последовательность x_n

$x_1 = 4$

$x_2 = 6$

$x_3 = 9$) 5

$x_4 = 14$)

$x_5 = 20$) 6

$x_6 = 27$) 7

$x_7 = 35$) 8

$x_8 = 44$) 9

$x_9 = 54$) 10

$x_{10} = 65$) 11

$x_{11} = 77$) 12

от x_3 до x_{100} - 96 чисел; 97 прибавляются

каждое больше предыдущего по

причине возрастания разности

на 1 в отличие от

предпредыдущего и предыдущего

почему?

тогда $x_{100} = x_3 + (5+6+7+8+\ldots) =$

$5+6+\ldots+97$

$= x_3 + \frac{101+5}{2} \cdot 96 + 53 =$

$= 9 + 53 \cdot 96 + 53 =$

$= 5 + 53 \cdot 97 =$

$= 5 + 5141 = 5150$

Ответ: 5150

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 | 7 | 0 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	12	20	2	///	74

Данный бой шифр заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1. $f(x) = x^2 - 4x - 1$

$x^2 - 4x - 1 = 0$

$D = 16 + 4 = 20$

$x_{1;2} = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$

$g(x) = x^2 - 5x - 1$

$x^2 - 5x - 1 = 0$

$D = 25 + 4 = 29$

$x_{3;4} = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}$

Тогда можно заметить, что

① По Виету: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4; \\ x_1 \cdot x_2 = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 + x_4 = 5; \\ x_3 \cdot x_4 = -1 \end{cases}$ ✗

② И следующее равенство $x_1^2 - 5x_1 - 1 = x_1^2 - 4x_1 - 1 - x_1 = -x_1$

$x_2^2 - 5x_2 - 1 = -x_2$

$x_3^2 - 4x_3 - 1 = x_3^2 - 5x_3 - 1 = x_3$

и аналогично

$x_4^2 - 4x_4 - 1 = x_4 \Rightarrow$

Получаем: $g(x_1)^3 \cdot f(x_3) + g(x_2)^3 \cdot f(x_4) = -x_1^3 \cdot x_3 - x_2^3 \cdot x_4$

При этом $x_1^2 = 4x_1 + 1 \Rightarrow x_1^3 = 4x_1^2 + x_1 = 4(4x_1 + 1) + x_1$

$= 17x_1 + 4$

Также получаем и $x_2^3 = 17x_2 + 4$

$-(x_1^3 x_3 + x_2^3 x_4) = -(17x_1x_3 + 17x_2x_4 + 4(x_3 + x_4)) =$

$= -(17(x_1x_3 + x_2x_4) + 20) = -20 - 17(x_1x_3 + x_2x_4)$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} -20 - 17(\sqrt{5}+2) \cdot \left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right) + \left(\frac{2-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right) \\ -20 - 17\left((2-\sqrt{5})\left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right) + (2+\sqrt{5})\left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right)\right) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -20 - 17 \cdot (10 + \sqrt{36,25}) \\ -20 - 17 \cdot (10 - \sqrt{36,25}) \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} -190 - 17\sqrt{36,25} \\ -190 + 17\sqrt{36,25} \end{bmatrix}$ Ответ: $-190 - 17\sqrt{36,25}$; $-190 + 17\sqrt{36,25}$

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 | 7 | 0 | 2 | 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

3. $x_1+x_2+x_3+x_4=1005$

1) Сразу можно заметить, что не может быть такого, когда $x_1=x_2=x_3=x_4$ т.к. тогда должно выполняться равенство $4x_1=1005$, но $1005 \nmid 4$

Аналогично со случаем, когда $x_1=x_2$ и $x_3=x_4$ Потому что $1005 \neq 2x_1+2x_3$ т.к. 1005 - нечетное $\Rightarrow$ Тогда рассматривать нужно варианты, когда совпадают 2 или 3 числа.

2) Рассмотрим случай, когда $x_1=x_2 \Rightarrow 2x_1+x_3+x_4=1005$

$\Rightarrow x_3+x_4=1005-2x_1$. В таком случае ур-ие $x_3+x_4=n$ имеет $n-1$ натур реш-е. Тогда для x_1 из пром-ка $[1, 502]$ ур-ие имеет будет решений $1004-2x$. Значит суммарное кол-во: $\sum_{x=1}^{502}(1004-2x) = 1004\cdot 502 - 2\cdot\frac{503\cdot 502}{2} = 502\cdot 503 = 251502$. Еще аналогично если $x_1=x_3$ или $x_1=x_2$ или $x_1=x_4$ или $x_3=x_4$ или $x_2=x_4$. Тогда всего: $251502\cdot 6$.

Но еще важно обратить внимание на случай когда $x_1=x_2=x_3$. Получается еще $3x_1+x_4=1005$.

$x_4=1005-3x_1$ подходит решение. $\forall x_1 \in [1, 334]$. Тогда нужно учесть еще их варианты, а это: $C_6^2-3=12$

$\Rightarrow$ когда какие-то пары пересекаются без вариантов разбиения на непересек. пары и потом еще + пара, посчитаем тригер:

$6\cdot 251502 - 12\cdot 334 + 4\cdot 334 = 1506340$

Ответ: 1506340

3 МА000105702 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

2. Найдем 1ое число

$n=3$,

$X_3 > 8 \Rightarrow X_3 = 10$

$X_4 > 13 \Rightarrow X_4 = 14$

$X_5 > 18 \Rightarrow X_5 = 20$

и т.д.

Тогда можно вывести формулу X_n числа:

$X_n = \frac{n(n+3)}{2}$, где $n \geq 4$

Можем доказательство индукцией база $n=4$.

Верно. $\Rightarrow 2X_{n-1} - X_{n-2} = (n-1)(n+2) - \frac{(n-2)(n+1)}{2} =$

$= \frac{2n^2+2n-4-n^2+n+2}{2} = \frac{n^2+3n-2}{2}$. Нужно

взять больше. Значит хотим бы $\frac{n^2+3n-2}{2} + 1$

$\frac{n^2+3n-2}{2} + 1 = \frac{n^2+3n}{2} = \frac{n(n+3)}{2}$ ■

$\Rightarrow X_{98} = \frac{98 \cdot 101}{2} = 4949$

Ответ: 4949

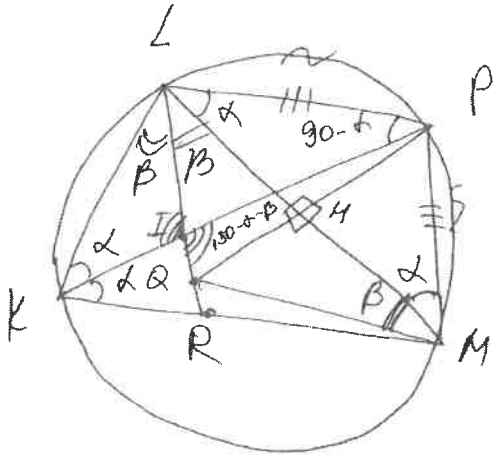
Вариант № 3 МА0001057025

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная работа заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

6.



Док-ть: $\angle Q = MQ$

Док-во:

т.к. I - центр вписанной окр. значит точка пересеч. биссектр. $\Rightarrow$ KI - бис. $\angle LKM$

$\Rightarrow \angle LKI = IKM = \alpha$.

Из этого следует, что $\cup LP = \cup PM$ и $LP = PM$, (хорды, стягивающие равные дуги). $\angle PLM$ опирается на PM

$\Rightarrow \angle PLM = \angle PKM = \angle LKD = \alpha$ и $\angle LMP = \angle IKLP = \alpha$.

~~[redacted]~~ является

Аналогично с прямой LI, которая бис. $\angle L$. $\angle KLI = \beta$ и $\angle ILM = \beta$. $\Rightarrow \angle LIK = 180 - \beta - \alpha$.

$\angle LIK = \angle PIR$ (верт.)

IQMP - вписанный. $PH \perp LM$ и $Q = PH \cap LI$ и H - середина LM.

Из $\triangle LPM \Rightarrow PM$ - мед. и бис. $\Rightarrow$ в $\triangle LQM$ $LH = HM$ и $QH \perp LM \Rightarrow \triangle LQM$ - р/б. $\Rightarrow$

$\Rightarrow LQ = QM$

ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 | 7 | 0 | 2 | 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

5. $a^3-b^3=(abc-1)^2$

① если $a=b$

$(abc-1)^2=0$

$abc-1=0$

$abc=1$

при условии, что $a,b,c\in N$ единственный вариант, при котором равенство верно это $a=b=c=1$

② a,b – взаимно простые, если $a:d$ и $b:d$, то $c:d$ а правая $=1$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$. если $(a;b)=1$, то $(a^2+ab+b^2;a-b)=3$ или 1.

$a^2+ab+b^2:d$, $a-b:d$ то $(a^2+ab+b^2)-(a^2+2ab+b^2)=3ab:d$, но $ab\not:d \Rightarrow d=1$ или $d=3$.

если a^3-b^3 – квадрат, то

или $\begin{cases} a-b=n^2 \\ a^2+ab+b^2=m^2 \end{cases}$

или $\begin{cases} a-b=3n^2 \\ a^2+ab+b^2=3m^2 \end{cases}$

⇒ или $3mn=abc-1$

или $mn=abc-1$

но $n<\sqrt{a}$, $m<\sqrt{ab}$

и $mn<ab<abc-1$

это возможно только когда $a=b=c=1$

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 7 | 1 | 8 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	12	20	2	111	74

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

У-ря прямых проходящих через УрА A и B:

$y = 2x + 3,5$

$y = 0,5x + 0,5$

Найдём координаты точек A и B:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = 2x + 3,5 \\ \frac{1}{x} = 0,5x + 0,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 3,5x - 1 = 0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_1 = (3,5)^2 + 8 = 20,25 = (4,5)^2 \\ D_2 = 1 + 8 = 9 = 3^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-3,5 \pm 4,5}{2} \\ x = \frac{-1 \pm 3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A\left(\frac{1}{4}; 4\right) \\ B(2; 2) \end{matrix}$$

Пусть O - центр описанной окружности, имеет координаты $(x_0; y_0)$. Тогда $OA = OB = 0$ (=>

МА 000 117 1825

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$$\begin{cases} \sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2} = \sqrt{(x_0-x_2)^2+(y_0-y_2)^2} \\ \sqrt{(x_0+x_1)^2+(y_0-y_1)^2} = \sqrt{(x_0-x_3)^2+(y_0-y_3)^2} \end{cases}$$

Обозначим $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$

Тогда возведя в квадрат и сгруппировав слагаемые при x_0, y_0:

$$\begin{cases} 2(x_2-x_1)x_0 + 2(y_2-y_1)y_0 = (x_2)^2+(y_2)^2-(x_1)^2-(y_1)^2 \\ 2(x_3-x_1)x_0 + 2(y_3-y_1)y_0 = (x_3)^2+(y_3)^2-(x_1)^2-(y_1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x_0 - 6\cdot y_0 = -74{,}0625 \\ -\frac{5}{2}\cdot x_0 - 5\cdot y_0 = -77{,}8125 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 24\cdot x_0 - 96\cdot y_0 = -225 \\ -78\cdot x_0 - 744\cdot y_0 = -1853 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 24\cdot x_0 = -96\cdot y_0 + 225 \\ -78\cdot x_0 - 744\cdot y_0 = -1853 \end{cases}$$

$$3\cdot(-96\cdot y_0 + 225) - 744\cdot y_0 = -1853 \Rightarrow$$

$$-93x - y_0 + 675 = -1853 \Rightarrow y_0 = 2$$

Ответ: $(-7{,}375; 2)$. $x_0 = -7{,}375$

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 7 | 1 | 8 | 2 | 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Но, т.к. если в ней варианты где $x > 27y$ - они рассматриваются аналогично, а также Дима не те варианты, только Вася и Петя обменивались одеждой, следовательно всего способов $332 \cdot 333 \cdot 2 = 221\,112$.

Ответ: 221 112.

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 7 | 1 | 8 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Разрешается только то, что написано в этой строке и в рамке справа

N 3

Пусть Боря собрал x, Вася y, Петя z.

$$\begin{cases} x+y+z = 1001 \\ x > y > z \geq 1 \end{cases}$$

$z \geq \frac{1001}{3} \Rightarrow z \leq 332$, т.к. $333+334+335 = 1002$.

Тогда для любого x, у нас есть $\left[\frac{1001-x}{2}\right]$ ~~вариантов~~ вариантов разделить орехов между y и z, если x - четное число, и $\frac{1001-x}{2} - 1$, если x - нечетное, при этом $x \geq 335$ и $x \leq 558$. Значит вариантов тогда $\sum_{k=167}^{458} \cdot \left(k \frac{1001-2\cdot 7}{2} \cdot 1\right) + \sum_{k=168}^{495} \cdot \frac{1000-2k}{2}$

$$\sum_{k=167}^{458} \cdot \left(\frac{1000-2k}{2} + \frac{1000-2(k+1)}{2}\right) - 332 = \sum_{k=167}^{458} \cdot (1000-2k-1) - 332 = \sum_{k=167}^{458} (999-2k) - 332 = 999 \cdot 332 - 2 \cdot \sum_{k=167}^{458} k \cdot k - 332 = 332 \cdot 958 - 2 \cdot \frac{167+498}{2} \cdot 332 = 332 \cdot 333$$

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 7 | 1 | 8 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с лицевой стороны листа в рамке справа

№5

Предположим, что дробь = k (целое число).

$3^m + 2 = k \cdot (3^n + 2)$

$3^m = k \cdot 3^n + 2k - 2$

Пусть $n = 1$: $\frac{3^n + 2}{5}$

При $n = 1$: $\frac{3+2}{5} = 1$

$n = 2$: $\frac{3^2+2}{5} = \frac{11}{5}$. ×

$m = 3$: $\frac{3^3+2}{5} = \frac{25}{5}$. ×

Таким образом для $n \neq 1$ подходит значение $m = 1$

Пусть $n = 2n$: $\frac{3^n + 2}{11}$

$m = 2$: $\frac{3^2+2}{11} = 1$

$m = \frac{3^3+2}{11} = \frac{29}{11}$. ×

$m = 4$: $\frac{3^4+2}{11} = \frac{83}{11}$. ×

Вариант № 11

М	А	0	0	0	1	1	7	1	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Шифр берется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Покажем образец для $n = n$ подходит значение $m = n$

Пусть $n = 3$: $\frac{3^m + 2}{3^3 + 2} = \frac{3^m + 2}{29}$

$m = 3$: $\frac{3^3 + 2}{29} = 1$

$m = 4$: $\frac{3^4 + 2}{29} = \frac{83}{29}$

$m = 5$: $\frac{3^5 + 2}{29} = \frac{245}{29}$

Покажем образец для $n = 3$ подходит значение $m = 3$.

Докажем, что $m > n^2$:

для каждого n подходящее значение m совпадает с n, то есть $m = n$

Покажем образец для каждого значения n, подходящее значение m всегда больше или равно n^2, т.к. здесь всегда выполняется неравенство $m > n^2$, т.к. для любого n выполняется $m = n^2$

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 7 | 1 | 8 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

$x_n = n^2 + 300$

$x_{n+1} = n^2 + 300 + (2n+1)$

$y_n = НОД(x_{n+1}, x_n) = НОД(x_{n+1} - x_n, x_n) = НОД(2n+1, n^2+300) = d$

$(2n+1)^2 - 4(n^2+300) = (4n - 1195) \vdots d$

$2 \cdot (2n+1) - (4n - 1195) = 1201 \vdots d$

т.к. 1201 - простое

$\Rightarrow$

$d = 1$ или 1201. Пример для 1201:

$n = 600: НОД(600^2 + 300, 601^2 + 300) = НОД(360300, 1201) = 1201.$

Ответ: 1201.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	1	7	1	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! При верстке писать только с этой стороны листа в рамках строки

№ 4.

Условие симметрии:

(·)X' симметрично точке X относительно OA. То есть если провести перпендикуляр к OA через точку X, то точка X' будет находиться на таком же расстоянии от OA, но на противоположной стороне.

Точки неизменны прямая, проходящая через точку O и A, а окружность окружность с точкой X и Y, это значит, что прямая является секущей для окружности

AO OA ~~[illegible]~~

Точки неизменны прямые: OA и X'Y всегда будут одни и те же, независимо от того, какую именно секущую мы выберем. Доказательство:

Выделим два таких секущих, проходящих через точку A, пересекающих окружность в точках x_1 и y_1 для одной секущей, и в точках x_2 и y_2 для другой секущей.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	1	7	1	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВГИК. ЛИНЕЙ Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамках справа

Для каждого из секундных углов симметрия точек X' относительно прямой OA, назовем прямую $X'Y$, где X' - симметрия точки относительно прямой OA для точки X - секундной, а Y - минутной.

Прямые OA и $X'Y$ будут пересекаться в одной и той же точке, т.к. точка симметрии остаётся неизменной относительно прямой OA, а положение секундной через точку A не изменит характер этого пересечения. Таким образом точка пересечения прямых OA и $X'Y$ независима от выбора конкретной секунды, т.к. симметрия и положение секунды не влияет на положение ~~точки~~. Эта точка В заключении точка пересечения прямых OA и $X'Y$ всегда одна и та же, независимо от выбора секунды.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	5	2	3	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
2	20	20	20	12	///	74

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

1. Точка с гиперболы $\frac{1}{x}$ при $x=-2$ $(-2; -\frac{1}{2})$
2. Прямая с с угловым коэффициентом 2 $A(\frac{7}{4}; 4)$
3. Прямая с с угловым коэффициентом $k(1; 1)$
4. центр окружности ABC в точке $O(-\frac{11}{8}; 2)$

Ответ: $-\frac{11}{8}; 2$

№2

Дано $x_n = n^2 + 300$ имеем $y_n = НОД(x_n, x_{n+1}) = НОД(n^2+300, n+1)^2 + 300) = НОД(n^2+300, 2n+1)$ далее $НОД(n^2+300, 2n+1) | НОД(2n+1, n-600)$ | $y_n = 1201$, а 1201 - простое число $\Rightarrow$ максимум будет 1201 при $x=600$

№3

Пусть распределение яблок между Б, П, В

(I) условие $Б+В+П=1001$, $В>0$, $П>0$, $Б>0$

(II) $Б>В$, $Б>П$, $В+П$

Все способы кроме >0

$\binom{1001-1}{3\ 1} = \binom{1000}{2} = 499\,500$

Исключаем $501 \cdot 3 = 1500$

$499\,500 - 1500 = 498\,000$

$498\,000 \cdot \frac{1}{3} = 166\,000$ (так как расст 3)

Ответ: 166 000

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	5	2	3	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

Зафиксируем точку O в начале координат окружности $x^2+y^2=R^2$ точку A положим на ox, так как A(D,0), где $D>R$ любая секущая проходит через A

в окружности x и y отражение x относительно оси ox прямой OA даёт x' с координатами $(C+t_1\cos\theta, -t_1\sin\theta)$ прямая x'y пересекает ox, то если OA в точке $T(\frac{R^2}{C}, 0)$ не зависит от выбора секущей. ч.т.д

№5

Пусть $\frac{3^{n+2}}{3^{n+2}}$ целое число $n = kn + k + 0 \leq k < n$, тогда $3^{n+2} = 3^{kn+k+2} = (3^n)^k \cdot 3^k + 2 \equiv (-2)^k \cdot 3^{k+2} \pmod{3^{n+2}}$ делимости даёт $3^n + 2 \leq |(-2)^k \cdot 3^{k+2}|$, если $k < n$, то $|(-2)^k \cdot 3^{k+2}| < 3^{n+2}|$ так как $2^k \cdot 3^k$ слишком мала по сравнению с 3^n) возникает противоречие делимости, значит $k \geq n$. Поскольку $n = kn + k$, получаем $n > n^2$. Таким образом при целочисленности $\frac{3^{n+2}}{3^{n+2}}$ обязательно выполняется $n > n^2$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	4	7	2	5	2	5

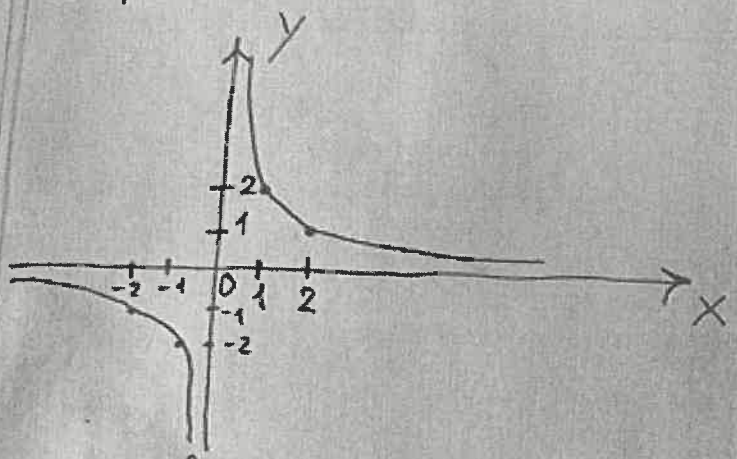
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	6	20	6	11	72

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Черновики не проверяются и не оцениваются. Используйте чистовые листы.

№1



$y = 2x + b - 1$ прямая

$y = \frac{1}{2}x + c - 2$ прямая

$\Downarrow$

$2 \cdot (-2) + b = -\frac{1}{2}$, $b = 3,5$

$\frac{1}{2} \cdot (-2) + c = -\frac{1}{2}$, $c = 0,5$

$2x + 3,5 = \frac{1}{x}$

$2x^2 + 3,5x = 1$

$x = -2$, $x = \frac{1}{4}$

$\Downarrow$

$A(\frac{1}{4}; 4)$

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{x}$

$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = 1$

$x = -2$, $x = 1 \Rightarrow B(1; 1)$

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Найдём прямую, проходящую через (·) A и B:

$y = k_1 x + l_1$

$k_1 \cdot \frac{1}{4} + l_1 = 4$

$k_1 + l_1 = 1$

$\frac{3}{4} k_1 = -3$

$\Downarrow$

$k_1 = -4, \; l_1 = 5$

Найдём прямую, проходящую через (·) C и B:

$y = k_2 x + l_2$

$k_2 \cdot (-2) + l_2 = -\frac{1}{2}$

$k_2 + l_2 = 1$

$3k_2 = \frac{3}{2}$

$k_2 = \frac{1}{2}, \; l_2 = \frac{1}{2}$

Середина $BC = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$

Угловой коэфф. серединного перпендикуляра $= -2$

$y - \frac{1}{4} = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)$

$\Downarrow$

Уравнение серединн. перпендикуляра к BC:

$y = -2x - \frac{3}{4}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	4	7	2	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Найдём уравнения серединных перпенд к AB:

Угловой коэфф = $\frac{1}{4}$,

Середина $AB\left(\frac{5}{8}; \frac{5}{2}\right)$

$$y - \frac{5}{2} = \frac{1}{4} \cdot \left(x - \frac{5}{8}\right) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{75}{32}$$

Найдём пересечение данных серединных перпенд:

$$y = -2x - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}x + \frac{75}{32}$$

$$x = -\frac{11}{8},\ y = 2$$

Ответ: т.к. координаты центра описанной окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров $\Rightarrow$ Ответ: $\left(-\frac{11}{8}; 2\right)$

№2

$y_n = НОД(n^2+300,\ n^2+2n+1+300) =$ по алгоритму Евклида $= НОД(n^2+300,\ 2n+1)$

Пусть $2n+1$ делится на p

Тогда $2n \equiv -1 \pmod p \Rightarrow 4n^2+1200 = 4\cdot(n^2+300) =$

$= 1+1200 = 1201$ (т.к. $(2n)^2 \equiv 1 \pmod p$).

Все сравнения были mod p.

1201 – простое число $\Rightarrow$

$\Rightarrow p = 1$ или $p = 1201$

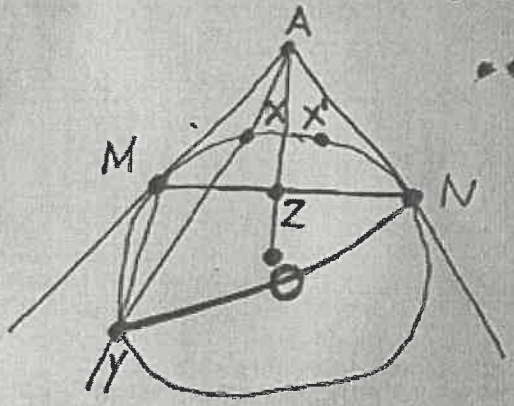
Если p – это $HOD(n^2+300,\ 2n+1)$, то

$p \leq 1201$

При $n = 600$: $y_n = HOD(360.300; 361.501) =$

$= 1201 \Rightarrow$ Ответ: 1201

№4



Решение

AM, AN – касательные к окружности

Рассмотрим $\triangle YMN$

YA – медиана $\triangle YMN$ (содержит) по св-ву медианы,

т.к. AM и AN – касательные к окружности $\triangle YMN$

Заметим, что Z – середина MN (из симметрии)

$\Downarrow$

YZ – медиана $\triangle YMN$

т.к. X' симметрична X относительно AO, то

$\overline{MX} = \overline{NX'} \Rightarrow$ т.к. YX – медиана (содержит) $\triangle YMN \Rightarrow$

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

YX' содержит медиану $\triangle YMN \Rightarrow Y, Z, X'$ лежат на одной прямой

Заметим, что Z – не зависит от выбора секущей, ч.т.д

№3

Т.к. каждый должен что-то получить, то будем решать такое уравнение:

$X+Y+Z = 998$

Z – орехов у Бори

X – орехов у Васи

Y – орехов у Пети

Т.к. Z – наибольшее, то $X = Z - X_1$

$Y = Z - Y_1$

$(X_1 > 0, Y_1 > 0, X_1 \neq Y_1, X_1 \leq Z, Y_1 \leq Z)$

$Z - X_1 + Z - Y_1 + Z = 998$

$3z - 998 = X_1 + Y_1$

$Z = 333; \ldots, 998$

$3z - 998 = k + (3z - k - 998)$

$X_1 = k, \ Y_1 = 3z - k - 998$

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяться будет только то, что написано в этом чистовике. Не забудьте перенести ответы в бланк ответов.

$1 \le K \le Z$

$1 \le 3z - k - 998 \le k$

Временно забудем, что $x_1 \neq y_1$

$\Downarrow$

количество возможных ~~$k = \max(0, \min(z, 3z-999))$~~

$$k = \max\left(0, \min(z, 3z-999) - \frac{3z-998}{2} + 1\right)$$

Такая сумма по Z от 333 до 998 =

$= 83.665$

Вычтем случай $x_1 = y_1$. Это бывает, когда $3z-998$ - чётные

Тогда вычета останется 83.332

Ответ: 83.332

№5. $m > n$

$\frac{3^m + 2}{3^n + 2}$. Доказать: $m > n^2$

$m = kn + r$ (r - остаток m при делении на n)

$3^{kn} \equiv (-2)^k \pmod{3^n+2}$

$(-2)^k \cdot 3^r \equiv -2 \pmod{3^{n+2}}$

Т.к. $(\text{mod } 2, 3^n+2) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (-2)^{k-1} \cdot 3^r \equiv 1 \pmod{3^n+2} \Rightarrow$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

M	A	0	0	0	1	4	7	2	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$2^{k-1} \cdot 3^r = \pm 1 \pmod{3^n+2}$

$2^{k-1} \cdot 3^r = (3^n+2) \cdot l \pm 1$

$\Downarrow$

$0 = 2l \pm 1 \pmod{3^r} \Rightarrow l \geq \frac{3^r-1}{2}$

$\Downarrow$

$2^{k-1} \cdot 3^r \geq (3^n+2) \cdot \frac{3^r-1}{2} - 1$

$2^k \cdot 3^r \geq (3^n+2)(3^r-1) - 1$

$2^k \cdot 3^r \geq (3^n+2)(3^{r-1}) - 1$

Если $k<n \Rightarrow 2^k \cdot 3^r \leq 3^{n-1} \cdot 3^r$ (?!)

Если $k > n$, то $m > n^2$ ч.т.д.

Если $k = n$, то $m = n^2 + r$

Если $r > 0$, то $m > n^2$ ч.т.д.

Если $r = 0$, то $(-2)^{n-1} = \pm 1 \pmod{3^n+2}$

Но $2^{n-1} + 1 < 3^n + 2$

А также $2^{n-1} - 1 > 0 \Rightarrow m > n^2$ ч.т.д

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	6	1	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	6	20	20	6	///	72

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа и в рамке справа

Задача 3.

Чтобы набор подходил под условие задачи, в нем должны быть равны хотя бы 2 числа. Пусть 2 равных числа равны a, тогда третье число равно b, а четвертое $1001 - 2a - b = c$.

При $a=1$ $b+c = 1001-2 = 999$. Так как $b, c \in \mathbb{N}$, то b от 1 до 998 – всего 998 наборов

при $a=2$ $b+c = 1001-4 = 997$. Аналогично b от 1 до 996 – всего 996 наборов

При $a=x$: $b+c = 1001-2x$

при $a=x+1$: $b+c = 1001-2(x+1) = 1001-2x-2$.

Значит при увеличении a на 1 наборов с такими значениями a на 2 меньше, чем с предыдущими.

Так как чисел всего 4, то мы могли учесть вариант, когда присутствуют 4 равных числа, то есть две пары. $1001 \vdots 4$, значит такого быть не могло. Также мы учли наборы, в которых каждое из чисел равно $\frac{1001}{4}$. Также, так как нам неважно расположение чисел, то полученное суммарное количество наборов нужно разделить на 2, так как иначе все пары чисел будут учтены в виде b, c и c, b. Тогда получаем, что количество наборов равно

$$\frac{998+996+994+\ldots+4+2}{2} = 499+498+497+\ldots+2+1 = \frac{499 \cdot 500}{2} =$$

$$= 499 \cdot 250 = 124\,750 \text{ наборов.}$$

Ответ: 124750.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	6	1	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 2.

$4 = x_1$, $6 = x_2$

$2x_2 - x_1 = 12 - 4 = 8$, значит $x_3 = 9$

$2x_3 - x_2 = 18 - 6 = 12$, значит $x_4 = 14$

$2x_4 - x_3 = 28 - 9 = 19$, зн. $x_5 = 20$

$2x_5 - x_4 = 40 - 14 = 26$, зн. $x_6 = 27$

$2x_6 - x_5 = 54 - 20 = 34$, зн. $x_7 = 35$

Получаем ряд 4, 6, 9, 14, 20, 27, 35....

При четном x_{n-2} x_n - всегда четное, т.к. при прибавлении к четному натуральному числу, большему 1, единицы всегда получается составное четное число.

При четном x_{n-2} x_n отличается от $2x_{n-1} - x_{n-2}$ не более чем на 2.

Заметим, что $14 - 9 = 5$, $20 - 14 = 6$, $27 - 20 = 7$, $35 - 27 = 8$...

Гипотеза: начиная с x_5, число x_n отличается от числа x_{n-1} на $x_{n-1} - x_{n-2} + 1$. Тогда $x_{100} = 9 + (5 + 6 + 7 + \dots 101) = 9 + \frac{101 \cdot 102}{2} - \frac{4 \cdot 5}{2} =$
$= 9 + 5151 - 10 = 5150$ Ответ: 5150

Задача 1.

$f(x) = x^2 - 2x - 1$

$x^2 - 2x - 1 = 0$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) = 4 + 4 = 8$

$x_1' = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$

$x_2' = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$

$g(x) = x^2 - 3x - 1$

$x^2 - 3x - 1 = 0$

$D = (-3)^2 - 4 \cdot (-1) = 9 + 4 = 13$

$x_3' = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$

$x_4' = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$

Тогда выражение $(g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4)$ может иметь два значения: I. $x_1 = x_1'$, $x_3 = x_3'$, $x_2 = x_2'$, $x_4 = x_4'$

II $x_1 = x_1'$, $x_3 = x_4'$, $x_2 = x_2'$, $x_4 = x_3'$, т.к. при перестановке

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	6	1	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

слагаемых сумма не меняется.

$g(x_1') = (1-\sqrt{2})^2 - 3(1-\sqrt{2}) - 1 =$

$= 1 - 2\sqrt{2} + 2 - 3 + 3\sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} - 1$

$g(x_2') = (1+\sqrt{2})^2 - 3(1+\sqrt{2}) - 1 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 3 - 3\sqrt{2} - 1 = -\sqrt{2} - 1$

$f(x_3') = \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) - 1 = \frac{9 - 6\sqrt{13} + 13}{4} - 3 + \sqrt{13} - 1 =$

$= 5{,}5 - 1{,}5\sqrt{13} - 3 + \sqrt{13} - 1 = -\frac{\sqrt{13}}{2} + 1{,}5 = -0{,}5\sqrt{13} + 1{,}5$

$f(x_4') = \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) - 1 = \frac{9 + 6\sqrt{13} + 13}{4} - 3 - \sqrt{13} - 1 =$

$= 5{,}5 + 1{,}5\sqrt{13} - 3 - \sqrt{13} - 1 = 0{,}5\sqrt{13} + 1{,}5$

I сл. $(g(x_1'))^3 f(x_3') + (g(x_2'))^3 f(x_4') = (\sqrt{2}-1)^3 \cdot (-0{,}5\sqrt{13} + 1{,}5) +$

$+ (-\sqrt{2}-1)^3 \cdot (0{,}5\sqrt{13} + 1{,}5) = (2\sqrt{2} - 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3\sqrt{2} \cdot 1 - 1)(-0{,}5\sqrt{13} + 1{,}5) +$

$+ (-2\sqrt{2} - 3 \cdot 2 \cdot 1 - 3\sqrt{2} \cdot 1 - 1)(0{,}5\sqrt{13} + 1{,}5) = (5\sqrt{2} - 7)(-0{,}5\sqrt{13} + 1{,}5) +$

$+ (-5\sqrt{2} - 7)(0{,}5\sqrt{13} + 1{,}5) = -2{,}5\sqrt{26} + 7{,}5\sqrt{2} +$

$+ 3{,}5\sqrt{13} - 10{,}5 - 2{,}5\sqrt{26} - 7{,}5\sqrt{2} - 3{,}5\sqrt{13} - 10{,}5 =$

$= -5\sqrt{26} - 21.$

II сл. $(g(x_1'))^3 f(x_4') + (g(x_2'))^3 f(x_3') = (\sqrt{2}-1)^3 \cdot (0{,}5\sqrt{13} + 1{,}5) +$

$+ (-\sqrt{2}-1)^3 \cdot (-0{,}5\sqrt{13} + 1{,}5) = (5\sqrt{2} - 7) \cdot (0{,}5\sqrt{13} + 1{,}5) + (-5\sqrt{2} - 7) \cdot$

$\cdot (-0{,}5\sqrt{13} + 1{,}5) = 2{,}5\sqrt{26} + 7{,}5\sqrt{2} - 3{,}5\sqrt{13} - 10{,}5 + 2{,}5\sqrt{26} - 7{,}5\sqrt{2} +$

$+ 3{,}5\sqrt{13} - 10{,}5 = 5\sqrt{26} - 21$

Итого, выражение $(g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4)$ может быть равным $-5\sqrt{26} - 21$ или $5\sqrt{26} - 21$

Ответ: $-5\sqrt{26} - 21$; $5\sqrt{26} - 21$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	1	6	1	8	2	5

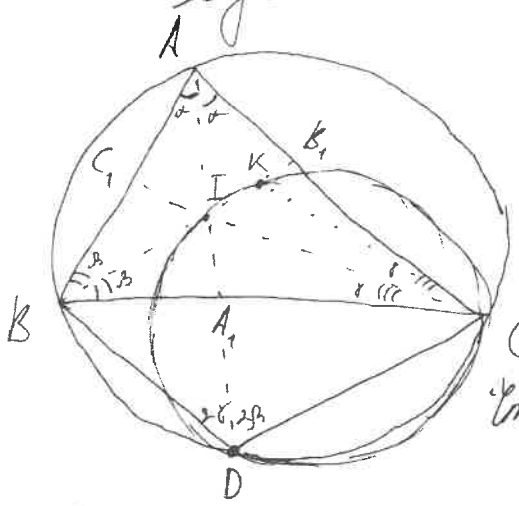
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 4



I - центр вписанной окр. $\triangle ABC$, значит I - точка пересечения его биссектрис.

Пусть $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$.

Чтобы доказать, что $BK = CK$, достаточно доказать что $\angle KBC = \angle KCB$. $\angle KBC = \beta$, значит надо доказать, что $\angle KCB = \beta$.

Задача 5.

1. $a = 1$ или $b = 1$. Пусть не умаляя общности $b = 1$

$a^3 + 1 = (ac - 1)^2$

$a^3 + 1$ - точный квадрат.

Рассмотрим остатки по модулю 4

a	a^2	a^3
0	0	0
1	1	1
2	0	0
3	1	1

1. $a^3 + 1 \equiv_4 0$ или 2. $a^3 + 1 \equiv_4 1$

Первого быть не может, т.к. тогда $a^3 \equiv_4 3$, чего не может быть

Тогда $a^3 + 1 \equiv_4 1$. Следовательно, $a^3 \equiv_4 0$

Тогда рассмотрим $ac - 1$ по модулю 4.

Так как $a^3 \equiv_4 0$, то

1. $a \equiv_4 2$

$ac - 1 \equiv_4 2c - 1$?

2. $a \equiv_4 0$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	6	1	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке слева

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 5.

$a^3+b^3=(abc-1)^2$

Рассмотрим остатки по модулю 4

x	x^2	x^3
0	0	0
1	1	1
2	0	0
3	1	1

Так как a^3+b^3 – точный квадрат, то $a^3+b^3 \equiv_4 0$ или $a^3+b^3 \equiv_4 1$. Хотя бы одно число из a^3 и b^3 кратно 4.

I. $a^3+b^3 \equiv_4 0$

Тогда $a^3 \equiv_4 0$ и $b^3 \equiv_4 0$, значит

$a \equiv_4 0$ или $a \equiv_4 2$; $b \equiv_4 0$ или $b \equiv_4 2$

значит, $ab \equiv_4 0$.

Тогда рассмотрим $(abc-1)$

$abc-1 \equiv_4 -1 \equiv_4 3$, значит $(abc-1)^2 \equiv_4 1$.

Но $a^3+b^3 \equiv_4 0$ – противоречие, такого быть не может.

II. $a^3+b^3 \equiv_4 1$

Пусть тогда не умаляя общности $a^3 \equiv_4 0$, $b^3 \equiv_4 1$

Тогда $a \equiv_4 2$ или $a \equiv_4 0$; $b \equiv_4 1$ или $b \equiv_4 3$

Следовательно, $ab \equiv_4 0$ или $ab \equiv_4 2$

$ab \equiv_4 0$

$abc-1 \equiv_4 -1 \equiv_4 3$,

$(abc-1)^2 \equiv_4 1$.

$ab \equiv_4 2$

$abc-1 \equiv_4 2c-1$

$2c \equiv_4 0$ или $2c \equiv_4 2$, тогда

$2c-1 \equiv_4 3$ или $2c-1 \equiv_4 1$, $(abc-1)^2 \equiv_4 1$

К примеру, подходит вариант

$a=2$, $b=1$, $c=2$

$8+1=(4-1)^2$

$9=9$ ✓

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	6	1	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 2.

4, 6, 9, 14, 20, 27, 35...

$2a_{n-1} - a_{n-2} = a_{n-1} + (a_{n-1} - a_{n-2})$.

Значит, значение a_n определяется как наименьшее составное число, большее чем сумма предыдущего члена и разницы предыдущего и предпредыдущего членов.

В случае если оба предыдущих числа нечетны, то $a_{n-1} + (a_{n-1} - a_{n-2})$ нечетно, а значит

$x_n = a_{n-1} + (a_{n-1} - a_{n-2}) + 1$

a_{n-1} - четно, x_{n-2} - нечетно, тогда $a_{n-1} - a_{n-2}$ - нечетно, значит

$x_n = a_{n-1} + (a_{n-1} - a_{n-2}) + 1$

Иначе получившееся число четно, а значит

$a_n = x_{n-1} + (a_{n-1} - a_{n-2}) + 1$ или $x_n = a_{n-1} + (a_{n-1} - a_{n-2}) + 2$.

Заметим, что $14 - 9 = 5$, $20 - 14 = 6$, $27 - 20 = 7$, $35 - 27 = 8$..

Гипотеза: начиная с a_5, $x_{n-1} + (a_{n-1} - a_{n-2}) + 1$ всегда составное

Докажем по индукции.

База: $a_5 = x_4 + (a_4 - a_3) + 1 = 14 + 5 + 1 = 20$ - составное ✓

Переход: $x_n = a_{n-1} + (a_{n-1} - a_{n-2}) + 1$ - составное

Доказательство:

$x_{n+1} = x_n + (x_n - x_{n-1}) + 1 =$

$= 2x_{n-1} - x_{n-2} + 1 + 2x_{n-1} - x_{n-2} + 1 - x_{n-1} + 1 =$

$= 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 3 = 3(x_{n-1} + 1) - 2x_{n-2}$

Если a_{n-1} - нечетное, то $3(a_{n-1} + 1) : 2$ и $2a_{n-2} : 2$, а значит $a_{n+1} : 2$ и a_{n+1} - четное.

Иначе x_{n-1} - четное, тогда при $x_{n-2} : 3$ $a_{n+1} : 3$?

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	6	1	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа, в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 5.

Итого мы получили, что

$a^3 \equiv_4 0$, $b^2 \equiv_4 1$, $(abc-1)^2 \equiv_4 1$

Тогда при $a=2$, $b=1$, $c=2$ $8+1 \pm (4-1)^2$ ✓

$(a+b)(a^2+ab+b^2)$ - точный квадрат

Задача 4 (рис. см. лист 4.

Рассмотрим четырёхугольник ABCD.

$\angle BDA = \angle ACB$, т.к. опираются на одну дугу. Аналогично $\angle ADC = \angle ABD$

Рассмотрим четырёхугольник DIKC. Он вписан в окружность по условию, т.к. все его точки лежат на окружности

Тогда $\angle IKC = 180° - 2B$

$\angle KCB = 180° - \angle BKC - \angle KBC = 180° - (180° - 2B) - B = 2B - B = B$.

Значит, $\angle KCB = \angle KBC$, тогда в $\triangle KBC$ $BK = CK$, ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	6	1	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Черновик

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	1	3	9	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	6	6	111	72

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 1

$y + 0,5 = 2(x+2)$, $y = 2x + 3,5$

$y + 0,5 = 0,5(x+2)$, $y = 0,5x + 0,5$

Подставляем $y = \frac{1}{x}$

$\frac{1}{x} = 2x + 3,5$; $x_1 = -2$ – точка C, $x_2 = 0,25$ – точка A $(0,25; 4)$

$\frac{1}{x} = 0,5x + 0,5$; $x_1 = -2$ – точка C; $x_2 = 1$ – точка B $(1; 1)$

Середина BA, точка $M = (0,625; 2,5)$; $\overrightarrow{BA} = \{-0,75; 3\}$,

серединный перпендикуляр $y = 0,25x + 1,875$

аналогично к AC

$y - 1,25x = -0,5x - 0,4375$

Из системы находим $O = (-1,375; 2)$

Ответ: $(-1,375; 2)$

№ 2

По свойству НОД имеем

$(n^2 + 300; n^2 + 2n + 301) = (n^2 + 300; 2n + 1) = d \Rightarrow n^2 + 300 \vdots d$,

$2n + 1 \vdots d$ следовательно

$2n^2 + 600 - n(2n+1) \vdots d \Rightarrow 600 - n \vdots d$

значит $2(600 - n) + 2n + 1 \vdots d \Rightarrow 1201 \vdots d \Rightarrow d \leq 1201$

пример: $d = 1201$, $n = 600$, $(x_{n+1}; x_n) = (36300; 1201) = 1201$

Ответ: 1201

№ 3

Пусть орешков у Бори – B, пусть у Васи – V, у Пети – P.

Тогда $B + V + P = 1001$, не делится на три

по методу шаров и перегородок

$C_{1000-1}^{3-1} = C_{1000}^{2} = 500 \cdot 999$

исключая совпадения $2x + y = 1000$, $1 \leq x \leq 500$, тогда 1500.

Из шести возможных троек только в двух случаях у Бори больше орешков.

окончательно

$\frac{1}{3}(500 \cdot 999 - 1500) = 166000$ Ответ: 166000

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	1	3	9	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 4

Не умоляя общности обозначим $A=(1;0)$, уравнение секущей $y=b(x-1)=bx-b$, центр окр-ти $(0;0)$, радиус r

координаты точек из условия задачи:

$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ y=bx-b \end{cases} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{b^2\pm\sqrt{b^2\cdot r^2-b^2+r^2}}{b^2+1},$$

$$y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{b^2\cdot r^2-b^2+r^2}}{b^2+1}\cdot b$$

Симметричные точки:

$$x_3=x_1=\frac{b^2+\sqrt{b^2\cdot r^2-b^2+r^2}}{b^2+1},\quad y_3=-y_1=\frac{\sqrt{b^2\cdot r^2-b^2+r^2}-1}{b^2+1}$$

покажем, что точка пересечения $(x_0;0)$ не зависит от буквы b, то есть от секущей

$$\frac{x-x_3}{x_2-x_3}=\frac{0-y_3}{y_2-y_3},\quad x=\frac{-y_3}{y_2-y_3}\cdot(x_2-x_3)+x_3=1$$

что и требовалось доказать

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ): МА 0001139025

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Пишется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

№ 5

Выделим целую часть

$\frac{3^m+2}{3^n+2} = 3^{m-n} + \frac{2-2\cdot 3^{m-n}}{3^n+2}$ значит

$\frac{1-3^{m-n}}{3^n+2}$ – целое $\Rightarrow 3^{m-n} > 3^n$

снова выделим целую часть:

$\frac{3^{m-n}-1}{3^n+2} = 3^m - 2^n + \frac{-1-2\cdot 3^{m-2n}}{3^n+2}$

значит $m-2n \geq n$

повторяя метод, последовательно получаем неравенство

$m \geq 3n$, $m \geq 4n$ и т.д. ?!

откуда следует $m > n^2$, что и требовалось доказать

Лист 3 из 3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	7	6	6	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Приведется только то, записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	12	20	X	///	72

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

$f(x)=x^2-2x-1$; x_1, x_2 – его корни; $f(x_1)=x_1^2-2x_1-1=0$, $f(x_2)=x_2^2-2x_2-1=0$

$g(x)=x^2-3x-1$; x_3, x_4 – его корни; $g(x_3)=x_3^2-3x_3-1=0$, $g(x_4)=x_4^2-3x_4-1=0$

Заметим, что $f(x_3)=x_3^2-2x_3-1=\underbrace{x_3^2-3x_3-1}_{g(x_3)=0}+x_3 \ominus$

$\ominus x_3$. Аналогично $f(x_4)=x_4^2-2x_4-1 \ominus$

$\ominus \underbrace{x_4^2-3x_4-1}_{g(x_4)=0}+x_4=x_4$;

$g(x_1)=x_1^2-3x_1-1=\underbrace{x_1^2-2x_1-1}_{f(x_1)=0}+(-x_1)=-x_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (g(x_1))^3=-x_1^3$

$g(x_2)=x_2^2-3x_2-1=\underbrace{x_2^2-2x_2-1}_{=0}-x_2=-x_2 \Rightarrow (g(x_2))^3=-x_2^3$

Значит, $(g(x_1))^3\cdot f(x_3)+(g(x_2))^3\cdot f(x_4)=-x_1^3\cdot x_3+$

$+(-x_2^3)\cdot x_4=-(x_1^3x_3+x_2^3x_4)$.

Найдем корни x_1, x_2, x_3, x_4: $x_{12}=1\pm\sqrt{2}$; $x_{34}=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{13}}{2}$

1) ~~$x_1=1+\sqrt{2}$, $x_2=1-\sqrt{2}$, $-(x_1^3x_3+x_2^3x_4)\ominus$~~ 1) $\begin{cases} x_3=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2} \\ x_4=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2} \end{cases}$:

$-(x_1^3x_3+x_2^3x_4)=-\left(x_1^3\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)+x_2^3\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)\right)\ominus$

$\ominus -\left(\frac{3}{2}(x_1^3+x_2^3)+\frac{\sqrt{13}}{2}(x_1^3-x_2^3)\right)=-\left(\frac{3}{2}(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)+\right.$

$\left.+\frac{\sqrt{13}}{2}(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)\right)=-\left(\frac{3}{2}(x_1+x_2)((x_1+x_2)^2-3x_1x_2)+\right.$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	7	6	6	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$+\frac{\sqrt{13}}{2}(x_1-x_2)\left((x_1+x_2)^2-x_1x_2\right)$.

По теореме Виета для $f(x)$: $x_1+x_2=-2$, $x_1x_2=-1$. Тогда выражение имеет вид: $-\left(\frac{3}{2}\cdot(-2)\left(4+3\right)+\frac{\sqrt{13}}{2}(x_1-x_2)\left(4+1\right)\right)\ominus$

$\ominus -\left(-21+\frac{5\sqrt{13}}{2}(x_1-x_2)\right)=\begin{bmatrix}21-\frac{5\sqrt{13}}{2}\cdot 2\sqrt{2}\\ 21-\frac{5\sqrt{13}}{2}\cdot(-2\sqrt{2})\end{bmatrix}$;

$\begin{bmatrix}21-5\sqrt{26} & \text{при } x_1=1+\sqrt{2};\ x_2=1-\sqrt{2}\\ 21+5\sqrt{26} & \text{при } x_1=1-\sqrt{2};\ x_2=1+\sqrt{2}\end{bmatrix}$

2) $\begin{cases}x_3=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\\ x_4=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\end{cases}$:

Выражение примет вид $-\left(x_1^3\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)+x_2^3\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)\right)\ominus$

$\ominus -\left(\frac{3}{2}(x_1^3+x_2^3)-\frac{\sqrt{13}}{2}(x_1^3-x_2^3)\right)$. Пользуясь подсчетом из 1) пункта, имеем:

$21-\frac{5\sqrt{13}}{2}(x_1-x_2)=\begin{bmatrix}21-\frac{5\sqrt{13}}{2}\cdot(2\sqrt{2})\\ 21-\frac{5\sqrt{13}}{2}(-2\sqrt{2})\end{bmatrix}$;

$\begin{bmatrix}21-5\sqrt{26} & \text{при } x_1=1+\sqrt{2},\ x_2=1-\sqrt{2}\\ 21+5\sqrt{26} & \text{при } x_1=1-\sqrt{2};\ x_2=1+\sqrt{2}\end{bmatrix}$

Ответ: $21-5\sqrt{26}$; $21+5\sqrt{26}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	7	6	6	5	2	5

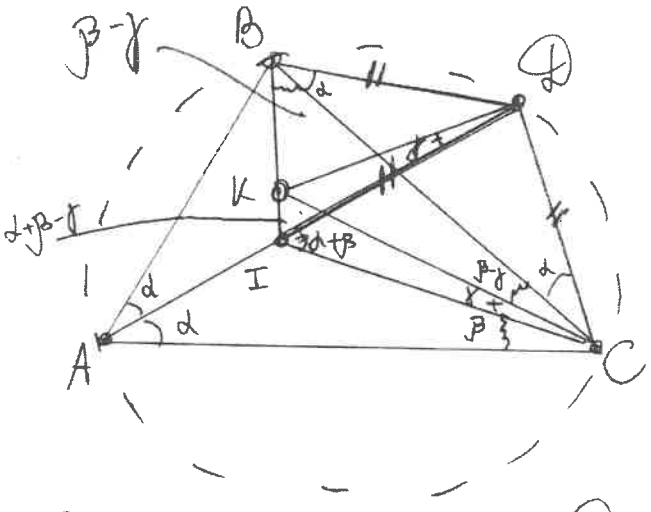
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа и в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4



Решение:

1) Пусть $\angle A = 2\alpha$, $\angle C = 2\beta$, Соединим CK, KD, BD, DC. Пусть $\angle ICK = \gamma$.

Т.к. $ICDK$ – вписан., то $\angle ICK = \gamma = \angle IDK$ (как вписан. и опир. на одну дугу)

Поскольку $\angle C = 2\beta$, CI – бисс-са, то $\angle ACI = \beta$; $\angle KCB = \beta - \gamma$; $\angle DIC = \angle IAC + \angle ICA = \alpha + \beta$

2) $\angle BAD = \angle BCD = \alpha$, $\angle DAC = \angle CBD = \alpha$ (как вписан. и опир. на одну дугу). Тогда $\triangle BDC$ – р/б по призн. $\Rightarrow BD = DC$.

Заметим, что $\angle DCI = \alpha + \beta - \gamma + \gamma = \alpha + \beta = \angle DIC \Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle DIC$ – р/б $\Rightarrow DI = DC = BD$.

3) $\angle KCD = \alpha + \beta - \gamma = \angle KID$ (из $ICDK$ как вписан. и опир. на одну дугу).

Т.к. $\triangle BDI$ – р/б ($BD = ID$), то $\angle DBI = \angle DIB =$ $= \alpha + \beta - \gamma \Rightarrow \angle CBK = \angle DBI - \angle DBC = (\alpha + \beta - \gamma) - \alpha =$ $= \beta - \gamma = \angle KCB \Rightarrow \triangle BKC$ – р/б $\Rightarrow BK = CK$. ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	7	6	6	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано в этой строчке листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

Заметим, что среди натуральных чисел a,b,c,d всегда найдется отличное от всех остальных чисел (иначе $a+b+c+d=1001 \vdots 4$, что явл. против.). Пусть это число d. Тогда $1 \le d \le 998$ (если $d \ge 999$, то $a+b+c \le 2 \Rightarrow$ против. $(a,b,c \in \mathbb{N})$. Тогда

1) $d = 998$:

$a=b=c=1$ — подходит под условие

2) $d \neq 998 \Rightarrow 1 \le d \le 997$.

Пусть $1001 - d = a+b+c = S \Rightarrow 1000 \ge S \ge 4$.

Если $S \vdots 3$, то всегда есть набор чисел $(a;b;c) \to \left(\frac{S}{3};\frac{S}{3};\frac{S}{3}\right)$

Пусть пока будем находить S, кол-во совпадающих только 2 числа, т.е. пусть $c \neq a, c \neq b, a=b$.

Здесь пока не учитываем совпадения с d.

1) $S=4$:

$\left[\begin{array}{l} c=1 \\ c=2 \end{array}\right.$, т.к. $a=b$, то $(a;b;c) = (1;1;2)$ — 1 вар.

2) $S=5$:

Т.к. $a=b$, то $(a+b) \vdots 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=2 \\ a+b=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (a;b;c)=(1;1;3) \\ (a;b;c)=(2;2;1) \end{array}\right. \Rightarrow$ 2 вар.

3) $S=6$

Аналогично $\left[\begin{array}{l} a+b=2 \\ a+b=4 \end{array}\right. \Rightarrow$ 2 вар. набора

Заметим, что при $S=7;8$ кол-во вар. станет 3, поскольку $a+b$ сможет равняться 6. Значит, при увеличении S на 2 кол-во вариантов для $(a;b;c)$ будет расти на 1.

Отметим, что $d \neq c$ (иначе $a+b+c+d = 2a+2c = 1001$ — противоречие)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 6 | 6 | 5 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке слева

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

При $d \le 333$ [1001 / 3] тройки троек $(a;b;c)$ будут вариантами, когда $a=b=d$.

Значит, при $1 \le d \le 333$ необходимо из кол-ва вариантов троек $(a;b;c)$ вычитать 1 вариант, поскольку изначально число d выбиралось как число, отличное от всех остальных.

Заметим, что количество вариантов n троек $(a;b;c)$ при данном S можно найти как $n = \left[\frac{S-1}{2}\right]$. Когда $d \le 333 \Rightarrow S \ge 668$ необходимо отнимать еще 1 вариант $(a=b=d)$.

Значит, общая сумма кол-ва вариантов наборов равна $N = 1 + (2+2) + (3+3) + \ldots + \left(\left[\frac{665-1}{2}\right] + \left[\frac{666-1}{2}\right]\right) + \left(\left[\frac{667-1}{2}\right]\right) + \left(\left[\frac{668-1}{2}\right] - 1\right) + \left(\left[\frac{669-1}{2}\right] - 1\right) + \left(\left[\frac{670-1}{2}\right] - 1\right) \ldots + \left(\left[\frac{999-1}{2}\right] - 1 + \left[\frac{1000-1}{2}\right] - 1\right) = \underbrace{1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2 + 4\cdot 2 + \ldots}$

$+ 2\cdot 332 + \underbrace{333 + 332} + 2\cdot 333 + \ldots + 2\cdot 498 =$

$= 2\cdot 2 + 3\cdot 2 + \ldots + 2\cdot 332 + 2\cdot 333 + 2\cdot 333 + \ldots + 2\cdot 498 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(2+3+\ldots+498) + 2\cdot 333 \Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{499\cdot 498}{2} - 2\right) + 2\cdot 333 =$

$= 499\cdot 498 - 4 + 2\cdot 333 = (500-1)(500-2) - 4 + 666 =$

$= 250000 - 1500 - 2 + 666 = 248500 + 664 = 249164$

Ответ: 249164

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	7	6	6	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

$x_1=4$; $x_2=6$;

$x_3 > 2x_2 - x_1 = 8 \Rightarrow x_3=9$

$x_4 > 2x_3 - x_2 = 12 \Rightarrow x_4=14$; $x_5 > 2x_4 - x_3 = 19 \Rightarrow x_5=20$

$x_6 > 2x_5 - x_4 = 26 \Rightarrow x_6=27$; $x_7 > 2x_6 - x_5 = 34 \Rightarrow x_7=35$;

$x_8 = 44$; $x_9=54$

Пусть есть выражение $x_{n-1}+n+1$. Докажем, что $x_n = x_{n-1}+n+1$ при $n \geq 7$.

База: $n=7$: верно; $n=6$; $n=7$; $n=8$ - верно

Шаг индукции: предположим, что верно для $k=n$. Докажем для $k=n+1$.

$x_{n+1} > 2x_n - x_{n-1} = 2(x_{n-1}+(n+1)) - x_{n-1} = x_{n-1}+2(n+1)$

Осталось доказать, что $x_{n-1}+2(n+1)+1$ — составное

1) Если $x_{n-1} \not\vdots 2$, то $(x_{n-1}+2(n+1)+1) \vdots 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{n+1} = (x_{n-1}+2(n+1)+1) \vdots 2$ — составное

2) $x_{n-1} \vdots 2$

Заметим, что $x_4 \equiv_3 x_5 \equiv_3 2$, $x_6 \equiv_3 0$. Значит, все числа имеют остаток либо 2, либо 0

Заметим следующее:

$$\begin{cases} x_{n-2} = x_{n-3}+n-1 \\ x_{n-1} = x_{n-2}+n \\ x_n = x_{n-1}+n+1 \end{cases} + 2$$

$x_n = x_{n-3}+3n \Rightarrow x_n \equiv_3 x_{n-3}$

Значит, $2x_n - x_{n-1}+1$ либо $\vdots 3$, либо дает остаток 2. Также заметим, что $\frac{x_n + x_{n-2} - 1}{2} = x_{n-1}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	7	6	6	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Тогда $2x_n - x_{n-1} + 1$ — составное

Значит, $x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} + 1 = x_{n-1} + 2(n+1) + 1$

Значит, $x_{100} = x_{98} + 2 \cdot 100 + 1 = x_{96} + 2 \cdot 98 + 2 \cdot 100 + 2 =$

$= \ldots x_6 + 2(8 + 10 + \ldots + 100) + 47 = 27 + 47 + 2 \cdot \frac{108 \cdot 47}{2} =$

$= 47 \cdot 109 + 27$

Ответ: $47 \cdot 109 + 27$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	7	8	1	5	2	5

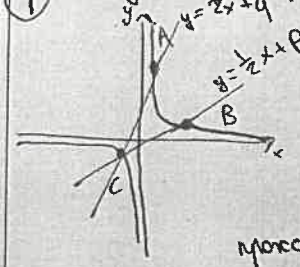
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	6	20	6	111	72

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1) Введём две прямые: $2x+q$ и $\frac{1}{2}x+p$



Точка C

$y=\frac{1}{x} \Rightarrow$ при $x=-2$

$y=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$

уравнение прямой CA: $y=2x+p$

проходит через $C\left(-2;-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow -\frac{1}{2}=2(-2)+p \Rightarrow p=\frac{7}{2}$

уравнение прямой CB: $y=\frac{x}{2}+q$

проходит через $C\left(-2;-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow -\frac{1}{2}=-\frac{2}{2}+q \Rightarrow q=\frac{1}{2}$

Найдём координаты точек A и B:

A: $2x+\frac{7}{2}=\frac{1}{x} \mid \cdot x \ (x\neq 0)$

$2x^2+\frac{7}{2}x-1=0$

$\left[\begin{array}{l} x=-2 \text{ - точка C} \\ x=\frac{1}{4} \text{ - точка A} \Rightarrow A\left(\frac{1}{4};4\right) \end{array}\right.$

B: $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{x} \ (x\neq 0)$

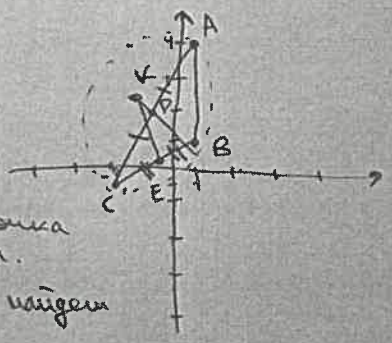
$x^2+x-2=0$

$\left[\begin{array}{l} x=-2 \text{ - точка C} \\ x=1 \text{ - точка B} \Rightarrow B(1;1) \end{array}\right.$

Пусть D - середина AC, E - середина BC

$D\left(\frac{\frac{1}{4}+(-2)}{2};\frac{4+\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}\right)$, т.е $D\left(-\frac{7}{8};\frac{7}{4}\right)$

$E\left(\frac{1+(-2)}{2};\frac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}\right)$, т.е. $E\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$



Центр описанной окружности - точка пересечения сер. перпендик к сторонам.

Рассмотрим стороны AC и BC и найдем точку пересечения сер.перпенд. и ими.

1) угол наклона (CA = 2 $\Rightarrow$ угол наклона сер.перп. к CA $= -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$)

2) угол наклона к CB $\frac{-1}{\frac{1}{2}}=-2$

K - центр опис. окр. $\Rightarrow$ K пересекает сер. перпенд. к CA и CB (см. рисунок)

1) уравнение DK: $y=-\frac{1}{2}x+a$

прох через $D\left(-\frac{7}{8};\frac{7}{4}\right) \Rightarrow \frac{7}{4}=\frac{7}{16}+a \Rightarrow a=\frac{21}{16} \Rightarrow y=-\frac{x}{2}+\frac{21}{16}$

2) ур-е EK: $y=-2x+e$

прох. через $E\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \frac{1}{4}=1+e \Rightarrow e=-\frac{3}{4} \Rightarrow y=-2x-\frac{3}{4}$

пересечение EK и DK (точка K)

$-\frac{x}{2}+\frac{21}{16}=-2x-\frac{3}{4}$; $\frac{3}{2}x=\frac{-33}{16} \Rightarrow x=-\frac{11}{8}$

$y=-2\cdot\left(-\frac{11}{8}\right)-\frac{3}{4}=2$

Ответ: $\left\{\begin{array}{l} x=-\frac{11}{8} \\ y=2 \end{array}\right.$ $\left(-\frac{11}{8};2\right)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

M	A	0	0	0	1	7	8	1	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

② $x_n = n^2 + 300$

$x_{n+1} = (n+1)^2 + 300 = n^2 + 2n + 1 + 300 =$

$= x_n + (2n+1)$

$y_n = НОД(x_n, x_{n+1}) = НОД(x_n, x_{n+1} - x_n) = НОД(x_n, 2n+1) =$

$= НОД(n^2 + 300, 2n+1)$

Знаем, что $НОД(a, b) = НОД(a, a - kb)$ для любого целого k.

Тогда $n^2 + 300 \equiv 300 - n^2 - n \pmod{2n+1}$

1) Отсюда понятно, что y_n имеет верхнюю границу.

2) Переборами всех достаточно больших чисел получаем, что максимальное значение $y_n = 1201$, достигается при $n = 600$.

Ответ: 1201

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	7	8	1	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3) Пусть: x - БОРЯ
y - ВАСЯ (орехов)
z - ПЕТЯ

Составим уравнение: т.к. $x>y>z\geq 0$, то $z\geq 1, y\geq 2, x\geq 3$

$(x+3)+(y+2)+(z+1)=1004$

$x+y+z=995$

Воспользуемся методом „перегородок"

x | y | z

2 перегородки $\Rightarrow 995+2=997$ элементов.

$\Rightarrow$ всего вариантов без упорядочивания

$$C_{997}^{995}=\frac{997!}{995!\,2!}=\frac{996\cdot 997}{2}$$

Но т.к $x>y>z \Rightarrow$ надо это учесть, разделив всё на 3!

$\Rightarrow$ количество способов: $N=\frac{C_{997}^{995}}{3!}$ (т.к. всего может быть 6 вариантов $\frac{6}{6}=1$, подходит 1)

$$=\frac{996\cdot 997}{2\cdot 3!}=\frac{\overset{83}{\cancel{996}}\cdot 997}{\underset{1}{\cancel{2}}\cdot\underset{1}{\cancel{6}}}=83\cdot 997=$$

$x>y>z$
$x>z>y$
$z>x>y$
$y>x>z$
$y>z>x$

$$\begin{array}{r} 997 \\ \times\ 83 \\ \hline 2991 \\ 7976 \\ \hline 82751 \end{array}$$

$=82751$

Ответ: 82751

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____

М	А	0	0	0	1	7	8	1	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

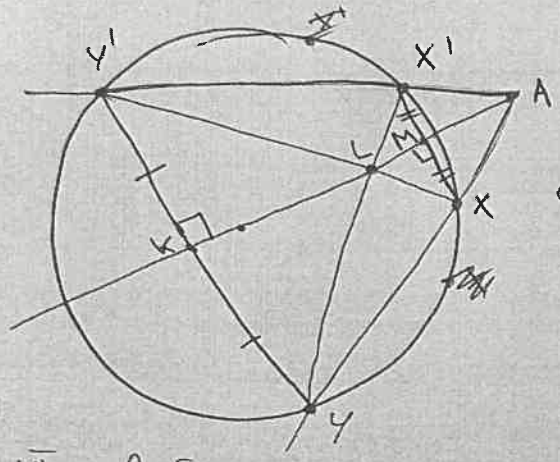
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

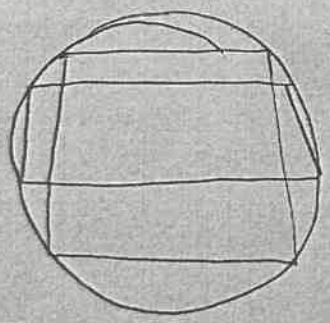
4)

В силу симметрии $XX' \perp OA$, аналогично $YY' \perp OA \Rightarrow$
$\Rightarrow XX' \parallel YY'$, а $\angle XAO = \angle X'AO \Rightarrow XYY'X'$ - р/б трапеция, вписанная в окружность с центром в точке O.



т.к трапеция равнобедр, то диагонали $X'Y$ и XY' пересекаются на сер. перп. к основаниям, т.е на прямой OA

При выборе другой секущей мы бы получили другую р/б трапецию, вписанную в окружность с центром в точке O.



Причём из подобия треугольников
$\triangle AMX \sim \triangle AKY$
Получаем, что $\frac{MX}{KY} = const$
Тогда $\frac{XX'}{YY'} = const$
А из подобия $\triangle XLM \sim \triangle YLK$
получаем, что тогда пересечения диагоналей трапеции L делит отрезок MK в отношении длин оснований трапеции.

Значит, это отношение постоянно, и L всегда будет в одном месте на прямой OA (и будет т. пересечения $X'Y$ и OA) вне зависимости от выбора изначальной секущей.

ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____

М	А	0	0	0	1	7	8	1	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5)

Пусть $\frac{3^m+2}{3^n+2} = z$ (какое-то целое число по усл.)

$3^m + 2 = (3^n+2)\cdot z$

$3^m + 2 = 3^n \cdot 2 + 2z$

$3^m - 3^n \cdot z = 2(z-1)$

$3^n(3^{m-n} - z) = 2(z-1)$

т.к 3^n и 2 - взаимопростые $\Rightarrow$

пусть $z-1 = 3^n \cdot y$, $y \in Z$ $(z = 3^n \cdot y + 1)$

$3^n(3^{m-n} - z) = 2(3^n \cdot y)$

$3^{m-n} - z = 2y$

$3^{m-n} - (3^n \cdot y + 1) = 2y$

$3^{m-n} = 2y + 1 + 3^n \cdot y$

$3^n / 3^m = 2y + 1 + 3^n \cdot y \mid \cdot 3^n$

$3^m = 3^{2n} \cdot y + 3^n \cdot 2y + 3^n(+y-y)$

$3^m = (3^{2n} + 2\cdot 3^n + 1) - 3^n - y$

$3^m = y(3^n+1)^2 + 3^n - y$ (*)

по условию $m, n \in N \Rightarrow z \geq 2$ (т.к. если $z=1$, то $m \neq n$ - противоречие)

$\Rightarrow$ чтобы получалось неравенство (*) необходимо, чтобы $m > n^2$, ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	1	0	3	0	2	5

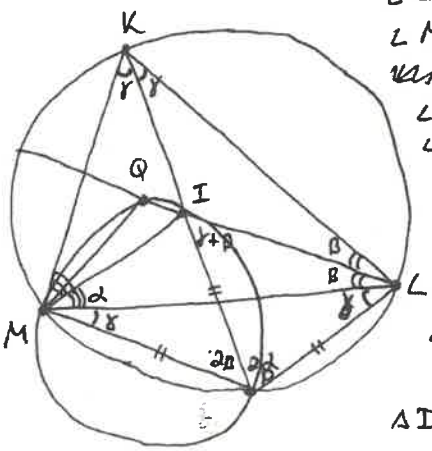
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
8	20	20	20	2	///	70

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 4 $\angle KLI = \angle MLI = \beta$, $\angle LKI = \angle MKI = \gamma$, $\angle KMI = \angle LMI = \alpha$ | делала Бис-сой



$\angle LMP = \angle PKL = \gamma$
$\angle MKP = \angle MLP = \gamma$ | опир-ся на общ. дугу
$\angle KLM = \angle KPM = 2\beta$
$\angle KPL = \angle KML = 2\alpha$

$\Rightarrow \triangle MLP$ - равноб. т.к углы при осн $\Rightarrow MP = PL$

$2(\alpha+\beta+\gamma) = 180$ - сумма углов $\triangle$

$\alpha+\beta+\gamma = 90$

$\angle LIP = 180^\circ - (\gamma+\beta) - (2\alpha) = \gamma+\beta$

$\Rightarrow \triangle ILP$ - равноб $\Rightarrow IP = PL$

$\triangle IPM$ равноб $\Rightarrow \angle MIP = \alpha+\gamma$

$\angle QIM = 180^\circ - (\gamma+\beta) - (\alpha+\gamma) = \alpha+\beta$

$\angle MQI = 180^\circ - 2\beta = 2\gamma+2\alpha$ - прояв-я угла во вне 4-ника $MQIP$

$\angle QMI = 180^\circ - (2\gamma+2\alpha) - (\alpha+\beta) = 2\beta - \alpha - \beta = \beta - \alpha$

$\angle QMI = \angle QML - \angle IML = \angle QML - \alpha = \beta - \alpha \Rightarrow \angle QML = \beta$

$\Rightarrow \triangle MQL$ - равноб $\Rightarrow$ **MQ = QL**

№5 $a^3 - b^3 = (abc-1)^2$

Заметим, что $a > b$, т.к $(abc-1)^2 > 0$

Рассмотрим простые числа, которые есть у b, но нет у a. Пусть $b : q, q$

Тогда $a^3 - b^3 \equiv_q a^3$; $(abc-1)^2 \equiv_q 1 \Rightarrow a^3 \equiv_q 1$. Пусть $a \equiv_q r$. Тогда $r^3 - 1 \equiv_q 0$

Рассмотрим случай, когда $a : p > 1, b : p > 1$

Тогда $a^3 - b^3 \equiv_p 0$; $(abc-1)^2 \equiv_p 1 \neq 0$ $\Rightarrow$ такого быть не может

Если у a есть делитель p, $b \not\vdots p$

$\Rightarrow -b^3 \equiv_p 1 \Rightarrow b^3 + 1 \equiv_p 0$

$(b+1)(b^2 - b + 1) \equiv_p 0$

$(r-1)(r^2+r+1) \equiv_q 0$

либо $r \equiv_q 1$ | либо $r^2 + r + 1 \equiv_q 0$

Заметим, что $r^2 + r + 1 < r^3 < q^3$

$\Rightarrow r^2 + r + 1 = q$, $q > 0$

или $r^2 + r + 1 = q^2$

$r^2 + r + 1 = q$

$(r+1)^2 = q + r < 2q$

$r < (r+1)^2 < 2q$

- верно только для $r \neq 1$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	1	0	3	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3 Пусть в наборе числа a,b,c,d

Будем считать наборы $\{a,b,c,d\}$ и $\{b,a,c,d\}$ одинаковыми.

Так как 1005 – нечетное, то равных чисел может быть либо 2, либо 3.

1) Если в наборе повторяется 2 единицы, то: $1\cdot 2+(1003)$.
1003 можно получить складывая: $\underset{1002}{1}+\underset{1001}{2}+\dots+\underset{502}{501}$ ⇒ всего способов 501

2) Если в наборе повторяется 2 двойки, то: $2\cdot 2+(1001)$
1001 можно получить складывая: $\underset{1000}{1}+\underset{999}{2}+\dots+\underset{501}{500}$ → 500 способов

3) Если в наборе повторяется 2 501-ки, то: $501\cdot 2+(3)$: $3=\frac{1}{2}$ → 1 способ

Заметим, что в таких наборах либо 2, либо 3 числа повторяются.

⇒ Всего способов: $501+500+\dots+1=\frac{501\cdot(502)}{2}=251\cdot 501=125751$

Ob: 125751

№2

Рассмотрим, как числа достраиваются на доску:

1) 5
2) 7
3) 10
4) 14
5) 20
6) $27=3\cdot 9$
7) $35=5\cdot 7$
8) $44=4\cdot 11$
9) $54=9\cdot 6$
10) $65=5\cdot 13$
11) $77=11\cdot 7$

Пусть 5 – первое число на доске

Заметим, что после 2-го числа четные номера чисел имеют вид: при $2n$: $n(2n+3)$

Нечетные после 3-го числа имеют вид:
при $2n+1$: $(2n+1)(n+2)$

Докажем по индукции, что четные ходы имеют вид $n(2n+3)$, нечетные ходы: $(2n+1)(n+2)$

База: при $4=2\cdot 2$: $2(4+3)=14$
при $5=5\cdot(2+2)=20$ – верно

Переход: пусть верно для $2n$ и $2n+1$

Тогда $2n+2$ ход будет иметь: $2(2n+1)(n+2)-(n(2n+3))=$

$=2(2n^2+4n+n+2)-2n^2-3n=4n^2+10n+4-2n^2-3n=2n^2+7n+4=a$

по предположению индукции:
при $2n+2$: $(n+1)(2n+2+3)=2n^2+5n+2n+5=2n^2+7n+5=b$

$a+1=b$

⇒ b – наименьшее составное, которое следует после a

⇒ при $2n+2$: b

Тогда при $2n=98$, $n=49$

Будет ответ: $49(98+3)=4949$

Ob: 4949

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	1	0	3	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$x_1 \cdot x_2 = -1$ $\quad x_3 \cdot x_4 = -1$

$x_1 + x_2 = 4$ $\quad x_3 + x_4 = 5$

$x_1 = 2+\sqrt{5}$ $\quad x_3 = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$

$x_2 = 2-\sqrt{5}$ $\quad x_4 = \frac{5-\sqrt{29}}{2}$

$g(x_1) = x_1^2 - 5x_1 - 1$

$g(x_2) = (4-x_1)^2 - 5(4-x_1) - 1 = x_1^2 - 3x_1 - 5$

$f(x_3) = x_3^2 - 4x - 1$

$f(x_4) = x_3^2 - 6x_3 + 4$

$f(x_3) + f(x_4) = x_3^2 + x_4^2 - 4(x_3+x_4) - 2 =$

$= 25 + 2 - 20 - 2 = 5$

$f(x_4) = 5 - f(x_3)$

$g(x_1) + g(x_2) = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 - 5(x_1+x_2) - 2 =$

$= g(x_1) + g(x_2) = -4$

$F = (g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4) =$

$= \frac{1}{4}\left((2+\sqrt{5} - \frac{5+\sqrt{29}}{2})^2 (2+\sqrt{5} - \frac{5-\sqrt{29}}{2})\right)^3 \left(\frac{5+\sqrt{29}}{2} - (2+\sqrt{5})\right)\left(\frac{5+\sqrt{29}}{2} - (2-\sqrt{5})\right) +$

$+ \frac{1}{4}\left((2-\sqrt{5} - \frac{5+\sqrt{29}}{2})^2 (2-\sqrt{5} - \frac{5-\sqrt{29}}{2})\right)^3 \left(\frac{5-\sqrt{29}}{2} - (2+\sqrt{5})\right)\left(\frac{5-\sqrt{29}}{2} - (2-\sqrt{5})\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{5+\sqrt{29}}{2} - (2-\sqrt{5})\right)\left((2+\sqrt{5} - \frac{5+\sqrt{29}}{2})^2 (2+\sqrt{5} - \frac{5-\sqrt{29}}{2})\right)^3 -$

$g(x_1) = x_1^2 - 5x_1 - 1 = (2+\sqrt{5})^2 - 5(2+\sqrt{5}) - 1 = 4 + 4\sqrt{5} + 5 - 10 - 5\sqrt{5} - 1 = -\sqrt{5} - 2$

$g(x_2) = x_1^2 - 3x_1 - 5 = (2+\sqrt{5})^2 - 3(2+\sqrt{5}) - 5 = 4 + 4\sqrt{5} + 5 - 6 - 3\sqrt{5} = \sqrt{5} + 3$

$f(x_3) = x_3^2 - 4x - 1 = \frac{1}{4}(5+\sqrt{29})^2 - 2(5+\sqrt{29}) - 1 = \frac{1}{4}(25 + 10\sqrt{29} + 29) - 8(5+\sqrt{29}+4) =$

$= \frac{1}{4}(54 + 10\sqrt{29} - 8 - 72 - 8\sqrt{29}) = \frac{1}{2}(27 + 2\sqrt{29} - 36) = \frac{1}{2}(\sqrt{29} - 9)$

$f(x_4) = x_3^2 - 6x_3 + 4 = \frac{1}{4}(25 + 10\sqrt{29} + 29) - 3(5+\sqrt{29}) + 4 = \frac{1}{4}(54 + 10\sqrt{29} - 12(5+\sqrt{29}) + 16 =$

$= \frac{1}{4}(70 + 10\sqrt{29} - 60 - 10\sqrt{29}) = \frac{1}{4}(10 - 2\sqrt{29}) = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{29})$

$(g(x_1))^3 \cdot f(x_3) = -(\sqrt{5}+2)^3 \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{29} - 9) = -\frac{1}{2}(5\sqrt{5} + 3 \cdot 25 + 3 \cdot \sqrt{5} \cdot 4 + 8)(\sqrt{29} - 9) =$

$= -\frac{1}{2}(17\sqrt{5} + 38)(\sqrt{29} - 9) = -\frac{1}{2}(17\sqrt{5 \cdot 29} - 9 \cdot 17\sqrt{5} + 38\sqrt{29} - 9 \cdot 38)$

$(g(x_2))^3 \cdot f(x_4) = (\sqrt{5}+3)^3 \frac{1}{2}(\sqrt{29} - 5) = \frac{1}{2}(5\sqrt{5} + 3 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot \sqrt{5} \cdot 9 + 27)(5 - \sqrt{29}) =$

$= \frac{1}{2}(32\sqrt{5} + 72)(5 - \sqrt{29}) = \frac{1}{2}(32 \cdot 5\sqrt{5} - 32\sqrt{5 \cdot 29} - 72\sqrt{29} + 72 \cdot 5)$

$F = \frac{1}{2}(-\sqrt{5 \cdot 29}(32 + 72) + \sqrt{29}(-38 - 72) + \sqrt{5}(160 + 153) + 72 \cdot 5 + 9 \cdot 38) =$

$= -\frac{1}{2}(\sqrt{145} \cdot 49 + 110\sqrt{29} - \sqrt{5} \cdot 313 - 702)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	8	5	8	2	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

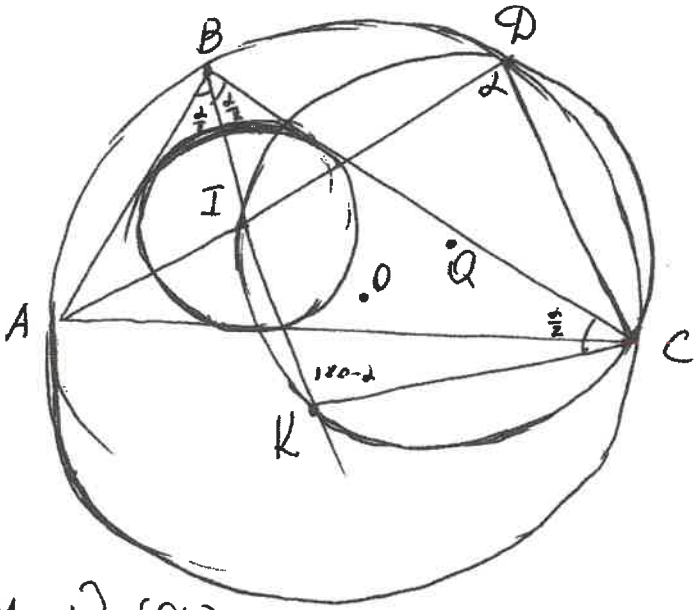
1	2	3	4	5	6	Σ
16	12	20	20	2	//	70

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4.

Дано: $(\Omega(I;R))$
I-центр окр-ти, вписанной в неравнобедренный $\triangle ABC$;
Луч AI пересекает окр-ть, описанную около $\triangle ABC$ в D; $(\Omega_1(O;r))$
Окр-ть, проходящая ч/з C, D, I вторично пересекает луч BI в K $(\Omega_2(Q;R'))$

Д-ть: $BK=CK$.



Д-во:

Для окр-ти $\Omega_1(O;r)$: $\angle ABC=\angle ADC$ - опираются на 1 дугу окр-ти.
Пусть $\angle ABC=\angle ADC=\alpha$
I-центр окр-ти, вписанной в $\triangle ABC$ → BI-бис-са $\angle ABC$ →
→ $\angle ABI=\angle CBI=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{\alpha}{2}$;

Для окр-ти $\Omega_2(Q;R')$ CDIK - вписан в окр-ть → $\angle IKC+\angle IDC=180°$ →
→ $\angle IDC=180°-\angle IKC$; $\angle IKC=180°-\angle IDC=180°-\alpha$

Сумма внутренних углов $\triangle$ равна 180° →
→ для $\triangle BCK$: $\angle BCK=180°-(180°-\alpha)-\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}=\angle CBK$ → $\triangle BKC$ - р/б →
→ $BK=CK$. ЧТД.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	8	5	8	2	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

x_1 и x_2 - корни квадратного трехчлена $f(x)=x^2-2x-1$;

x_3, x_4 - корни для $g(x)=x^2-3x-1$

Найти все возможные значения выражения $(g(x_1))^3 \cdot f(x_3)+(g(x_2))^3 f(x_4)$

Решение:

• Для $f(x)=x^2-2x-1$; $x^2-2x-1=0$; $D=4+4=8$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2} \\ x_2=\frac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2} \end{array}\right.$$ ↕ или все наоборот

• Для $g(x)=x^2-3x-1$; $x^2-3x-1=0$; $D=9+4=13$

$$\left[\begin{array}{l} x_3=\frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ x_4=\frac{3-\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$$ ↕ или все наоборот

Найдём $(g(x_1))^3$ и $(g(x_2))^3$:

$(g(x_1))^3=\left((1+\sqrt{2})^2-3(1+\sqrt{2})-1\right)^3=(1+2\sqrt{2}+2-3-3\sqrt{2}-1)^3=$

$=(-\sqrt{2}-1)^3=-(1+\sqrt{2})^3=5\sqrt{2}+7$

$(g(x_2))^3=\left((1-\sqrt{2})^2-3(1-\sqrt{2})-1\right)^3=(1-2\sqrt{2}+2-3+3\sqrt{2}-1)^3=$

$=(\sqrt{2}-1)^3=5\sqrt{2}-7$

Найдём $f(x_3)$ и $f(x_4)$:

$f(x_3)=\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^2-2\cdot\frac{3+\sqrt{13}}{2}-1=\frac{22+6\sqrt{13}}{4}-3-\sqrt{13}-1=$ ~~$\frac{11+3\sqrt{13}}{2}-\sqrt{13}$~~

$=5{,}5+1{,}5\sqrt{13}-4-\sqrt{13}=1{,}5+\frac{1}{2}\sqrt{13}$

$f(x_4)=\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^2-2\cdot\frac{3-\sqrt{13}}{2}-1=\frac{22-6\sqrt{13}}{4}-3+\sqrt{13}-1=5{,}5-4-1{,}5\sqrt{13}+\sqrt{13}=$

$=1{,}5-0{,}5\cdot\sqrt{13}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	8	5	8	2	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1 (продолжение)

Тогда значение выражения

$(g(x_1))^3 \cdot f(x_3) + (g(x_2))^3 \cdot f(x_4)$

может принимать значения:

1). $(5\sqrt{2}+7)\cdot(1,5+0,5\sqrt{13}) + (5\sqrt{2}-7)(1,5-0,5\sqrt{13}) =$

$= 5\sqrt{2}(1,5+0,5\sqrt{13}+1,5-0,5\sqrt{13}) + 7(1,5+0,5\sqrt{13}+0,5\sqrt{13}-1,5) =$

$= 15\sqrt{2}+7\sqrt{13}$

2) $(5\sqrt{2}-7)(1,5+0,5\sqrt{13}) + (5\sqrt{2}+7)(1,5-0,5\sqrt{13}) =$

$= 5\sqrt{2}\cdot(1,5+0,5\sqrt{13}+1,5-0,5\sqrt{13}) + 7(1,5-0,5\sqrt{13}-1,5-0,5\sqrt{13}) =$

$= 15\sqrt{2}-7\sqrt{13}$

Других значений нет.

Ответ: $15\sqrt{2} \pm 7\sqrt{13}$

№2.

Сначала на доске 2 числа: 4 и 6,

Очередное число X_n - наименьшее составное число, большее $2X_{n-1} - X_{n-2}$

Какое число будет 100-м?

Решение:

Выпишем первые числа:

4; 6; 9; 14; 20; 27; 35; 44; 54; 65; 77; 90; 104; 119...

2 3 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Пусть третье число в последовательности - это x, заметим, что дальше идет:

$x+5$; $x+5+6$; $x+5+6+7$; $x+5+6+7+8$; $x+5+6+7+8+9$... дальше будет?

а почему так и

Лист 3 из 6

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Тогда
100-е число
можно представить как:

$X+5\cdot(100-9)+\underbrace{1+2+3+4+5+\ldots+Y}_{100-4}$ ← это мы можем представить как сумму ариф. прогрессии. Назовем ее S.

Найдем y: $y = 1+95 = 96$

Найдем S: $S = \frac{1+96}{2}\cdot 96 = 97\cdot 48 = 4656.$

Подставим $X=9$ и найдем наше 100-е число:

$9+5\cdot 97+4656 = 4665+485 = 5150$

Ответ: 5150

№3

У скольких наборов из 4 натуральных чисел с суммой 1001 среди чисел есть равные?

Тогда у нас должно быть хотя бы 2 одинаковых (равных) числа.

Представим их сумму как: $2a+b+c=1001$

$2a$ - точно четное число.

По условию числа натуральные → каждое число ≥ 1

Рассмотрим первые случаи:

- $a=1$; $2a+b+c=1001 \rightarrow b+c=999$

  $999 = 1+998 = 2+997 = \ldots = 499+500$ - 499 вариантов
- $a=2$; $2a+b+c=1001 \rightarrow b+c=997$

  $997 = 1+996 = 2+995 = \ldots = 498+500$ - 498 вариантов →

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	8	5	8	2	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамках справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3 (продолжение)

• $a=3$; $a+b+c=1001 \to b+c=995$

$995=1+994=2+993=497+498$ (497 вариантов)

$b+c$ может принимать значения:

$3; 5; 7; \ldots; 999 \leftarrow \frac{999-3}{2}+1=499$ вариантов*

Ранее у нас получилось, что:

$c+b=999 \to 499$ вариантов

$c+b=997 \to 498$ вариантов

$b+c=995 \to 497$ вариантов

Заметим, что кол-во вариантов представляет собой арифметическую прогрессию с шагом 1. Её наибольший элемент равен 499, а наименьший равен 1. Всего элементов 499*.

Найдем сумму этой прогрессии:

$\frac{1+499}{2} \cdot 499 = 250 \cdot 499 = 124750$

Ответ: 124750.

№5

Найти все тройки $(a; b; c)$ натуральных чисел, для которых

$$a^2+b^2=(abc-1)^2$$

Сумма кубов может оканчиваться любой цифрой, а квадрат может оканчиваться на 0; 1; 4; 5; 6; 9.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 5 | 8 | 2 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 5 (продолжение)

Рассмотрим случаи:

• квадрат оканчивается на 1

авс-1 оканчивается либо на 1 → авс оканчивается 0, либо на 9 → авс оканчивается на 8

Приведу примеры:

~~(0;0;0); (0;1;1); (0;1;0); (1;00); (1;0;1)~~; (2;1;2); (1;2;2).

Числа натуральные → > 0

~~Пример~~

$a^a + b^b$ растет быстрее, чем $ab \cdot c$, где c-нат. число → дальше мы не получим ответа.

Ответ: (2;1;2)
(1;2;2)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	8	4	8	4	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1. По условию: x_1, x_2 - корни $f(x)$; x_3, x_4 - корни $g(x)$
Найти все зн: $(g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4)$
Заметим, что $f(x) = x^2 - 2x - 1$, $g(x) = x^2 - 3x - 1$.
Тогда становится ясно, что $f(x) - x = g(x)$ или $g(x) + x = f(x)$
Тогда для нахождения заменим $(g(x_1))^3 = (f(x_1) - x_1)^3$, а $(g(x_2))^3 = (f(x_2) - x_2)^3$
Но по усл. x_1, x_2 - корни $f(x) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) = 0$.
Получаем:
$-x_1^3 \cdot f(x_3) + (-x_2)^3 \cdot f(x_4)$

Заметим $f(x_3) = g(x_3) + x_3$
$f(x_4) = g(x_4) + x_4$
Т.к x_3, x_4 - корни $g(x) \Rightarrow$
$g(x_3) = g(x_4) = 0$.

$\Downarrow$

$(-x_1)^3 \cdot x_3 - (x_2)^3 \cdot x_4 =$
$= -(x_1^3 \cdot x_3 + x_2^3 \cdot x_4)$

Найдем корни x_1, x_2:
$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$
$D = 4 + 4 = 8$ $x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} =$
$= 1 \pm \sqrt{2}$

Тогда найдем все возможные зн.
Т.к x_1 может быть равен $1+\sqrt{2}$, так и $1-\sqrt{2}$
Аналогично для x_3 x_4.

Найдем корни x_3, x_4:
$g(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 1 = 0$
$D = 9 + 4 = 13$ $x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} =$
$= \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$

1	2	3	4	5	6
20	6	20	20	2	68

Найдем все возможные значения.

1): $\frac{1}{2}\left((1+\sqrt{2})^3 \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right) + (1-\sqrt{2})^3 \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right)\right)$

2): $-\left((1-\sqrt{2})^3 \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right) + (1+\sqrt{2})^3 \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right)\right)$

3): ~~$-\left((1+\sqrt{2})^3 \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right) + (1-\sqrt{2})^3 \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)\right)$~~

4): ~~$-\left((1+\sqrt{2})^3 \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right) + (1+\sqrt{2})^3 \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)\right)$~~

Для начала вычислим
$(1+\sqrt{2})^3 = (7 + 5\sqrt{2})$
$(1-\sqrt{2})^3 = (7 - 5\sqrt{2})$

1): $\frac{1}{2}\left((7+5\sqrt{2})\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right) + (7-5\sqrt{2})\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right)\right) = \frac{21}{2} + \frac{15\sqrt{2}}{2} + \frac{7\sqrt{13}}{2} + \frac{5\sqrt{26}}{2}$
$+ \frac{21}{2} - \frac{15\sqrt{2}}{2} - \frac{7\sqrt{13}}{2} + \frac{5\sqrt{26}}{2} = (21 + 5\sqrt{26})$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	8	4	8	4	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2): $-((7-5\sqrt{2})(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2})+(7+5\sqrt{2})(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}))=-(\frac{21}{2}-\frac{15\sqrt{2}}{2}+\frac{7\sqrt{13}}{2}-\frac{5\sqrt{26}}{2}$

$+\frac{21}{2}+\frac{15\sqrt{2}}{2}-\frac{7\sqrt{13}}{2}-\frac{5\sqrt{26}}{2})=-(21-5\sqrt{26})$

Получаем значения: $-21-5\sqrt{26}$ и $5\sqrt{26}-21$.

Отв: $-21-5\sqrt{26}; 5\sqrt{26}-21$

3) Пусть a - 1 число, b - 2, c - 3, d - 4. $a, b, c, d \in N$.

$a+b+c+d = 1001$.

Найдем всего способов:

представим ~~число~~ число 1001 из суммы 1

$\underbrace{1+1}_{a}\,|\,\underbrace{+1}_{b}\,|\,\underbrace{+1+1}_{c}\,|\,\underbrace{+1+\ldots+1}_{d} = 1001$.

Тогда способов разделить его на 4 части (4 числа a, b, c, d) будет:

C_{1000}^{3}. Это получилось т.к. нужно иметь 3 перегородки и поставить 3 перегородки между числом, а 1000 - потому что $a, b, c, d \in N$ (т.е. не равны 0)

Всего способов: $C_{1000}^{3} = \frac{1000!}{997! \cdot 3!} = \frac{998 \cdot 999 \cdot 1000}{6}$

Способов, когда $a \neq b \neq c \neq d$:

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	8	4	8	4	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2. 4, 6, 9, 13.

Найдем x_3: $x_3 > 2x_{n-1} - x_{n-2}$, $x_3 > 2 \cdot 6 - 4$, $x_3 > 8$

по скольку x_3 - наименьш. состав $\Rightarrow x_3 = 9$.

Найдем x_4: $x_4 > 18 - 6$, $x_4 > 12 \Rightarrow x_4 = 13$

Заметим, что разница м/у x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4 возрастает на один.

$2 \to 3 \to 4$.

Рассмотрим почему так: $x_n = 2 \cdot x_{n-1} - x_{n-2} + 1$

Поймем, что $2x_{n-1} - x_{n-2} = x_{n-1}$ (по скольку начинаем с 4 и 6) а м/у ними разн. 2.

~~$x_{100} = 99 \cdot x_1 + 2 \cdot 99$~~

$4; 4+2; 4+3+2; 4+4+3+2; \ldots x_{100}$

~~тогда обозначим~~

$x_{100} = 4 + S_{99} = 4 + \frac{a_1 + a_{99}}{2} \cdot 99$

$S_{99} = \frac{2 + 98}{2} \cdot 99 = 50 \cdot 99 = 4950$

$99 \times 50 = 4950$

$x_{100} = 4950 + 4 = 4954$

Отв: 4954.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	8	4	8	4	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5. $(a, b, c) - ?$ $a, b, c \in N$.

$a^3 + b^3 = (abc - 1)^2$

Заметим, что четность будет везде изменяемой: если a, b, c - четн $\Rightarrow$

$(\text{четн})^3 + (\text{четн})^3 = (\text{четн} - 1)^2 \Rightarrow abc - 1 \neq \text{четн}$.

получаем нечетн.: (нечет·нечет = нечет.)

Заметим, что если хотя бы одно из чисел четн: abc - четн $\Rightarrow$

$(abc - 1)^2$ - нечетн.

или a четн - b-нечетн

или a-нечетн - b-четн.

Подберем:

$a = 2 \Rightarrow b$ = нечетн. $\therefore 2^3 + b^3 = (2 \cdot b \cdot c - 1)^2$

если $b = 1, c = 2 \Rightarrow 2^3 + 1^3 = (2 \cdot 1 \cdot 2 - 1)^2 \Rightarrow 9 = 9$

$(a, b, c) = (2; 1; 2)$

Если $b = 2$: $\Rightarrow a$ - нечетн.

если $a = 1, c = 2 \Rightarrow 9 = 9$

$(a, b, c) = (1; 2; 2)$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Теперь докажем, что больше нет троек.

$(abc-1)^2 = a^2b^2c^2 - 2abc + 1$

$a^3 + b^3 = a^2b^2c^2 - 2abc + 1$

$a(a^2 - ab^2c^2 - 2bc) + b^3 - 1 = 0$

$a(a^2 - ab^2c^2 - 2bc) = 1 - b^3$

Если $b = 1 \Rightarrow a(a^2 - ab^2c^2 - 2bc) = 0$

$a^2 - bc(abc - 1) = 0$

$a^2 = bc(abc - 1)$ $\quad a^2 = c(ac - 1)$

$a^2 = c^2a - 1$

$a(a - c^2) = 1 \Rightarrow a = 2;\ c = 2;$

Аналогично для b:

$b(b^2 - a^2bc^2 - 2ac) + a^3 - 1 = 0$

$\Downarrow$

$a = 1;\ b = 2;\ c = 2;$

Заметим, что при $a > 2$ ~~b~~ нет реш.

$a(a^2 - ab^2c^2 - 2bc) = 1 - b^3$ нет реш.

Аналогично, при $b > 2$:

$b(b^2 - a^2bc^2 - 2ac) = 1 - a^3$ нет реш $\Rightarrow$

имеет только 2 реш. $(a,b,c) = (2;1;2) \pm (1;2;2)$

Вариант № 1

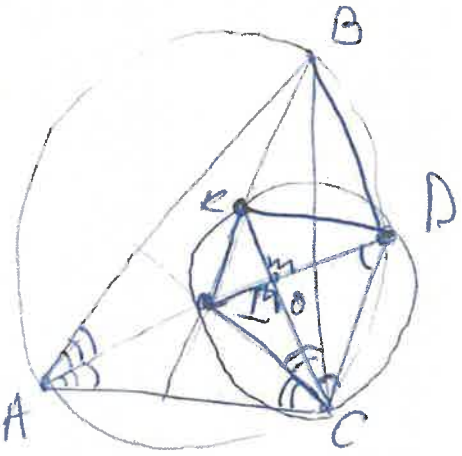
M	A	0	0	0	1	8	4	8	4	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Рассмотрим $\triangle IKDC$:
по скольку по усл. сказано, что $\triangle IDC$ описан и окр. пересек повторно $BI = K \Rightarrow IKDC$ - опис.

по скольку $IKDC$ - описан: 4-х уг.

$\angle KIC + \angle KDC = 180°$

$\angle IKD + \angle IKD = 180°$

П-дем ID, $KC \Rightarrow$ т. O - центр опис. окр.

$OK = OD = OC = OI$. $\Rightarrow \triangle KOD$, $\triangle DOC$, $\triangle IOC$ и $\triangle KIO$ - р/б $\Rightarrow$ углы при осн равны

$\angle IOC = \angle KOD$ (~~равно~~ вертикальные)

$KO = OC = IO = OD \Rightarrow \triangle KOD = \triangle IOC$

Аналогично $\triangle KIO = \triangle COD$

~~по скольку~~ противолеж. углы равны 180° ($\angle KDC$ - опис)

а также ~~$\triangle$ равны~~ $\angle IKC = \angle KCD \Rightarrow$

$IK \parallel CD$, Аналогично $\angle DIC = \angle KDI \Rightarrow$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	8	4	8	4	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

IKDC - ~~квадрат~~ прямоугольн.

D - сер. BD

Заметим, что BKCD ~~п/п~~ (~~BD~~ KC ~~BK=CD~~)

BI || DC

Рассмотрим △ KBD и △ KDC:

Они равны (I) $\Rightarrow BK = CK$

ч.т.д

Лист 7 из 7

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	8	1	2	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа и рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	6	2	///	68

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Т.к. C принадлежит гиперболе $y=\frac{1}{x}$, то ордината $y_C = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$; Пусть $(x_a; y_a)$ – координаты т. A, $(x_b; y_b)$ – коорд. т. B. Т.к. ~~оба~~ лежит на гиперболе $y=\frac{1}{x}$ и на прямых $y=2x+b_1$, $y=\frac{1}{2}x+b_2$ соотв., то составим и решим системы:

$$\begin{cases} y_b = \frac{1}{2}x_b + b_2, \\ y_b = \frac{1}{x_b}; \end{cases} \quad \begin{cases} y_a = 2x_a + b_1, \\ y_a = \frac{1}{x_a}; \end{cases}$$

По условию C лежит на прямых $y=2x+b_1$ и $y=\frac{1}{2}x+b_2$. Значит $-\frac{1}{2} = 2(-2)+b_1$ и $-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(-2)+b_2$, откуда $b_1 = \frac{7}{2}$, $b_2 = \frac{1}{2}$. Решим первую систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{x_b} = \frac{1}{2}x_b + \frac{1}{2}, \\ y_b = \frac{1}{x_b}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_b^2 + x_b - 2 = 0, \\ y_b = \frac{1}{x_b} \end{cases} \quad \begin{cases} (x_b-1)(x_b+2)=0, \\ y_b = \frac{1}{x_b}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_b = -2, \\ x_b = 1, \end{array}\right. \\ y_b = \frac{1}{x_b} \end{cases}$$

Случай $x_b = -2$ – это точка C, т.к. она лежит на прямой $y=\frac{1}{2}x+b_2$

Значит $x_b = 1 \Rightarrow y_b = 1$.

Аналогично найдем x_a и y_a – $x_a = \frac{1}{4}$, $y_a = 4$.

] O – центр опис. окр. $\triangle ABC$ с коорд. $O(x;y)$. Т.к. O – центр опис. окр. то он равноудален от точек A, B, C. $\Rightarrow$ выполняется:

(подставим координаты точек)

$$\begin{cases} (x-x_a)^2 + (y-y_a)^2 = (x-x_b)^2 + (y-y_b)^2, \\ (x-x_b)^2 + (y-y_b)^2 = (x-x_c)^2 + (y-y_c)^2, \end{cases}$$

Решим систему, раскроем скобки и приведем подобные слагаемые. Получим:

$$\begin{cases} 6x+3y+\frac{9}{4}=0, \\ 1,5x+\frac{1}{16}-6y+14=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x+3y+\frac{9}{4}=0, \\ 27y+\frac{9}{4}-\frac{1}{4}-56=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x+3y+\frac{9}{4}=0, \\ 108y-216=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=2, \\ x=-\frac{11}{8}=-1,375; \end{cases}$$

Ответ: $x=-1,375$; $y=2$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	8	1	2	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

	1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке слева

№2

Рассмотрим n, при которых y_n - максимально. $\exists g = НОД(x_n; x_{n+1})$. $g = (n^2+300; (n+1)^2+300) =$

$= (n^2+300;\ n^2+2n+301) = (n^2+300; 2n+1)$ - по св-м НОД. Предположим, что $g>1$ ($g=1$, например при $n=1$). Тогда $g : p$, где p - прост.

Рассмотрим 2 случая:

1) $300 : p$.

Тогда $n^2 : p$, т.к. $(n^2+300) : p$ и $(n+1)^2 : p$, т.к. $((n+1)^2+300) : p$.

Но p - простое $\Rightarrow$ либо $n : p$, $(n+1) \not: p$, либо $n \not: p$, $(n+1) : p$.

Значит либо $n^2 : p$, либо $(n+1)^2 : p$ - противоречие, т.к. и $n^2 : p$, и $(n+1)^2 : p$.

2) $300 \not: p$.

Если $n^2 : p$, то раз $g : p \Rightarrow$ ~~верно~~ $300 : p$ - противоречие $\Rightarrow n^2 \not: p$.

Аналогично $(n+1)^2 \not: p$. Раз p - простое, то $n \not: p$, $(n+1) \not: p$.

Тогда заметим, что $(2n+1;\ n^2+300) = g = (2n^2+n;\ n^2+300;\ 2n+1) =$

$= (n-600;\ 2n+1) = (n+1;\ 1201) = g$. Значит $g \le 1201$.

Пример, когда $g = 1201$ - $n = 600$.

$x_n = 600^2 + 300 = 360300$

$x_{n+1} = 601^2 + 300 = 361201 + 300 = 361501$.

$x_n : 1201$, $x_{n+1} : 1201$. $(x_n; x_{n+1}) = 1201$.

Ответ: 1201

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	8	1	2	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

Заметим, что исходная задача равносильна подсчету кол-ва троек натуральных чисел a, b, c, таких, что $a+b+c=1001$, $a>b$, $a>c$, a, b, c - попарно различны. Заметим, что если (a,b,c) удовлетворяют условиям, то (a,c,b) также удовлетворяют $\Rightarrow$ Без ограничения общности посчитаем кол-во таких троек, где $a>b>c$. Заметим, что если зафиксировать a, и взять такое b, что (a,b,c) будет удовлетворять условиям и при этом b - максимальное, то кол-во таких троек $= \left\lfloor \frac{b-c+1}{2} \right\rfloor$ ($\lfloor x \rfloor$ - число x, округленное вниз). Можно действительно, ведь $b>c$, то из b можно вычесть (а к c прибавить) 1 ровно $\left\lfloor \frac{b-c+1}{2} \right\rfloor$ раз, чтобы выполнялось $b'>c'$, где $b' = b - \left\lfloor \frac{b-c+1}{2} \right\rfloor$, $c' = c + \left\lfloor \frac{b-c+1}{2} \right\rfloor$. (больше нельзя, ведь будет $c' \geq b'$ - такие тройки не рассматриваем). Заметим, что если $a \leq 334$, то $a+b+c \leq 334+333+332 = 1000 \Rightarrow a \geq 334$. Рассмотрим 2 случая:

1) $335 \leq a \leq 500$

В таком случае тройка (с макс. возможным b) имеет вид $(a, a-1, 1002-2a)$. Значит при фикс. a трек будет $\left\lfloor \frac{a-1-1002+2a+1}{2} \right\rfloor$.

Заметим, что при нечетных a трек будет $1+3 \cdot \frac{a-335}{2}$, а при четных $3+3 \cdot \frac{a-336}{2}$. Тогда по сумме сумм. трек. получается $1+3+4+6+7+9+\ldots+248+249 < 4+10+14+\ldots+496 = \frac{500 \cdot 83}{2} = 250 \cdot 83$

2) $501 \leq a$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	8	1	2	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Пишите только то, что написано с этой стороны листа и ровно с этого края

в таком случае тройка с макс. возможным b будет иметь вид: $(a;\ 1000-a-1;\ 1)$, откуда $1000-a-1>1 \Rightarrow a<998 \Rightarrow a \le 998$.

Тогда кол-во таких троек $= 249+249+248+248+\dots+1+1$ (получим из того, что при макс. b кол-во троек $= \left[\frac{b-c+1}{2}\right]$), что равно:

$$2\cdot\frac{250\cdot 249}{2} = 250\cdot 249 = 750\cdot 83$$

Тогда всего троек с ограничением $a>b>c$ - $750\cdot 83+250\cdot 83 = 1000\cdot 83 \Rightarrow$ всего троек, когда их условия - $2000\cdot 83 = 166000$

Ответ: 166000

№5

$\frac{3^m+2}{3^n+2} = a$. Т.к. $m>n$, то $3^m+2 > 3^n+2 \Rightarrow a>1$.

$3^m+2 = a(3^n+2)$;

$3^m - 3^n a = 2(a-1)$; т.к. $m>n$, то

$3^n(3^{m-n}-a) = 2(a-1)$. $n\in N$, $2 \not\vdots 3^n \Rightarrow (a-1)\vdots 3 \Rightarrow (a-1)\vdots 3^n$

$a-1 = 3^n b$, $b\ge 1$, $b\in N$. Тогда $a = 3^n b - 1$. $\Rightarrow$

$3^n(3^{m-n} - 3^n b + 1) = 2\cdot 3^n b$

$3^{m-n} - 3^n b + 1 = 2b$. $\frac{3^{m-n}+1}{3^n+2} = b$. Если $m>n$, то $m-n>n$, то $3^n+2 > 3^{m-n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3^{m-n}+1}{3^n+2} \notin Z \Rightarrow n \le m-n \Rightarrow 3^n(3^{m-2n}-b) = 2b-1$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	8	1	2	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Шифровается только то, что записано в этой строке листа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

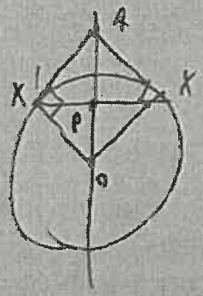
Тогда $(2b-1) : 3^n \Rightarrow 2b-1 = 3^n c_1, c \in \mathbb{N}$.

$b = \frac{3^n c + 1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^n \left(3^{m-n} - \frac{3^n c + 1}{2}\right) = 3^n c_1$

$2 \cdot 3^{m-n} - 3^n c - 1 = c$. Поступая таким образом, дойдем до того, когда $n \le m - n^2 \Rightarrow m > n^2$, ч.т.д.

№4



В случае, когда секущая – касательная, из подобия: $OP = \frac{r^2}{AO}$, где P $\in r \cap AO$, r – радиус окружности. А любые секущие проходят через P, ведь $\frac{r^2}{AO}$ – фикс. Доказано

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	5	0	5	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	6	20	20	2	//	68

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$f(x)=x^2-2x-1$

$D=4+4=8$

$\begin{cases} x=1+\sqrt{2} \\ x=1-\sqrt{2} \end{cases}$ ← корни x_1 и x_2

$g(x)=x^2-3x-1$

$D=9+4=13$

$\begin{cases} x=\frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ x=\frac{3-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$ ← корни x_3 и x_4

$\begin{cases} f(x)=x^2-3x-1+x=g(x)+x \\ g(x)=x^2-2x-1-x=f(x)-x \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ исходное выражение можно представить как:

$$(f(x_1)-x_1)^3\cdot(g(x_3)+x_3)+(f(x_2)-x_2)^3\cdot(g(x_4)+x_4)=$$

$$=(-x_1)^3\cdot x_3+(-x_2)^3\cdot x_4 \quad (*)$$

1 случай: $\begin{cases} x_1=1+\sqrt{2} \\ x_2=1-\sqrt{2} \\ x_3=\frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ x_4=\frac{3-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$ Тогда $(*)=(-5\sqrt{2}-7)\frac{(3+\sqrt{13})}{2}+\frac{(5\sqrt{2}-7)}{(3\sqrt{2}-9)}\cdot\frac{(3-\sqrt{13})}{2}=$

$=-5\sqrt{26}-21$

2 сл.: $\begin{cases} x_1=1-\sqrt{2} \\ x_2=1+\sqrt{2} \\ x_3=\frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ x_4=\frac{3-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$ Тогда $(*)=\frac{(5\sqrt{2}-7)(3+\sqrt{13})}{2}+(-5\sqrt{2}-7)\cdot\frac{(3-\sqrt{13})}{2}=$

$=\frac{(5\sqrt{2}-7)(3+\sqrt{13})-(5\sqrt{2}+7)\cdot(3-\sqrt{13})}{2}=$

$=5\sqrt{26}-21$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	5	0	5	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3 случай:

$\begin{cases} x_1 = 1+\sqrt{2} \\ x_2 = 1-\sqrt{2} \\ x_3 = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \\ x_4 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$

Тогда (*) $= \frac{(-5\sqrt{2}-7)\cdot(3-\sqrt{13})+(5\sqrt{2}-7)(3+\sqrt{13})}{2} =$

$= 5\sqrt{26} - 21$

4 случай:

$\begin{cases} x_1 = 1-\sqrt{2} \\ x_2 = 1+\sqrt{2} \\ x_3 = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \\ x_4 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$

Тогда (**) $= \frac{(\sqrt{2}-1)^3\cdot(3-\sqrt{13})+(-1-\sqrt{2})^3\cdot(3+\sqrt{13})}{2} =$

$= \frac{(5\sqrt{2}-7)\cdot(3-\sqrt{13})-(5\sqrt{2}+7)\cdot(3+\sqrt{13})}{2} =$

$= -5\sqrt{26} - 21$

Ответ: $\{-5\sqrt{26}-21;\ 5\sqrt{26}-21\}$

Рассмотрим ряд: 4, 6, 9, 14, 20, 27, 35, 44, 54, 65, 77 ... (№2)

Заметим, что ~~x_n равно~~ каждое следующее число последовательности больше предыдущего на 1, 2, ... до тех пор, пока конструкция $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} + 1$ не станет простым числом, тогда ~~каждое~~ след. число больше предыд. на 2, а последующие за ним числа снова больше своего предыдущего на одно и то же число, увеличивающееся на единицу:

4 $\xrightarrow{+2}$ 6 $\xrightarrow{+3}$ 9 $\xrightarrow{+5}$ 14 $\xrightarrow{+6}$ 20 $\xrightarrow{+7}$ 27 $\xrightarrow{+8}$ 35 $\xrightarrow{+9}$ 44 ...

Значит, если бы $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} + 1$ никогда не давало бы наших простых чисел, $x_{100} = 4 + (2 + \ldots + 100)$ ← наим. прост

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	5	0	5	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

но на самом деле,

$x_{100} = 4 + (2 + \dots + 100) + 2(100 - 2 + 1) \cdot 1 +$

$+ (100 - k + 1) \cdot 1 \dots$, где n, k и последующие числа - это номера позиций чисел в исходной последовательности, которые в результате действия

$x_n = x_{n-1} - x_{n-2} + 1$ дают простые числа

Заметим, что числа в нашей послед. чередуются так:

чет., чет., нечет., чет., чет., нечет., нечет., чет., чет., нечет., нечет. ...

1 2 3 4 6 7 8 9 10 11 12

Простое число нечетное (кроме 2, но 2 не подх., т.к $x_1 = 4$)

, а нечетное число получается только если

x_{n-1} ← четное и x_{n-2} ← четное

Значит простое число p можно представить как

$2(2k) - 2a + 1 = p$

$4k - 2a + 1 = p$

$2(2k - a) + 1 = p$

$2a - b + 1 = p$, a и b четн.

$b = a - (k - 1) = a - k + 1$

$p = a + k$

$2a - (a - k + 1) + 1 = a + k$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	5	0	5	0	2	5

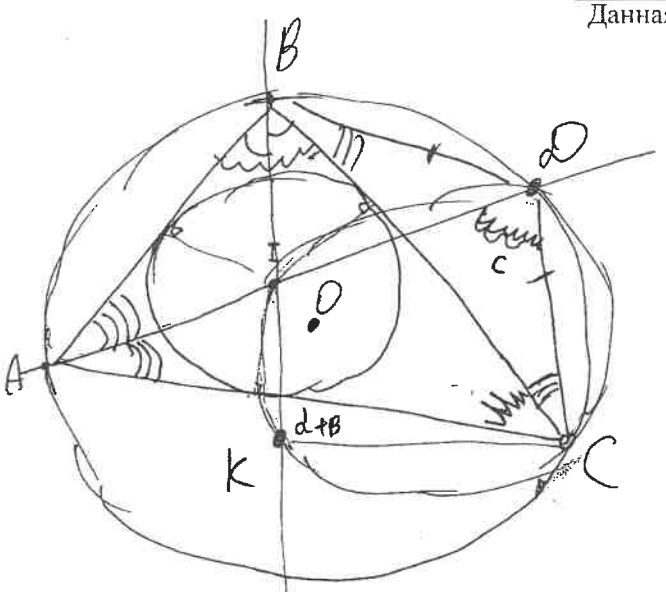
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)



1) I - центр впис. окр. $\triangle ABC \Rightarrow AJ$ - бисс. $\angle A$.

$AI \cap$ окр. $= D \Rightarrow$ по лемме о трезубце:

$BD = DC \Rightarrow \triangle BDC$ - равнобедр. $\Rightarrow \angle DBC = \angle BCD$

2) $\angle DAC$ и $\angle DBC$ опир. на $\smile DC \Rightarrow \angle DAC = \angle DBC = \angle BCD$

3) $\angle ABC$ и $\angle ADC$ опир. на $\smile AC \Rightarrow \angle ABC = \angle ADC$

4) В $\square ABCD$ 4-уг. $IDCK$ - вписанный $\Rightarrow \angle IDC + \angle IKC = 180°$

Из $\triangle ABC$ мы знаем, что $\angle A + \angle C + \angle B = 180°$

$\angle ADC = \angle BAC + \angle ACB = \angle IDC$ (св. п. 3)

$\Rightarrow \angle IKC = 180° - \angle IDC = 180° - \angle BAC + \angle ACB$

Но с другой стороны $\angle BKC = \angle KBC + \angle KCB$, а $\angle KBC = \frac{1}{2}\angle ABC$ (т.к. I - центр впис. окр.) $= \frac{1}{2}\angle ADC \Rightarrow$ ~~$\angle KCB = \angle BKC - \angle KBC =$~~

$\Rightarrow$ пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle ACB = \beta$, $\angle ABK = \angle KBC = \delta$. Тогда

~~$\angle KCB = 180° - (\alpha + \beta)$~~ $\alpha + \beta + 2\delta = 180°$

или $\alpha + \beta + \frac{1}{2}C + x = 180°$, но $\triangle BKC$, где $\angle KCB = x$. $\Rightarrow x = \frac{1}{2}C \Rightarrow \angle KCB = \angle KBC$ значит $\triangle KBC$ равнобед. $\Rightarrow BK = KC$.

Ответ: 4. т.к. 9.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	5	0	5	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

Пусть числа - x_1, x_2, x_3, x_4.

Их сумма $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1001$.

Найти количество наборов, где есть хотя бы 2 одинак. числа.

1) которые начин. с повторяются единицы:

499 наборов:

$1+1+1+998$

$1+1+2+997$

$\vdots$

$1+1+499+500$ ← перебираем до x_3 = ~~перебираем~~ далее перебор - нельзя, т.к. случаи повтор.

2) в которых повтор - двойка:

498 наборов:

$2+2+1+996$

$2+2+2+995$

$2+2+3+994$

$\vdots$

$2+2+498+499$

$\vdots$

499) в которых повтор. 499

$499+499+1+2$ ← 1 набор.

Наборы в случаях 1) - 499) не повт., т.к. в наборах каждого случая определенное число повтор. более чем равно двум раз., а числа x_3 и x_4 не повт. всегда тогда, что $x_3 + x_4 = 1001 - 2x_1$ ← нечетное число.

$499 + 498 + \ldots + 1 = \frac{500 \cdot 499}{2} = 124750$ наб.

Ответ: 124 750 наборов

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	5	0	5	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

$a, b, c \in N$

$a^3+b^3=(abc-1)^2$

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=(abc-1)^2$

← квадрат целого

$c \geq 3$ невозм., т.к. ~~$(a+b)(a^2-ab+b^2)$~~ $a^3+b^3 < (3bc-1)^2$ #

$a^3+b^3 < 9a^2b^2-6ab+1$

Ответ: $a=1, b=2, c=2$

$a=2; b=1; c=2$

~~$a^3+b^3-1=a^2b^2c^2-2abc$~~

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	1	2	0	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	6	2	///	68

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача №1. Часть 1. Решение:

Находим точки A и B

$\begin{cases} y = \frac{1}{x}, \\ y + \frac{1}{2} = 2(x + 2) \end{cases}$ следовательно $A = (\frac{1}{4}; 4)$

$\begin{cases} y = \frac{1}{x}, \\ y + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x + 2) \end{cases}$ следовательно $B = (1; 1)$

Середина отрезка AB

$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) = (\frac{1}{4}; 4)$

Часть 2 этой задачи:

Аналогично середину отрезка CA

$N = (-\frac{7}{8}; \frac{7}{4})$.

Центр описанной окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров.

$\vec{BA} = \{-\frac{3}{4}; 3\}$, $\vec{AC} = \{-\frac{10}{4}; -\frac{3}{2}\}$

Перпендикулярные прямые:

$\begin{cases} y = \frac{5}{2} + \frac{1}{4}(x - \frac{5}{8}) \\ y = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}(x + \frac{7}{8}) \end{cases}$ следовательно $O = (-\frac{11}{8}; 2)$

Ответ: $(-\frac{11}{8}; 2)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	1	2	0	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 2. Решение:

$n^2 + 2n + 301 = n^2 + 300 + 2n + 1$,

тогда НОД $(n^2+300);(n^2+2n+301) =$ НОД $(n^2 + 300; 2n+1) = y$.

Значит $n^2 + 300 \vdots y$, $2n+1 \vdots y$;

$2n^2 + 600 - n(2n+1) \vdots y$; $600 - n \vdots y$.

$2(600-n) + 2n + 1 \vdots y$; $1201 \vdots y$; значит $y <$ 1201 — оценка.

Пример:

$y = 1201$, $n = 600$, $(x_{n+1}; x_n) = (360300; 1201) =$ 1201.

Ответ: 1201

Задача №3. Решение.

Кол-во решений по методу перегородок и шаров ~~C^{3-1}_{1001-1}~~ $C^{3-1}_{1001-1} = C^2_{1000} = 999 \cdot 500$

Исключаем случай совпадения двух чисел: $2X + Y = 1$, $X \in [1; 500]$, исключаем $500 \cdot 3 = 1500$

Из 6 вариантов для каждой тройки только в двух из них у Бори будет наибольшее кол-во орешков. Поэтому: $\frac{999 \cdot 500}{3} - 500 =$ $= 166000$.

Ответ: 166 000

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	1	2	0	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 4. Решение:

Пусть $A = (1; 0)$,

секущая $y = k(x-1) = kx - k$,

центр окружности O равен $(0; 0)$, радиус R

координаты точек пересечения:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ y = kx - k \end{cases}$$

следовательно $x_{12} = \dfrac{k^2 \pm \sqrt{k^2 \cdot R^2 - k^2 + R^2}}{k^2 + 1}$

следовательно $y_{12} = A \cdot \dfrac{\pm \sqrt{k^2 \cdot R^2 - k^2 + R^2}}{k^2 + 1}$.

?!

Координаты симметричной точки:

$x_3 = x_1 = \dfrac{k^2 + \sqrt{k^2 \cdot R^2 - k^2 + R^2}}{k^2 + 1}$,

$y_3 = -y_1 = -k \dfrac{\sqrt{k^2 \cdot R^2 - k^2 + R^2} - 1}{k^2 + 1}$

Уравнение прямой через точки: $(x_3; y_3)$, $(x_2; y_2)$, точка пересечения с $y = 0$

$$\frac{x - x_3}{x_3 - x_2} = \frac{0 - y_3}{y_3 - y_2}, \quad x = \frac{-y_3}{y_3 - y_2} \cdot (x_3 - x_2) + x_3 = 1,$$

не зависит от выбора радиуса окружности и коэффициента наклона прямой, ч. т. д.

Задача 5. Решение:

$$\frac{3^m + 2}{3^n + 2} = 3^{m-n} + \frac{2 - 2 \cdot 3^{m-n}}{3^n + 2}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	1	2	0	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 5. продолжение

Следовательно:

$\frac{1-3^{m-n}}{3^{n+2}}$ = целое

$\frac{3^{m-n}-1}{3^{n+2}} = 3^{m-2n} + \frac{-1-2\cdot 3^{m-2n}}{3^n+2}$; что

$2\cdot 3^{m-2n} + 1 > 3^{n+2}$, невозможно для

$m-2n < n-1$, т.к

$2\cdot 3^{m-2n} + 1 \not< 2\cdot 3^{n-1} + 1 < 3\cdot 3^{n-1} = 3^{n+2}$ следовательно $m-2n \geq n$.

$\frac{2\cdot 3^{m-2n}+1}{3^n+2} = 2\cdot 3^{m-3n} + \frac{1-2^2\cdot 3^{m-3n}}{3^n+2}$.

Аналогично:

$2^2\cdot 3^{m-3n} - 1 > 3^{n+2} \rightarrow 3^{m-3n} \geq 3^n$.

Следовательно $m \geq 4n$

Продолжая итерацию, имеем

$3^{m-(n+1)n} \geq 3^0 \rightarrow m > n^2$, ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 3 | 7 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	6	20	2	//	68

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется ваше умение отвечать на вопросы, а не умение писать

№1

т.к $y=\frac{1}{x}$ и точка C лежит на гиперболе $y=\frac{1}{x}$, то $C(-2;-\frac{1}{2})$

Рассмотрим прямые $y=2x+b_1$ и $y=\frac{1}{2}x+b_2$, т.к точка C лежит на этих прямых, то:

$-\frac{1}{2}=-4+b_1 \Rightarrow b_1=3,5$

$-\frac{1}{2}=-1+b_2 \Rightarrow b_2=0,5$

Значит, наши прямые имеют вид:

$y=2x+3,5$ и $y=\frac{1}{2}\cdot x+0,5$

Найдём точки пересечения прямых с гиперболой:

$$\begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ y=2x+3,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ \frac{1}{x}=2x+3,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ 2x^2+3,5x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0,25 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow A(\frac{1}{4};4)$

$$\begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ y=\frac{1}{2}x+0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ \frac{1}{x}=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ x^2+x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

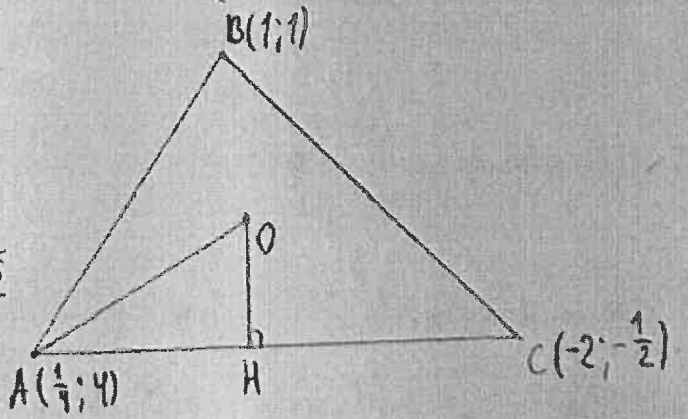
$B(1;1)$

Рассмотрим $\triangle ABC$

$\vec{CB}\{3;\frac{3}{2}\} \Rightarrow |\vec{CB}|=\sqrt{9+\frac{9}{4}}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$

$\vec{CA}\{\frac{9}{4};\frac{9}{2}\} \Rightarrow |\vec{CA}|=\sqrt{\frac{81}{16}+\frac{81}{4}}=\frac{9\sqrt{5}}{4}$

$\vec{AB}\{\frac{3}{4};-3\} \Rightarrow |\vec{AB}|=\sqrt{\frac{9}{16}+9}=\frac{3\sqrt{17}}{4}$



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 3 | 7 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$R_{ABC} = \frac{|AB|}{2\sin C}$, $\cos C = \frac{\vec{CA}\cdot\vec{CB}}{|\vec{CA}|\cdot|\vec{CB}|} = \frac{\frac{23}{4}+\frac{23}{4}}{\frac{3\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{9\sqrt{5}}{4}} = \frac{4}{5}$

Значит, $\sin C = \frac{3}{5}$

$R = \frac{3\sqrt{17}\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 3} = \frac{5\sqrt{17}}{8}$

Пусть O – центр описанной окружности, пусть O имеет координаты $O(x;y)$

Тогда: $|\vec{AO}| = \sqrt{(x-\frac{1}{4})^2+(y-4)^2} = \frac{5\sqrt{17}}{8}$

$|\vec{BO}| = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = \frac{5\sqrt{17}}{8}$

Решим систему:

$$\begin{cases}(x-\frac{1}{4})^2+(y-4)^2 = \frac{425}{64} & (1)\\ (x-1)^2+(y-1)^2 = \frac{425}{64} & (2)\end{cases}$$

$x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}+y^2-8y+16 = x^2-2x+1+y^2-2y+1.$

$1{,}5x-6y = 2-16-\frac{1}{16}$

$1{,}5x-6y = -\frac{225}{16}$

$y = \frac{75}{32}+\frac{x}{4}$ Подставим в (2)

$(x-1)^2+(\frac{43}{32}+\frac{x}{4})^2 = \frac{425}{64}$

$\frac{17x^2}{16}-\frac{85x}{64}-\frac{3927}{1024}\ |\cdot 1024$

$1088\cdot x^2-1360x-3927=0$

$D = 1360^2+4\cdot 1088\cdot 3927 = 2^{16}\cdot 17^2$

$x_1 = -\frac{11}{8}$ $x_2 = \frac{21}{8}$

т.к $\triangle ABC$ – прямоугольный, т.к $\left(\frac{9\sqrt{5}}{4}\right)^2 > \left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{17}}{4}\right)^2$, то

Олимпиада школьников «КЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 3 | 7 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Работа пишется только на одной стороне листа. Все записи должны быть выполнены в рамках страницы

Центр лежит вне $\triangle ABC \Rightarrow x = -\frac{11}{8}$

$y = \frac{75}{32} - \frac{11}{32} = \frac{64}{32} = 2.$

Ответ: $(-\frac{11}{8}; 2)$

№2

$y_n = НОД((n+1)^2+300, n^2+300)$

Применим алгоритм Евклида: $НОД(a;b) = НОД(a-b;b)$.

$y_n = НОД(n^2+2n+301, n^2+300) = НОД(n^2+300, 2n+1)$

Заметим, что $2n+1$ – нечётное число, а значит, если первый член НОД уножить на 2, после НОД не изменится:

$y_n = НОД(2n^2+600, 2n+1)$.

Вычтем из левой части n раз в правую:

$y_n = НОД(600-n, 2n+1) = НОД(600-n, 1201)$, к правой части прибавим левую дважды. Итак $y_n \in 1201$

Приведём пример при котором $y_n = 1201$:

При $n = 600$, $y_{600} = НОД(0; 1201) = 1201$

Ответ: 1201

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 3 | 7 | 2 | 5 |

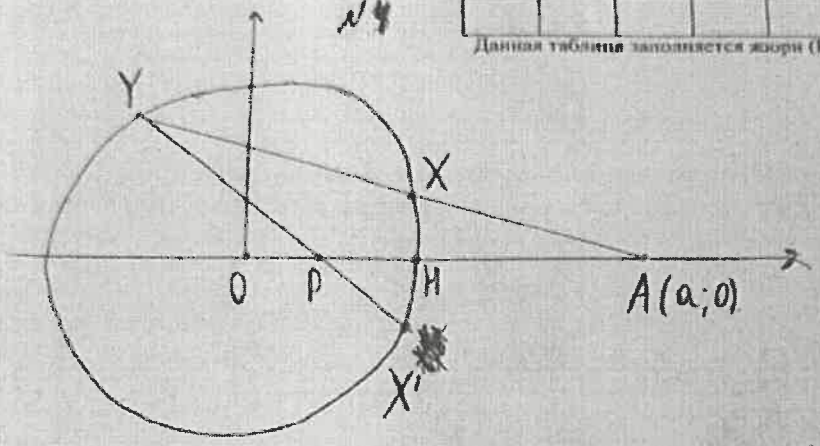
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано в этой строчке листа

№4



т.к X и X' - симметричны, то ~~хорда~~ XX' ⊥ OA и XH = HX'.

Введём систему координат с началом в точке O и ось абсцисс пустим по OA.

Пусть A(a; 0), тогда прямая OY имеет уравнение:

$y = k \cdot (x - a)$

Пусть окружность имеет уравнение:

$x^2 + y^2 = R^2$

Найдём точки пересечения оси с окружностью из уравнения:

$x^2 + k^2(x-a)^2 = R^2$

$(1+k^2) \cdot x^2 - 2ak^2x + a^2k^2 - R^2 = 0$

$x_1 + x_2 = \frac{2ak^2}{1+k^2}$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{a^2k^2 - R^2}{1+k^2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 3 | 7 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Графическая работа должна быть выполнена в двух экземплярах

Тогда $X(x_1; k(x_1-a))$

$Y(x_2; k(x_2-a))$

Значит $X'(x_1; -k(x_1-a))$

Найдём уравнение прямой XY:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y+k(x_1-a)}{k(x_2-a)+k(x_1-a)}$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y+k(x_1-a)}{k(x_2+x_1-2a)}$$

$$y = \frac{k(x_2+x_1-2a)}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1) - k(x_1-a)$$

Найдём абсциссу точки P:

$$\frac{k(x_2+x_1-2a)}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1) = k(x_1-a) \quad | : k \neq 0$$

$$x = \frac{(x_1-a)(x_2-x_1)}{x_2+x_1-2a} + x_1$$

$$x = \frac{x_1x_2 - x_1^2 - ax_2 + ax_1 + x_1x_2 + x_1^2 - 2ax_1}{x_2+x_1-2a}$$

$$x = \frac{-a\cdot(x_1+x_2) + 2x_1x_2}{x_1+x_2-2a}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 3 | 7 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано в этих рамках листа

Т.к. $x_1+x_2=\frac{2ak^2}{1+k^2}$ и $x_1x_2=\frac{a^2k^2-R^2}{1+k^2}$,

то $x=\frac{-a\left(\frac{2ak^2}{1+k^2}+2\cdot\frac{a^2k^2-R^2}{1+k^2}\right)}{\frac{2ak^2}{1+k^2}-2a}$

$x=\frac{-2a^2k^2+2a^2-2k^2}{2ak^2-2a-2ak^2}$

$x=\frac{k^2}{a}$, то есть $P(\frac{k^2}{a};0)$ =>

=> Точка P не зависит от k, а значит и от выбора секущей.

№3

Пусть у Бори x-орехов

У Васи y-орехов.

У Пети z-орехов

$x\neq y,\ y\neq z\quad x>y,\ x>z$

Запишем линейное уравнение в целых числах:

$x+y+z=1001$

$x+y=1001-z$

Частное решение:

$x_ч=1001$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 3 | 7 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано в этом случае

$y_k = -2$.

Тогда $x + y = 1001 - z$

$x_2 + y_2 = 1001 - z$ ⇓

$x - x_1 = -(y - y_2)$

$x - x_1 = -k$ и $y - y_2 = k$

Тогда: $\begin{cases} x = 1001 - k \\ y = k - z \\ z = z \end{cases}$

Заметим, что $k - z \neq z \Rightarrow k \neq 2z$, $1001 - k \neq z \Rightarrow k + z \neq 1001$

и $k - z \neq 1001 - k \Rightarrow 2k - z \neq 1001$

$x > y \Rightarrow 1001 - k > k - z \Rightarrow 2k - z < 1001$

$x > z \Rightarrow 1001 - k > z \Rightarrow k + z < 1001$

№5

т.к $m > n$ и $3^m + 2$ делится на $3^n + 2$, то их

НОД$_1$ $= 3^n + 2$, поскольку $3^m + 2 > 3^n + 2$.

По алгоритму Евклида

НОД$(3^m + 2, 3^n + 2)$ = НОД$(3^n + 2, 3^m - 3^n)$, а это значит, что

$3^m - 3^n$ делится на $3^n + 2$. Значит $3^m - 3^n = t(3^n + 2)$, где t - целое

Лист 7 из 7

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 1 | 9 | 0 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	X	6	//	66

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяться только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

$x_n = n^2 + 300$

$y_n = НОД(x_n; x_{n+1})$

$n \in N$

$y_{max} - ?$

$x_{n+1} = (n+1)^2 + 300$

$НОД(x_n; x_{n+1}) = НОД(x_n; x_{n-1} - x_n) = НОД(n^2+300; 2n+1)$

$2n+1$ - нечетное ; n^2+300 можно умножить на любую степень двойки и НОД останется прежним.

$\Rightarrow НОД(4n^2+1200; 2n+1) =$

$= НОД(4n^2+4n+1200+2; 2n+1) =$

$= НОД((2n+1)^2+1201; 2n+1) = НОД(1201; 2n+1)$

≤ 1201 при $(2n+1)$

$y_{max} = 1201$ при $n = 600$

Ответ: $y_{max} = 1201$ при $n = 600$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 1 | 9 | 0 | 2 | 5 |

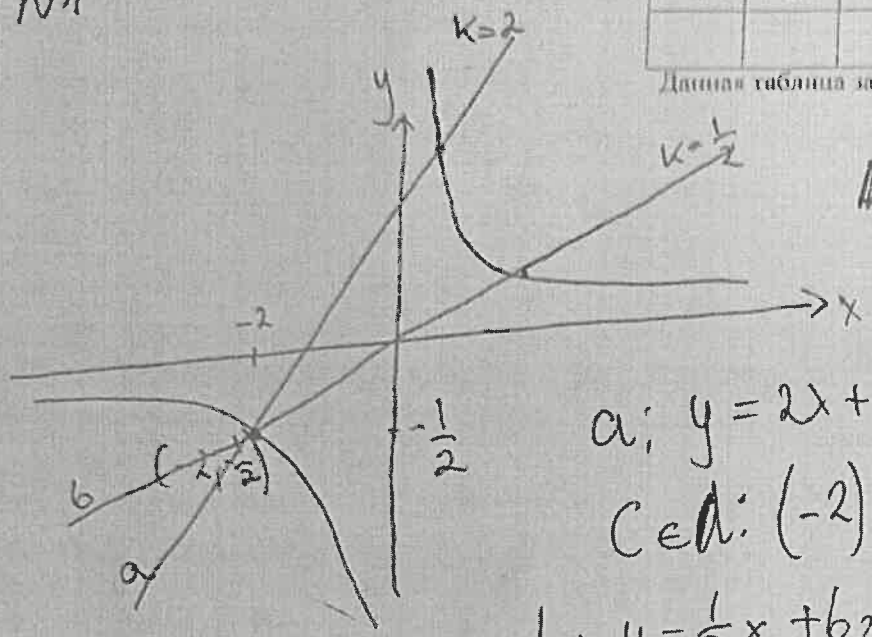
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N1



α : $y = \frac{1}{x}$

a; $y = 2x + b_1$

$C \in a$: $(-2)\cdot 2 + b_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow b_1 = 3{,}5$

b: $y = \frac{1}{2}x + b_2$

$C \in b$: $(-2)\cdot\frac{1}{2} + b_2 = -\frac{1}{2}$; $b_2 = 0{,}5$

$a \cap \alpha$

$2x + 3{,}5 = \frac{1}{x}$

$2x^2 + 3{,}5x - 1 = 0$ $\quad D = 20{,}25$ $\quad x_{1,2} = \frac{-3{,}5 \pm 4{,}5}{2\cdot 2}$

$x_1 = \frac{1}{4}$ — точка A

$x_2 = -2$ — т. C

$b \cap \alpha$

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{x}$

$\frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{2}x - 1 = 0$

$D = 2{,}25$

$x_{1,2} = \frac{-0{,}5 \pm 1{,}5}{2\cdot\frac{1}{2}} = 1;\ -2$ (т. B, т. C)

$\Rightarrow A\left(\frac{1}{4};4\right)$; $B(1;1)$; $C\left(-2;-\frac{1}{4}\right)$

Найдем центр описанной окружности $O(x;y)$

→ на другой странице

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	7	1	9	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано в этой строке листа в рамке справа

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{4}-x\right)^2+(4-y)^2=R^2 \\ (1-x)^2+(1-y)^2=R^2 \\ (-2-x)^2+\left(-\frac{1}{2}-y\right)^2=R^2 \end{cases}$$

Далее, можно решить эту систему уравнения и зная радиус и координаты мы получим ответ на задачу.

Методом перебора в черновике, что решение данной системы может быть только при $x=-\frac{11}{8}$ и $y=2$.

Подставив в систему R стали одинаковы.

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{4}+\frac{11}{8}\right)^2+(4-2)^2=R^2 \\ \left(1+\frac{11}{8}\right)^2+(1-2)^2=R^2 \\ \left(-2+\frac{11}{8}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-2\right)^2=R^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \left(\frac{13}{8}\right)^2+2^2=\frac{425}{64} \\ \left(\frac{19}{8}\right)^2+1^2=\frac{425}{64} \\ \left(\frac{-5}{8}\right)^2+2{,}5^2=\frac{425}{64} \end{cases}$$

Ответ сошелся

Ответ $y=2$

$x=-\frac{11}{8}$

Я понимал, что x дробное и имеет противоположные знаки с y.

$y=1 \dots 2 \dots$

$x=- \dots -\frac{11}{8}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 1 | 9 | 0 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

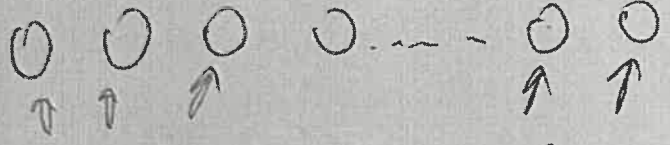
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

Допустим, количество способов можно выбрать 3 разные кучки (разное кол-во орехов), где суммарно 1001 орех.



это орехи, которые надо распределить, их 1001.

Пусть мы ставим две перегородки, чтобы разделить, так как мы дадим, что первому, что второму, а что третьему. Всего мест на перегородки 1000 перегородок всего -2. Порядок не имеет значения. Значит кол-во способов $\frac{1000 \cdot 999}{2} = 500 \cdot 999 = 499\,500$.

Нам не подходят случаи, когда у двух человек одинаковое кол-во орехов. Причем, кол-во вариантов равенства орехов у двух любых человек одинаково в силу симметрии. Посчитаем для одной пары и домножим на 3, чтобы получить все случаи.

То, что у первых двух людей кол-во орехов равно, можем заменить, что мы дадим им $2n$ (четное) кол-во орехов, а остановимся третьему. Всего вариантов выбрать $2n$ орехов: $\frac{1001-1}{2} = 500$ (2, 4, ..., 1000). Значит, итого имеем $49\,8000$ вариантов раздать разное кол-во орехов. Причем один человек может дать больше чем другим →

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 1 | 9 | 0 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

→ продолжение.

В нашем подсчете есть все варианты расстановки $(a; b; c)$, что $a+b+c=1001$ и $a \neq b$ и $b \neq c$ и $a \neq c$

Из всех перестановок $(a; b; c)$ только у двух из 3! (6) третий элемент наибольший.

⇒ нам подходит $\frac{1}{3}$ способов.

Итого: $\frac{1}{3} \cdot 498.000 = 166.000$ вариантов

Ответ: 166.000 вариантов.

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

$\frac{3^m+2}{3^n+2}$ - целое ($m > n$)

$(3^m+2) : (3^n+2)$

При $n=m$ сравнение выполнено.

$3^m \overset{3^n+2}{\equiv} -2$

Заметим, что раз $НОД(3^m, 3^n+2) = 1$, то m и 3^m-степени

а $3^n+2 \not\vdots 3$, то $3^m \overset{3^n+2}{\equiv} -2$ имеет разные остатки при m.

При $m = 0, 1, 2, \ldots$ (3^n+2) и остатки повторяются с периодичностью 3^n+2 $\Rightarrow$ остаток $-2 (m \bmod 3^m)$ будет при $m = n + 3^n + 2$

$n + 3^n + 2 > n^2$ т.к. $3^n > n^2$

Докажем данное высказывание по индукции:

База индукции: при $n=1$ $3 > 1$ и $n=2$ $3 > 4$ выполнено, т.е.

Инд. пусть для $n=k$ $3^k > k^2$

$n = m+1$: $k > 2$

Тогда $(k+1)^2 = k^2 \cdot \frac{(k+1)^2}{k^2} > k^2 \cdot \frac{(k+\frac{1}{2}k)^2}{k^2} = k^2 \cdot 2{,}25 > 3k^2$

$\Rightarrow 3^{m+1} > 3 \cdot k^2$

$3^{k+1} > 3 \cdot k^2 > (k+1)^2$ — неравенство выполняется

$\Rightarrow m > n + 3^n > n^2$ ∎ что и требовалось доказать.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	8	0	6	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	×	6	//	66

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 1

$f(x) = x^2 - 2x - 1$

$g(x) = x^2 - 3x - 1$

Найти: $(g(x_1))^3 f(x_3) + f(x_4)(g(x_2))^3$

1) Найдем корни x_1 и x_2 трехчлена $f(x)$

$D = 2^2 - 4 \cdot (-1) = 8$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \frac{2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

Пусть $x_1 = 1 + \sqrt{2}$

$x_2 = 1 - \sqrt{2}$

2) Найдем корни x_3 и x_4 трехчлена $g(x)$

$D = 9 - 4 \cdot (-1) = 13$

$x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$

Пусть $x_3 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$

$x_4 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$

3) Подставим корни x_3 и x_4 в трехчлен $f(x)$:

$f(x_3) = \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right) - 1 = \frac{9}{4} + \frac{13}{4} + \frac{6\sqrt{13}}{4} - 4 - \frac{4\sqrt{13}}{4} =$

$= \frac{6}{4} + \frac{2\sqrt{13}}{4} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$

$f(x_4) = \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right) - 1 =$

$= \frac{9}{4} + \frac{13}{4} - \frac{6\sqrt{13}}{4} - 4 + \frac{4\sqrt{13}}{4} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$

4) Подставим корни x_1 и x_3 в трехчлен $g(x)$:

$g(x_1) = (1+\sqrt{2})^2 - 3(1+\sqrt{2}) - 1 = 3 + 2\sqrt{2} - 3 - 1 - 3\sqrt{2} = -1 - \sqrt{2}$

$(g(x_1))^3 = (-1-\sqrt{2})^3 = (3+2\sqrt{2})(-1-\sqrt{2}) = -7 - 5\sqrt{2}$

$g(x_2) = (1-\sqrt{2})^2 - 3(1-\sqrt{2}) - 1 = 3 + 2\sqrt{2} - 3 + 3\sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} - 1$

$(g(x_2))^3 = (\sqrt{2}-1)^3 = (3-2\sqrt{2})(\sqrt{2}-1) = 5\sqrt{2} - 7$

5) У выражения $(g(x_1))^3 f(x_3) + f(x_4)(g(x_2))^3$ может получиться 2 разных ответа (зависит от того, что писать для x_1, а что для x_2)

I: $(-7-5\sqrt{2})\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right) + (5\sqrt{2}-7)\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right) = -\frac{21}{2} - \frac{7\sqrt{13}}{2} - \frac{15\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{26}}{2} + \frac{15\sqrt{2}}{2}$

$- \frac{5\sqrt{26}}{2} - \frac{21}{2} + \frac{7\sqrt{13}}{2} = -21 - 5\sqrt{26}$

II $(5\sqrt{2}-7)\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right) + (-7-5\sqrt{2})\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right) = \frac{15\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{26}}{2} - \frac{21}{2} - \frac{7\sqrt{13}}{2} + \frac{21}{2}$

$+ \frac{7\sqrt{13}}{2} - \frac{15\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{26}}{2} = -21 + 5\sqrt{26}$

I для $x_1 = 1+\sqrt{2}$; $x_2 = 1-\sqrt{2}$; $x_3 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$; $x_4 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$

II для $x_1 = 1-\sqrt{2}$; $x_2 = 1+\sqrt{2}$; $x_3 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$; $x_4 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$

Таким образом выражение может принимать значения $-21 \pm 5\sqrt{26}$

Ответ: $-21 + 5\sqrt{26}$; $-21 - 5\sqrt{26}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	8	0	6	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$\Sigma = 2$

Какое по счету записано:	Число:	
1	4	
2	6	
3	9	+5
4	14	+6
5	20	+7
6.	27	+8
7.	35	+9 ...
...		
100.	?	+5+1·97

Мы можем заметить, что после числа 9 каждое число больше на 5 и 1·n. Значит разница между такими числами составляет a.n.

1) $a_1 = 5 \quad d = 1$

Раз нам надо найти 100 число, то мы прибавим 5+1·n 97 раз =>

$a_{97} = 5 + 1 \cdot 96 = 101$

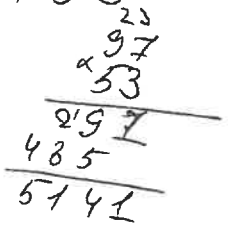
В последний раз мы прибавим число 101,

2) Мы можем представить любое число, стоящее ~~не на~~ на k-ом месте, где $k > 3$, как сумму числа, стоящего на 3 месте, и сумму a.n. (разницу между двумя стоящими числами). нет joke!

Значит $X_{100} = 9 + \frac{5+101}{2} \cdot 97 = 9 + 53 \cdot 97 =$

$= 5141 + 9 = 5150$

Ответ: 5150.



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	8	0	6	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 3

Представим набор из 4 натуральных чисел как a, b, c, d.

По условию: $a+b+c+d=1001$.

Пусть $a=b$ (хотя бы 2 числа в наборе одинаковы)

1) Если $a=b=1$, то существует 499 вариантов составления набора, сумма которого равна 1001 ($1001-2=998=c+d$), => c может принимать 998 значений (от 1 до 998), в которых $d=999-c$, однако тогда каждый набор будет посчитан дважды (1, 1, 997, 2 и 1, 1, 2, 997) => $\frac{998}{2}=499$.)

2) Если $a=b=2$, то существует 498 вариантов составления нужного нам набора ($1001-4=997$, где $c \in [1, 996]$ => существует 996 вариантов, однако наборы тут могут быть идентичны, значит неповторяющихся наборов $\frac{996}{2}=498$)

...

499) Если $a=499=b$, то существует ровно один неповторяющийся набор: 499, 499, 1, 2.

=> Мы можем найти общее кол-во наборов из 4 натуральных чисел, где их сумма = 1001 с помощью а. прогрессии.

$$S=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{499+1}{2}\cdot 499=250\cdot 499=124750$$

Ответ: 124750 наборов.

499 × 250 = 124750

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	8	0	6	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$n=5$

$a^3+b^3=(abc-1)^2$, где $a,b,c \in \mathbb{N}$

Рассмотрим при каких a и b, a^3+b^3 будет квадратом какого-либо числа.

1) $a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)$

$a^2+b^2-ab=a+b$

Такое возможно только в двух случаях:

$a=1 \quad b=2$

$b=2 \quad a=1$

Иначе ab должно равняться $a(a-1)+b(b-1)$

$(a^2=a+a(a-1);\ b^2=b+b(b-1))$.

Если $a=b$:

$a^2+a^2-a^2 \neq 2a$

Если $a \neq b$:

~~либо~~ одно из чисел меньше другого

Пусть $b<a$: тогда либо $ba=a(a-1)$, либо $ba<a(a-1)$, однако у нас нет слагаемого $b(b-1)$ $\Rightarrow$ a^2+b^2-ab никогда не будет равен $a+b$. ?!?!

$\Rightarrow$ 2 пары $a=2 \quad b=1$; $a=1 \quad b=2$

$a^2+b^2-ab \neq a+b$, но $(a+b)(a^2+b^2-ab) \in \mathbb{N}$

Пусть $a+b=x$, а $(a+b)(a^2+b^2-ab)=y$

Тогда: $y^2=x\cdot(x^{2n-1}\cdot n^{2k})$,

где $n, k \in \mathbb{N}$, а $n \in [0;+\infty)$

Такого при каком-либо n быть не может.

$\Rightarrow$ У нас всего 2 пары:

$a=1 \quad b=2 \quad c=2$

$a=2 \quad b=1 \quad c=2$

Ответ: $(1,2,2)$, $(2,1,2)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	5	5	2	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	6	20	20	X	///	66

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1. Дано: x_1, x_2 – корни $f(x)$
$f(x) = x^2 - 2x - 1$
x_3, x_4 – корни $g(x)$
$g(x) = x^2 - 3x - 1$

Найти: все возможные значения $(g(x_1))^3 \cdot f(x_3) + (g(x_2))^3 \cdot f(x_4)$

Сначала найдем x_1, x_2, x_3, x_4

$f(x) = x^2 - 2x - 1$

$D = 4 + 4 = 8$

$x_1, x_2 = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$

$x_1 = 1 + \sqrt{2}$; $x_2 = 1 - \sqrt{2}$

тогда $f(x) = (x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2}) = (x-1)^2 - 2$

$g(x) = x^2 - 3x - 1$

$D = 9 + 4 = 13$

$x_3, x_4 = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

$x_3 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$; $x_4 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$

тогда $g(x) = (x - \frac{3+\sqrt{13}}{2})(x - \frac{3-\sqrt{13}}{2}) =$ ~~$(x - \frac{3-\sqrt{13}}{2})(x - \frac{3+\sqrt{13}}{2})$~~

$= (x - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2})(x - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}) = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{13}{4}$

~~Найдем значения~~

Тогда есть 4 случая:

$x_1 = 1 + \sqrt{2}$; $x_2 = 1 - \sqrt{2}$; $x_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$; $x_4 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$

$x_1 = 1 + \sqrt{2}$; $x_2 = 1 - \sqrt{2}$; $x_3 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$; $x_4 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

$x_1 = 1 - \sqrt{2}$; $x_2 = 1 + \sqrt{2}$; $x_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$; $x_4 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$

$x_1 = 1 - \sqrt{2}$; $x_2 = 1 + \sqrt{2}$; $x_3 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$; $x_4 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

значит надо найти значения выражений:

1 сл.: $(g(1+\sqrt{2}))^3 \cdot f(\frac{3+\sqrt{13}}{2}) + (g(1-\sqrt{2}))^3 \cdot f(\frac{3-\sqrt{13}}{2})$

2 сл.: $(g(1+\sqrt{2}))^3 \cdot f(\frac{3-\sqrt{13}}{2}) + (g(1-\sqrt{2}))^3 \cdot f(\frac{3+\sqrt{13}}{2})$

3 сл.: $(g(1-\sqrt{2}))^3 \cdot f(\frac{3+\sqrt{13}}{2}) + (g(1+\sqrt{2}))^3 \cdot f(\frac{3-\sqrt{13}}{2})$

4 сл.: $(g(1-\sqrt{2}))^3 \cdot f(\frac{3-\sqrt{13}}{2}) + (g(1+\sqrt{2}))^3 \cdot f(\frac{3+\sqrt{13}}{2})$

т.к. $a+b = b+a$, то значения 1 сл. и 4 сл. совпадут ~~с 2 сл.~~

~~2 сл. и 3 сл. будут~~ и значения 2 сл. и 3 сл. совпадут

тогда рассмотрим всего 2 случая, 1 сл. и 2 сл.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	О	О	О	1	5	5	2	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Найдем значения $g(1+\sqrt{2})$; $g(1-\sqrt{2})$; $f\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$; $f\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)$

$g(1+\sqrt{2}) = (1+\sqrt{2}-\frac{3}{2})^2 - \frac{13}{4} = (\sqrt{2}-\frac{1}{2})^2 - \frac{13}{4} = 2-\sqrt{2}+\frac{1}{4}-\frac{13}{4} = -1-\sqrt{2} =$

$= -(1+\sqrt{2})$

$g(1-\sqrt{2}) = (1-\sqrt{2}-\frac{3}{2})^2 - \frac{13}{4} = (-\sqrt{2}-\frac{1}{2})^2 - \frac{13}{4} = 2+\sqrt{2}+\frac{1}{4}-\frac{13}{4} = \sqrt{2}-1 =$

$= -(1-\sqrt{2})$

$f\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) = \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}-1\right)^2 - 2 = \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 2 = \frac{1+2\sqrt{13}+13}{4} - 2 =$

$= \frac{6+2\sqrt{13}}{4} = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

$f\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) = \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}-1\right)^2 - 2 = \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 2 = \frac{1-2\sqrt{13}+13}{4} - 2 =$

$= \frac{6-2\sqrt{13}}{4} = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$

рассмотрим 1 сл.:

$(g(1+\sqrt{2}))^3 \cdot f\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) + (g(1-\sqrt{2}))^3 \cdot f\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) =$

$= (-(1+\sqrt{2}))^3 \cdot \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) + (-(1-\sqrt{2}))^3 \cdot \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) =$

$= -(1+\sqrt{2})^3 \cdot \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) - (1-\sqrt{2})^3 \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) =$

$= -\frac{1}{2}\left((1+\sqrt{2})^3 \cdot (3+\sqrt{13}) + (1-\sqrt{2})^3 (3-\sqrt{13})\right) =$

~~$= -\frac{1}{2}((1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}+2)$~~

$= -\frac{1}{2}\left((1+3\sqrt{2}+6+2\sqrt{2})(3+\sqrt{13}) + (1-3\sqrt{2}+6-2\sqrt{2})(3-\sqrt{13})\right) =$

$= -\frac{1}{2}\left((7+5\sqrt{2})(3+\sqrt{13}) + (7-5\sqrt{2})(3-\sqrt{13})\right) =$

$= -\frac{1}{2}\left(21+15\sqrt{2}+7\sqrt{13}+5\sqrt{26}+21-15\sqrt{2}-7\sqrt{13}+5\sqrt{26}\right) =$

$= -\frac{1}{2}(42+10\sqrt{26}) = -21-5\sqrt{26}$

рассмотрим 2 сл.

$(g(1+\sqrt{2}))^3 \cdot \left(f\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)\right) + (g(1-\sqrt{2}))^3 \cdot f\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) =$

$= (-(1+\sqrt{2}))^3 \cdot \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) + (-(1-\sqrt{2}))^3 \cdot \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) =$

$= -\frac{1}{2}\left((1+\sqrt{2})^3 \cdot (3-\sqrt{13}) + (1-\sqrt{2})^3 \cdot (3+\sqrt{13})\right) =$

$= -\frac{1}{2} \cdot \left((7+5\sqrt{2}) \cdot (3-\sqrt{13}) + (7-5\sqrt{2}) \cdot (3+\sqrt{13})\right) =$

$= -\frac{1}{2} \cdot (21+15\sqrt{2}-7\sqrt{13}-5\sqrt{26}+21-15\sqrt{2}+7\sqrt{13}-5\sqrt{26}) =$

$= -\frac{1}{2} \cdot (42-10\sqrt{26}) = -21+5\sqrt{26}$

Ответ: $-21-5\sqrt{26}$; $-21+5\sqrt{26}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	5	5	2	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

2. $x_1 = 4 \quad x_2 = 6$

x_n - сост.

$x_n > 2x_{n-1} - x_{n-2}$

заметим, что $x_2 = \frac{3}{2} x_1$, тогда

$x_3 > 2 \cdot \frac{3}{2} x_1 - x_1$

$x_3 > 2x_1$

$x_3 > \frac{4}{2} x_1$

$x_3 = \frac{5}{2} x_1$ (т.к. $x_1 : 2$)

$x_4 > 2 \cdot \frac{5}{2} x_1 - \frac{3}{2} x_1$

$x_4 = \frac{8}{2} x_1$

$x_5 > 2 \cdot \frac{8}{2} x_1 - \frac{5}{2}$

$x_5 = \frac{12}{2} x_1$

получную закономерность можем записать как $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{2}(n-1) \cdot x_1 = x_{n-1} + 2(n-1)$

тогда $x_2 = x_1 + \frac{1}{2} x_1 = \frac{3}{2} x_1 = x_1 + 2$

$x_3 = x_2 + x_1 = \frac{5}{2} x_1 = x_1 + 2 + 4 = x_1 + 6$

$x_4 = x_3 + \frac{3}{2} x_1 = \frac{8}{2} x_1 = x_1 + 2 + 4 + 6 = x_1 + 12$

$x_5 = x_4 + \frac{4}{2} x_1 = \frac{12}{2} x_1 = x_1 + 2 + 4 + 6 + 8 = x_1 + 20$

$x_6 = x_5 + \frac{5}{2} x_1 = \frac{17}{2} x_1 = x_1 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = x_1 + 30$

если обратить внимание на строчки, то можно увидеть, что $x_2 = x_1 + 1 \cdot 2$

$x_3 = x_1 + 6 = x_1 + 2 \cdot 3$

$x_4 = x_1 + 12 = x_1 + 3 \cdot 4$

$x_5 = x_1 + 20 = x_1 + 4 \cdot 5$

$x_6 = x_1 + 30 = x_1 + 5 \cdot 6$

тогда можем по другому записать данную закономерность: $x_n = x_1 + (n-1) \cdot n$

тогда $x_{100} = x_1 + (100-1) \cdot 100 = 4 + 99 \cdot 100 = 9904$

Ответ: 9904

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	5	5	2	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

3. Назовем числа в таких наборах x (повторяющиеся числа), y и z, тогда набор таких натуральных чисел будет выглядеть так: x, x, y, z

тогда $x+x+y+z=1001$

$2x+y+z=1001$

при $x=1$

$y+z=999$

1сл. $y=1$ $z=998$

2сл. $y=2$ $z=997$

...

итого 998 случаев, но

~~случаев~~ случай, где $y=1$ $z=998$, и случай, где $y=998$ $z=1$, это один и тот же набор, тогда поделим на 2 кол-во случаев

итого 499 случаев

при $x=2$

$y+z=997$

1сл. $y=1$ $z=996$

2сл. $y=2$ $z=995$

итого $996:2=498$ случаев

при $x=499$

$y+z=3$

1сл. $y=1$ $z=2$

2сл. $y=2$ $z=1$

Итого $2:2=1$ случай

Заметим, что получается арифметическая прогрессия, где $a_1=499$, $d=-1$, $n=499$ (т.к. x изменяется от 1 до 499)

тогда $S=\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)\cdot n=\frac{499+1}{2}\cdot 499=250\cdot 499=$

$=124750$

Ответ: 124750 наборов.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

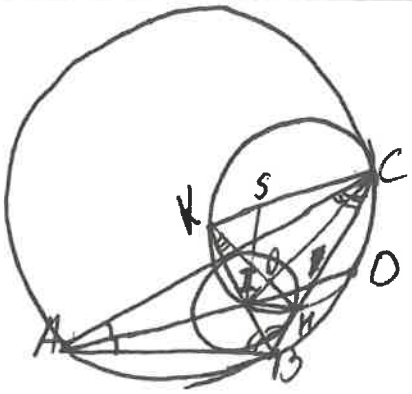
Вариант № 1.

М	А	0	0	0	1	5	5	2	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4.



Дано: I – центр вписанной окр.

Док-ть: CK = BK

1) ~~Проведем~~ Обозначим т. пересечения CO и окружности, проходящей через CBI точкой H

2) проведем IH, проведем KH, проведем CI

3) ~~обозначим~~ обозначим т. пересечения CI и KH точкой O

4) ~~по свойству~~ т.к. центр вписанной окружности – это т. пересечения бис-с, то $\angle CAI = \angle IAB$; $\angle ACI = \angle ICK$; $\angle ABK = \angle CBK$.

5) обозначим ~~$\angle CBK$~~ $\angle CAI = \angle IAB = \alpha$

$\angle ABK = \angle CBK = \beta$

$\angle ACI = \angle ICH = \mu$

6) ~~$\angle KCI = \angle KHI$~~ $\angle HKI = \angle HCI$ (т.к. опираются на одну дугу IH, и оба угла вписанные)

7) ~~тогда~~ $\angle KHB = 180° - \mu - \beta$

$\angle CIB = 180° - \mu - \beta$

8) $\angle COH = \angle KOI$ (верт.)
$\angle ICH = \angle IKH$ (из п. 5) $\Big\}$ $\triangle CHO \sim \triangle KOI \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KIO = \angle CHO$

9) $\angle IOH = 360 - \angle BHO - \angle BIO - \angle HBI =$

$= 360 - 180 - 180 + 2\mu + \beta = 2\mu + \beta$

$\angle COH = 180° - 2\mu - \beta$

$\angle CHO = 180° - 180° + 2\mu + \beta - \mu = \mu + \beta$

$\angle KIO = \mu + \beta$

10) докажем, что $\angle KCB = 2\alpha$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	1	9	2	0	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Вариант № 4

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	X	6	///	66

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Дано гипербола $y=\frac{1}{x}$ и точка $C(-2;y_C)$ найдем координаты точки C

$y_C=-\frac{1}{2}$ $y_C=-0,5$ $C(-2;-0,5)$ напишем формулу прямых $y=kx+b$ найдем координаты точек пересечения прямых с гиперболой $A(x_A;y_A)$ и

прямой $k=2$ тогда $y=2x+b$ подставим $C(-2;-0,5)$ $-0,5=-4+b$ $b=-0,5+4=3,5$ получим $b=3,5$,

$y=2x+3,5$ чтобы найти точку A: составим систему уравнений: $\begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ y=2x+3,5 \end{cases}$ $2x+3,5=\frac{1}{x}$ · $4x^2+7x-2=0$

$x_1=\frac{1}{4}$

$x_2=-2$

так как $x_2=-2$ это абсцисса C но $x_A=\frac{1}{4}$ $y_A=\frac{1}{x_A}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$ тогда точка $A(\frac{1}{4};4)$:

$B(x_B;y_B)$ у прямой $k=\frac{1}{2}$ тогда: $y=\frac{1}{2}x+b$

$-0,5=-1+b$

и подставим $C(-2;-0,5)$ получим $b=\frac{1}{2}$

$\begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \end{cases}$ $\frac{1}{x}=\frac{x+1}{2}$ $x^2+x=2$ $x^2+x-2=0$

$x_1=-2$

$x_2=1$

так как $x_1=-2$ это абсцисса C но $x_B=1$ $y_B=\frac{1}{1}=1$ тогда $B(1;1)$

т.к окружность описана около треугольника ABC то составим систему.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	9	2	0	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$\begin{cases} (-2-a)^2+(-\frac{1}{2}-b)^2=r^2 & (1) \\ (1-a)^2+(1-b)^2=r^2 & (2) \\ (\frac{1}{4}-a)^2+(1-b)^2=r^2 & (3) \end{cases}$$

вычтем из (1) уравнения (2) уравнения и из (2) уравнение (3) получим систему

$$\begin{cases} (-2-a)^2-(-\frac{1}{2}-b)^2-(1-a)^2-(1-b)^2=0 \\ (1-a)^2+(1-b)^2-(\frac{1}{4}-a)^2-(1-b)^2=0 \end{cases}$$

раскроем скобки и приведем подобные и получим:

$$\begin{cases} 8a+4b=-3 \\ 8a-32b=-75 \end{cases}$$

Отсюда $a=-\frac{11}{8}$ $b=2$

Ответ: $(-\frac{11}{8}; 2)$

№1

Дано:

$x_n=n^2+300$

$y_n=$ ~~НОД(x_n, x_{n+1})~~ НОД(x_n, x_{n+1})

Найти максимальное y_n

$x_n=n^2+300$ тогда $x_{n+1}=(n+1)^2+300=n^2+2n+301$

y_n примет вид: $y_n=$НОД$(n^2+300; n^2+2n+301)$

используя свойства НОД: 1) НОД$(x,y)=$НОД$(x+y,y)$, ~~НОД$(x,y)=$НОД$(x+y,y)$~~

2) НОД$(x,2y+1)=$НОД$(2x,2x+1)$ преобразую y_n: ~~$y_n=$НОД$(n^2+300, n^2+2n+301)$~~

$y_n=$НОД$(n^2+300, n^2+2n+301-n^2-300)=$ ~~y_n~~ НОД$(n^2+300; 2n+1)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	9	2	0	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Прекратится только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Далее использую свойства 2) получаем: $y_n = \text{Нод}(2n^2+600, 2n+1) =$

$\text{Нод}(2n^2+600-n(2n+1), 2n+1) = \text{Нод}(600-n, 2n+1) = \text{Нод}(1200-2n, 2n+1) =$

$= \text{Нод}(1201, 2n+1)$

т.к 1201 делится только на себя и на 1 по максимальное значение 1201

Ответ: 1201

№3

$Б+В+П = 1001$

$Б > В$ и $Б > П$

Найдем сколько может быть способов разделить орехи

$\frac{1000 \cdot (1001-2)}{2} = 499500$

из общего числа вариантов надо отнять варианты:

а) все 3 числа равны

б) 2 числа из 3 равны друг другу

Случай а) невозможен т.к. не кратно 3.

Найдем случай б)

пусть $В = П$ тогда

$Б + 2 \cdot В = 1001$ $\quad В = \frac{1001-Б}{2} = \frac{1000-(Б-1)}{2} = 500 - \frac{Б-1}{2}$ т.к. $Б > 0$ $В > 0$

$1 \le Б \le 500$

тогда всего таких комбинаций $3 \cdot 500 = 1500$

тогда осталось: $499500 - 1500 = 498000$

Из этих вариантов чтобы у Бори было больше всех подойдет только треть $\frac{498000}{3} = 166000$

Ответ: 166000

Лист 3 из 4

Лист 2 из 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

МА0001920925

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Вариант

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5 $m>n$

от $\frac{3^m+2}{3^n+2}=kZ$

где k и Z целые числа. Докажите что что $m>n^2$

$3^m+2=3^nZ+2Z$ $(3^n+2)(1)$

$3^n(3^{m-n}-Z)=2(Z-1)$

$3^{m-n}+Z=\frac{2(Z-1)}{3^n}$ $\Rightarrow$ что $Z-1$ кратно 3^n тогда либо

$Z-1=3^n$ либо $Z-1>3^n$

получается

$3^n+1\le Z$

возвращаемся к (1)

$3^m+1=(3^n+2)\cdot Z$

$Z=\frac{3^m+2}{3^n+2}$

$3^n+1\le Z$

$3^m+2\cdot 3^n+3^n+2\le 3^m+2$

$3^{2n}+3\cdot 3^n\le 3^m$

$3^{2n}+3^{n+1}\le 3^m \Rightarrow 3^m>3^{2n}$ (так как $3^n>0$)

$m>2n$ тогда $m-n>n$

тогда $\frac{3^{m-n}+2}{3^n+2}=Z$

$m-n>2n \Rightarrow m>3n$ и так далее $m>4n$ и $m>5n$ и $m>n^2$

Лист 4 из 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	0	7	7	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	6	20	20	0	11	66

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

$f(x) = x^2 - 4x - 1$; x_1, x_2

$g(x) = x^2 - 5x - 1$; x_3, x_4

$(g(x_1))^3 \cdot f(x_3) + (g(x_2))^3 \cdot f(x_4) - ?$

Заметим, что $g(x) = f(x) - x$:

$f(x) = g(x) + x$

Пусть выражение которое надо найти : равно K :

$K = (g(x_1))^3 \cdot f(x_3) + (g(x_2))^3 \cdot f(x_4) = \underbrace{(f(x_1) - x_1)^3}_{=0,\ т.к.\ x_1 - корень\ f(x)} \cdot \underbrace{(g(x_3) + x_3)}_{=0,\ т.к.\ x_3 - корень\ g(x)} +$

$+ \underbrace{(f(x_2) - x_2)^3}_{0,\ т.к.\ x_2 - корень\ f(x)} \cdot \underbrace{(g(x_4) + x_4)}_{0,\ т.к.\ x_4 - корень\ g(x)} = (-x_1)^3 \cdot x_3 + (-x_2)^3 \cdot x_4$

1. $x^2 - 5x - 1 = 0$
   $D = 29$
   $x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}$
   $x_3 = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$, $x_4 = \frac{5-\sqrt{29}}{2}$

2. $x^2 - 4x - 1 = 0$
   $D = 20$
   $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}$
   $x_1 = 2+\sqrt{5}$, $x_2 = 2-\sqrt{5}$

Так как не сказано какой корень первый какой второй, какой третий какой четвертый, то переберём случаи:

I сл: $x_1 = 2+\sqrt{5}$, $x_2 = 2-\sqrt{5}$

$x_3 = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$, $x_4 = \frac{5-\sqrt{29}}{2}$;

$(-(2+\sqrt{5}))^3 \cdot \left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right) + (-(2-\sqrt{5}))^3 \cdot \left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left((38+17\sqrt{5})(5+\sqrt{29}) + (38-17\sqrt{5})(5-\sqrt{29})\right) =$

$= -(190 + 17\sqrt{5} \cdot \sqrt{29}) = -190 - 17\sqrt{145}$

II сл: $x_1 = 2-\sqrt{5}$; $x_2 = 2+\sqrt{5}$

$x_3 = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$; $x_4 = \frac{5-\sqrt{29}}{2}$

$(-(2-\sqrt{5}))^3 \cdot \left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right) + (-(2+\sqrt{5}))^3 \cdot \left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left((38-17\sqrt{5})(5+\sqrt{29}) + (38+17\sqrt{5})(5-\sqrt{29})\right)$

$= -\frac{1}{2}(2 \cdot 190 - 2 \cdot \sqrt{17} \cdot \sqrt{29 \cdot 5}) = -190 + 17\sqrt{145}$

выдан доп. лист №2

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

M	A	D	0	0	1	0	7	7	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная табличка заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

III сл: $x_1 = 2+\sqrt{5}$; $x_2 = 2-\sqrt{5}$

$x_3 = \frac{5-\sqrt{29}}{2}$; $x_4 = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$

$$\left(-(2+\sqrt{5})\right)^3 \cdot \left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right) + \left(-(2-\sqrt{5})\right)^3 \cdot \left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left((38+17\sqrt{5})(5-\sqrt{29}) + (38-17\sqrt{5}) \cdot (5+\sqrt{29})\right) = -190 + 17\sqrt{145}$$

IV сл: $x_1 = 2+\sqrt{5}$; $x_2 = 2+\sqrt{5}$

$x_3 = \frac{5-\sqrt{29}}{2}$; $x_4 = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$

$$\left(-(2-\sqrt{5})\right)^3 \cdot \left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right) + \left(-(2+\sqrt{5})\right)^3 \cdot \left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left((38-17\sqrt{5})(5-\sqrt{29}) + (38+17\sqrt{5})(5+\sqrt{29})\right) = -190 - 17\sqrt{145}$$

Таким образом всего два возможных значений K:

1. $-190 - 17\sqrt{145}$
2. $-190 + 17\sqrt{145}$

Ответ: $-190 - 17\sqrt{145}$; $-190 + 17\sqrt{145}$

№2

$x_1 = 5$ $x_{11} = 48$
$x_2 = 7$ $x_{12} = 57$
$x_3 = 10$ $x_{13} = 68$
$x_4 = 14$ $x_{14} = 80$
$x_5 = 15$ $x_{15} = 93$
$x_6 = 18$ $x_{16} = 108$
$x_7 = 22$ $x_{17} = 124$
$x_8 = 27$ $x_{18} = 141$
$x_9 = 33$ $x_{19} = 159$
$x_{10} = 40$ ...

Заметим, что начиная с x_{17}: $x_n = x_{n-1} + (n-1)$

Докажем это:

Очевидно, что в силу остатков по модулю 3, ~~каждое 3-е число~~ $x_n \overset{3}{\equiv} n$ => каждое 3-е число, ~~начиная~~ с x_5 будет кратно 3-ём, а остальные почти кратны 2-ум: докажем, что $x_n = x_{n-1} + (n-1)$ по индукции:

БАЗА: $x_{18} = x_{17} + 17 = 141 = 124 + 17$

Предположение: $x_k = x_{k-1} + (k-1)$, $k \geq 17$

Переход: $x_{k+1} = x_k + k$ - ?

$x_{k+1} > 2 \cdot x_k - x_{k-1}$

Задача дополнительная №3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	0	7	7	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$x_{k+1} > 2 \cdot x_k - x_k + (k-1)$

$x_{k+1} > x_k + k - 1$

$x_{k+1} \geq x_k + k$

Т.к. по выше сказанному каждый член посл. прогр. 3-ти чисе 2-ух, то x_{k+1} точно составное $\Rightarrow x_{k+1} = x_k + k$.

Таким образом: $x_{98} = x_{17} + 18 + 18 + 20 + \dots + 97$

$$x_{98} = x_{17} + \frac{18+97}{2} \cdot 70$$

$$x_{98} = 124 + 35(18+97)$$

$$x_{98} = 124 + 4025$$

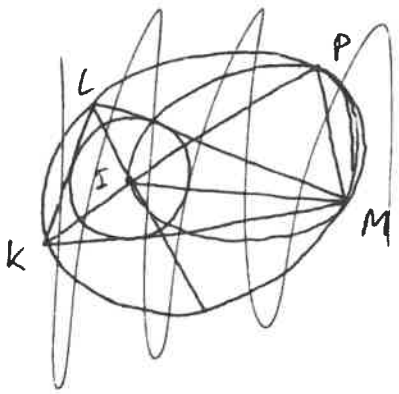
$$x_{98} = 4149$$

Ответ: 4149

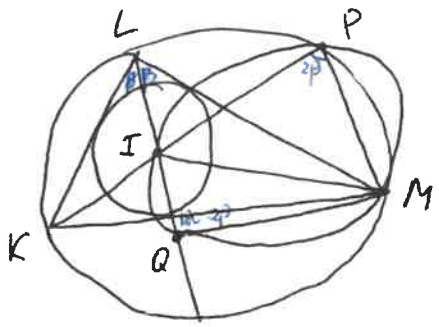
№3

Во-первых: будем считать, что наборы $\{a,b,c,d\}$ и $\{a,b,d,c\}$ здесь получаемые

№4



Док-ть, что $LQ = QM$:



1) $\triangle KLM$:
Пусть $\angle KLM = 2\beta \Rightarrow \angle KLQ = \angle MLQ = \beta$ (т.к. LQ - бисс. (проходит через I))

2) $\square KLPM$ – вписанный четырёхугольник:
$\angle KLM = \angle KPM = 2\beta$ (опирающиеся на дугу KM)

видан лист №4

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано в рамках листа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

3) $\triangle IPM$ - вписанный четырёхугольник

$\angle IQM = 180° - \angle IPM = 180° - 2\beta$ (по св. вп. четырёх.)

4) $\triangle LQM$:

$\angle QLM = \beta$

$\angle LQM = 180 - 2\beta$ (по усл.) $\Rightarrow \angle LMQ = 180° - \angle LQM - \angle QLM = \beta$

$\Rightarrow \angle LMQ = \angle QLM = \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle LQM$ - равнобедр (по опр.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow LQ = QM$ (по опред).

5) $\triangle KLM$ - остроугольный или тупоугольный не влияет на решение. $\Rightarrow$ ч.т.д.

№3

Так как в условии не сказано, а вопрос по задаче мне задать не дали, то будем считать, что наборы это множества, то есть есть набор $\{a,b,c,d\}$ и набор $\{a,b,d,c\}$ и все возможные перестановки это всё один и тот же набор.

Заметим, что одинаковых чисел не может быть 4, т.к. сумма их = 1005, то есть нечётна. Также не может быть две пары равных чисел по той же причине. Итак равными могут быть либо одна пара либо тройка.

1) Посчитаем сначала кол-во наборов в которых три числа равны:

Наш набор тогда выглядит так: $\{a;a;a;b\}$, где a,b-натуральные числа.

Заметим, что $a \le 334$, т.к. если оно хотя бы 335, то $b \le 0$, что невозможно т.к. $b \in N$. Также $a \ge 1$, т.к. $a \in N \Rightarrow a \in [1;334]$. Для каждого значения a из этого промежутка набор $\{a;a;a;b\}$ определяется однозначно $(b = 1005 - 3a) \Rightarrow$ всего наборов где есть тройка равных чисел: 334.

2) Посчитаем кол-во наборов где ровно 2 числа равны, а остальные два различны.

Тогда наш набор выглядит так: $\{a;a;b;c\}$, где $a,b,c \in N$

выдан лист №5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	0	7	7	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Заметим, что $a \le 501$, ведь если a хотя бы 502, то $b+c=1$, что невозможно т.к. $b, c \in N$. Также $a \ge 1$, т.к. $a \in N$.

Таким образом a принимает значения $a \in [1;501] \Rightarrow 2a \in \{2;4;6\ldots;1002\}$

Для каждого значения $a \in [1;501]$ сумма $b+c = 1005-2a \Rightarrow$

$\Rightarrow (b+c) \in \{1003;1001;999\ldots;3\}$.

Пусть $b+c=k$; $k \in \{3;5;\ldots;1003\}$:

Расставим k единиц в ряд:

$\underbrace{1\ 1\ 1\ 1\ \ldots\ 1\ 1\ 1}_{k}$

Тогда определить кол-во наборов $\{b;c\}$ равносильно кол-ву способов поставить между какими-то единицами перегородку (мей под перегородку $(k-1)$, т.к. и поделить на 2 (т.к. $\{b;c\}$ и $\{c;b\}$ - одинаковые) числа $b, c \in N$

Тогда кол-во наборов $\{b;c\} = \frac{C_{k-1}^{1}}{2} = \frac{k-1}{2}$

Возвращаясь к задаче, для каждого a в данном случае $b+c=1005-2a \Rightarrow$

$\Rightarrow$ кол-во наборов вида: $\{a;a;b;c\}$ равно кол-ву наборов вида $\{b;c\}$ где $b+c=1005-2a \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Кол-во наборов вида $\{a;a;b;c\}$ = равно: $\frac{1003-1}{2} + \frac{1001-1}{2} + \ldots + \frac{3-1}{2} =$

$= 501 + 500 + \ldots + 1 = \frac{1+501}{2} \cdot 501 = 251 \cdot 501 = 125751$, но среди данных наборов мы дважды посчитали наборы вида $\{a;a;a;d\}$ ($\{a;a;a;c\}$ и $\{a;a;a;b\}$)

Чтобы получить ответ на вопрос задачи надо из кол-ва наборов $\{a;a;b;c\}$ вычесть кол-во наборов вида $\{a_1 a_2 a_1 a_2\}$, а мы уже знаем, что наборов таких, что равны три числа равны ровно 334 $\Rightarrow$ итоговый ответ: $125751 - 334 = 125417$

Ответ: 125417

Выдан лист №6

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

M	A	0	0	0	1	0	7	7	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Черновики не проверяются и не оцениваются. Работайте аккуратно, пишите разборчиво.

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

$a^3-b^3=(abc-1)^2$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=(abc-1)^2$

По модулю c:

$(a-b)(a^2+ab+b^2)\equiv_c(-1)^2$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)\equiv_c 1$

$\Downarrow$

$\begin{cases} a-b\equiv_c 1 \\ a^2+ab+b^2\equiv_c 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} a-b\equiv_c -1 \\ a^2+ab+b^2\equiv_c -1 \end{cases}$

$\begin{cases} a\equiv_c b+1 \\ (b+1)^2+(b+1)b+b^2\equiv_c 1 \end{cases}$

$\begin{cases} a\equiv_c b+1 \\ 3b(b+1)\equiv_c 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3b\equiv_c 0 \\ a\equiv_c b+1 \end{cases}$ или $\begin{cases} b\equiv_c -1 \\ a\equiv_c b+1 \end{cases}$

$\begin{cases} 3b\equiv_c 0 \\ a\equiv_c 1 \end{cases}$ $\begin{cases} b\equiv_c -1 \\ a\equiv_c 0 \end{cases}$

Ни один из случаев очевидно не подходит $\Rightarrow a=b=c=1$

$\begin{cases} a\equiv_c b-1 \\ (b-1)^2+(b-1)b+b^2\equiv_c -1 \end{cases}$

данное кв. ур. не имеет решений ~~целых чисел~~ $\Rightarrow$ нет такого b в $\mathbb{Z}_c$, что такая система имеет реш. по модулю c.

$\Downarrow$

$a=b=c=1$

$\Rightarrow a=b=c=1$

ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	9	2	4	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	6	16	20	2	11	64

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

1) $f(x) = x^2 - 4x - 1$
$g(x) = x^2 - 5x - 1$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} f(x) = g(x) + x \\ g(x) = f(x) - x \end{cases}$, тогда

$(g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4) = (f(x_1) - x_1)^3 (g(x_3) + x_3) + (f(x_2) - x_2)^3 (g(x_4) - x_4)$

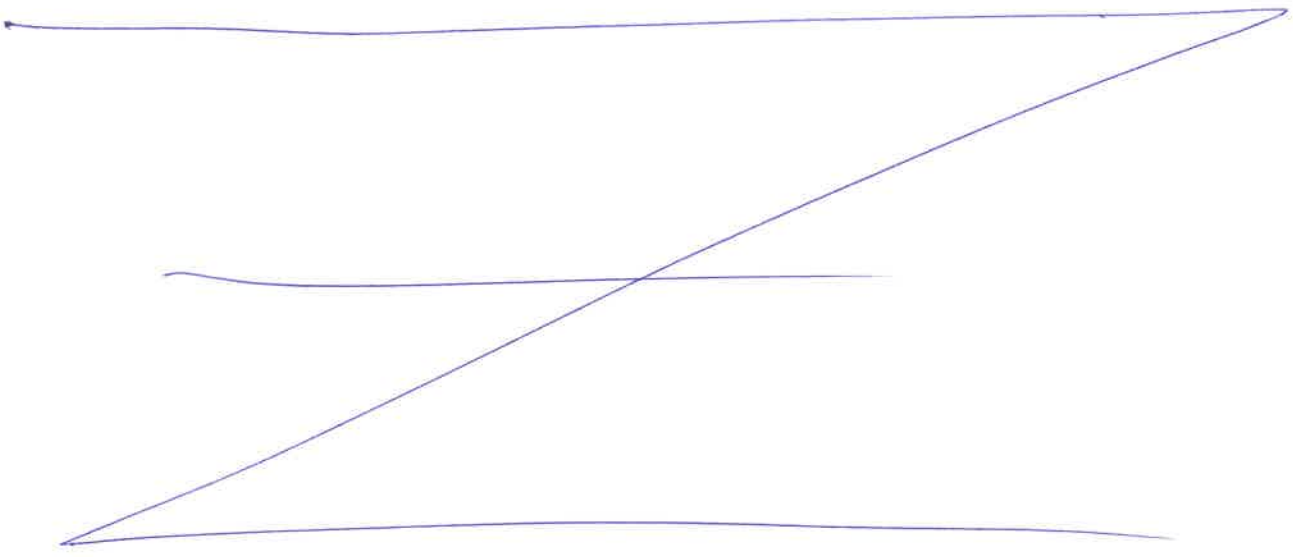
$= -(x_1^3 x_3 + x_2^3 x_4)$, т.к. x_1, x_2 - корни $f(x)$, x_3, x_4 - корни $g(x)$.

2) $x^2 - 4x - 1 = 0$,
$(x-2)^2 = 5$,
$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}$ $\Rightarrow$ $x_1^3 = (2+\sqrt{5})^3 = 8 + 12\sqrt{5} + 30 + 5\sqrt{5} = 38 + 17\sqrt{5}$
$x_2^3 = (2-\sqrt{5})^3 = 8 - 12\sqrt{5} + 30 - 5\sqrt{5} = 38 + 17\sqrt{5}$.

$x^2 - 5x - 1 = 0$,
$D = 25 + 4 = 29 > 0$, $\Rightarrow$ 2 корня,
$x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}$.

3) x_1 стоит либо с x_3, либо с x_4, а другая пара однозначно определяется.
Если x_1 стоит с x_3, то выражение равно $(38+17\sqrt{5})\frac{5+\sqrt{29}}{2} + (38-17\sqrt{5})\frac{5-\sqrt{29}}{2} = \frac{38}{2}(5-\sqrt{29}+5+\sqrt{29}) + 17\sqrt{5}\left(\frac{5+\sqrt{29}}{2} - \frac{5-\sqrt{29}}{2}\right) =$
$= 5 \cdot 38 + 17\sqrt{5} \cdot \sqrt{29} = 190 + 17\sqrt{145}$
Если x_1 стоит с x_4, то выражение равно
$(38+17\sqrt{5})\frac{5-\sqrt{29}}{2} + (38-17\sqrt{5})\frac{5+\sqrt{29}}{2} = \frac{38}{2}(5-\sqrt{29}+5+\sqrt{29}) + 17\sqrt{5}\left(\frac{5-\sqrt{29}}{2} - \frac{5+\sqrt{29}}{2}\right)$
$= 190 - 17\sqrt{145}$, $\Rightarrow$ исходное выражение равняется $\pm 17\sqrt{145} - 190$.

Ответ: $\pm 17\sqrt{145} - 190$.



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	9	2	4	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

Выпишем первые члены посл.:

5, 7, 10, 14, 20, 27, ...

Пусть $y_n = 20 + \frac{n(n+13)}{2}$.

Ожидается, что ~~если 2 x_n~~ $x_n = 2x_{n-1}$ ~~$- x_{n+1}$~~ $- x_{n-2} + 1$.

Проверим, что $\{y_n\}$ удовлетворяет этому соотношению:

$y_n \overset{?}{=} 2y_{n-1} - y_{n-2} + 1$,

$\frac{n(n+13)}{2} + 20 \overset{?}{=} 2\left(\frac{(n-1)(n-1+13)}{2} + 20\right) - \left(\frac{(n-2)(n-2+13)}{2} + 20\right) + 1$, $|\cdot 2$,

$n^2 + 13n + 40 \overset{?}{=} 2(n-1)(n+12) - (n-2)(n+11) + 2 + 80$,

$n^2 + 13n + 40 \overset{?}{=} 2n^2 + 22n - 24 - n^2 - 9n + 2 + 80$,

$n^2 + 13n + 40 \overset{?}{=}$

$2y_{n-1} - y_{n-2} + 1 = 2\left(\frac{(n-1)(n+12)}{2} + 20\right) - \left(\frac{(n-2)(n+11)}{2} + 20\right) + 1 =$

$= (n-1)(n+12) + 40 - \frac{(n-2)(n+11)}{2} - 20 + 1 = n^2 + 11n - 12 + 40 - \frac{n^2 + 9n - 22}{2} - 19 =$

$= \frac{n^2 + 13n}{2} + 28 + 11 - 19 = \frac{n^2 + 13n}{2} + 20 = 20 + \frac{n(n+13)}{2} = y_n$, $\Rightarrow$

Если $\{y_n\}$ не содержит простых чисел, то начиная с $k = 6$: $x_k = y_{k-5}$. $\{y_n\}$ и $\{x_n\}$ – рекуррентные посл. 2 порядка удовлетворяющие одному рек. соотн. и имеющие 2 общие точки $\Rightarrow$ с неё они совпадают. ($y_{-1} = 20 + \frac{(-1)(-1+13)}{2} = 14$, $y_0 = 20$)

Пусть p – простое встретилось в $\{y_n\}$, тогда ур. $\frac{(x+13)x}{2} + 20 = p$ имеет решение. $x^2 + 13x + 40 - p = 0$,

натуральное $D = 169 - 4(40 - p) = 9 + 4p = t^2$, т.к. решение натурально, $\Rightarrow \sqrt{D} \in \mathbb{Z}$, $\Rightarrow D = t^2$, $t \in \mathbb{Z}$,

Тогда $p = \frac{t^2 - 9}{4} = \left(\frac{t-3}{2}\right) \cdot \left(\frac{t+3}{2}\right)$, но p – простое, тогда один из множителей это ± 1, $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{t-3}{2} = 1, \\ \frac{t-3}{2} = -1, \\ \frac{t+3}{2} = 1, \\ \frac{t+3}{2} = -1, \end{cases} \begin{cases} t = 5, \\ t = 1, \\ t = -1, \\ t = -5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 4 \\ p = -2 \\ p = -2 \\ p = 4 \end{cases}$$

Т.к. -2 и 4 не простые, то $x_k = y_{k-5}$, тогда $x_{98} = y_{93} = 20 + \frac{93 \cdot 106}{2} = 9878$.

Ответ: 9878.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	9	2	4	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

Будем записывать четверку как (a,b,c,d).

Зафиксируем два равных (они должны быть в четвёрке), тогда $(a;a;b;c)$

Заметим, что если $b=c$, тогда сумма равна $2a+b+c=2a+2b=2(a+b)$ - чётна, $\Rightarrow$ не равна 1005. Тогда в четвёрка может иметь вид либо $(a;a;b;c)$, $b\neq c$ или $(a;a;a;b)$, $b\neq a$

Посчитаем четверки вида $(a;a;a;b)$: т.к. $3a+b=1005$, то $a\leq\left\lfloor\frac{1005}{3}\right\rfloor=337$. и для каждого a число b определяется однозначно как $1005-3a$, тогда таких четвёрок $4\cdot 337=1342$, т.к. 4 варианта расположения b.

Посчитаем четверки типа $(a;a;b;c)$ и пусть $b<c$, тогда $b\leq\left\lfloor\frac{1005-2a}{2}\right\rfloor=502-a$, число c определяется однозначно, тогда таких троек $\left(\sum\limits_{a=1}^{a=501}(502-a)\right)\cdot\frac{4!}{2}$, т.к. всего перестановок $4!$ и 2 равных числа; $a\leq 501$, т.к. Если $a\geq 503$, то $2a\geq 1006>1005$, а при $a=502$, $b+c=1005-2a=1$, $\Rightarrow b=0\notin\mathbb{N}$.

$$\sum_{a=1}^{a=501}(502-a)=501\cdot 502-\sum_{a=1}^{a=501}a=501\cdot 502-\frac{501\cdot 502}{2}=\frac{501\cdot 502}{2}$$

$$\frac{4!}{2}=\frac{24}{2}=12,\Rightarrow\left(\sum_{a=1}^{a=501}(502-a)\right)\frac{4!}{2}=12\cdot\frac{501\cdot 502}{2}=6\cdot 501\cdot 502,$$

$\Rightarrow$ всего четверок: $6\cdot 501\cdot 502+\cancel{337}\ 1342=157654$

501×502: $1002 + 2505 = 251502$

26052×6: 156312

$156312+1342=157654$

Ответ: 157654

Для конкретного a мы считали количество подходящих b, по которому восстанавливалась упорядоченная четвёрка (биекция), $\Rightarrow$ все варианты посчитаны.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	9	2	4	6	2	5

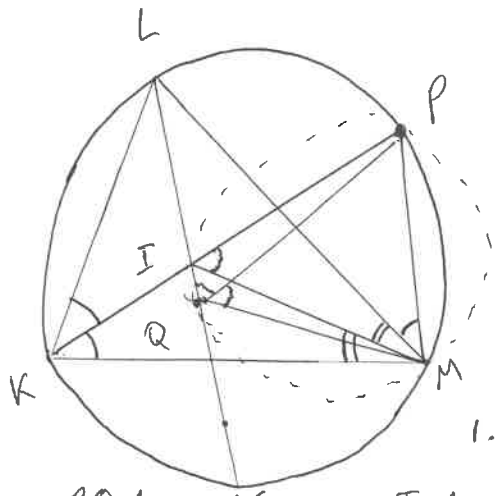
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 4



Дано: $\triangle KLM$, I – центр вписанной, $KI \cap$ опис. $= P$, окр. $PIM \cap LI = Q$

Доказать: $QL = MQ$.

Решение:

~~т.к. KI – b_K, то P – середина~~

1. $\angle LKI = \angle LMP = \frac{1}{2} \overset{\frown}{LP}$

2. $\angle PQM = \frac{1}{2} \overset{\frown}{PM} = \angle PIM = \angle IKM + \angle IMK = \angle IMP$, т.к. IM – b_M, $\angle IQP$ в окр. IPM

$\Rightarrow$ ~~QK – b LQM.~~ QP – $b_\angle LQM$.

3. $\angle LQP = \angle IKM + \angle IMK = \frac{1}{2}(\angle K + \angle M) = \frac{1}{2}(180° - \angle L) = 90° - \frac{\angle L}{2}$,

$\angle QLM = \frac{\angle L}{2}$, т.к. LI – $b_\angle$, $\Rightarrow QP \perp LM$, т.к. $\angle QLM + \angle LQP = 90°$, $\Rightarrow$

QP – высота и бис. $\angle LQM$, $\Rightarrow \triangle LQM$ – р.б., $\Rightarrow LQ = QM$, ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	9	2	4	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

$a^3 - b^3 = (abc-1)^2$

$НОД(a,b)=1$, иначе $a^3 - b^3 \vdots p$ ($a,b \vdots p$), $\Rightarrow (abc-1)^2 \vdots p$ - прот.

$(a^3-b^3) = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$НОД(a-b; a^2+ab+b^2) = НОД(a-b; 3ab) = \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix}$

Если $НОД(a-b; 3ab) \vdots p^{\neq 3}$, то $3ab \vdots p$, $\Rightarrow$ БОО $a \vdots p$, тогда т.к $a-b \vdots p$,

то $b \vdots p$, но $НОД(a;b)=1$ - прот.,

Если ~~$НОД(a-b, 3a$~~ $НОД(a-b; a^2+ab+b^2)=1$, то $\begin{cases} a-b=t^2, \\ a^2+ab+b^2=k^2, \end{cases}$

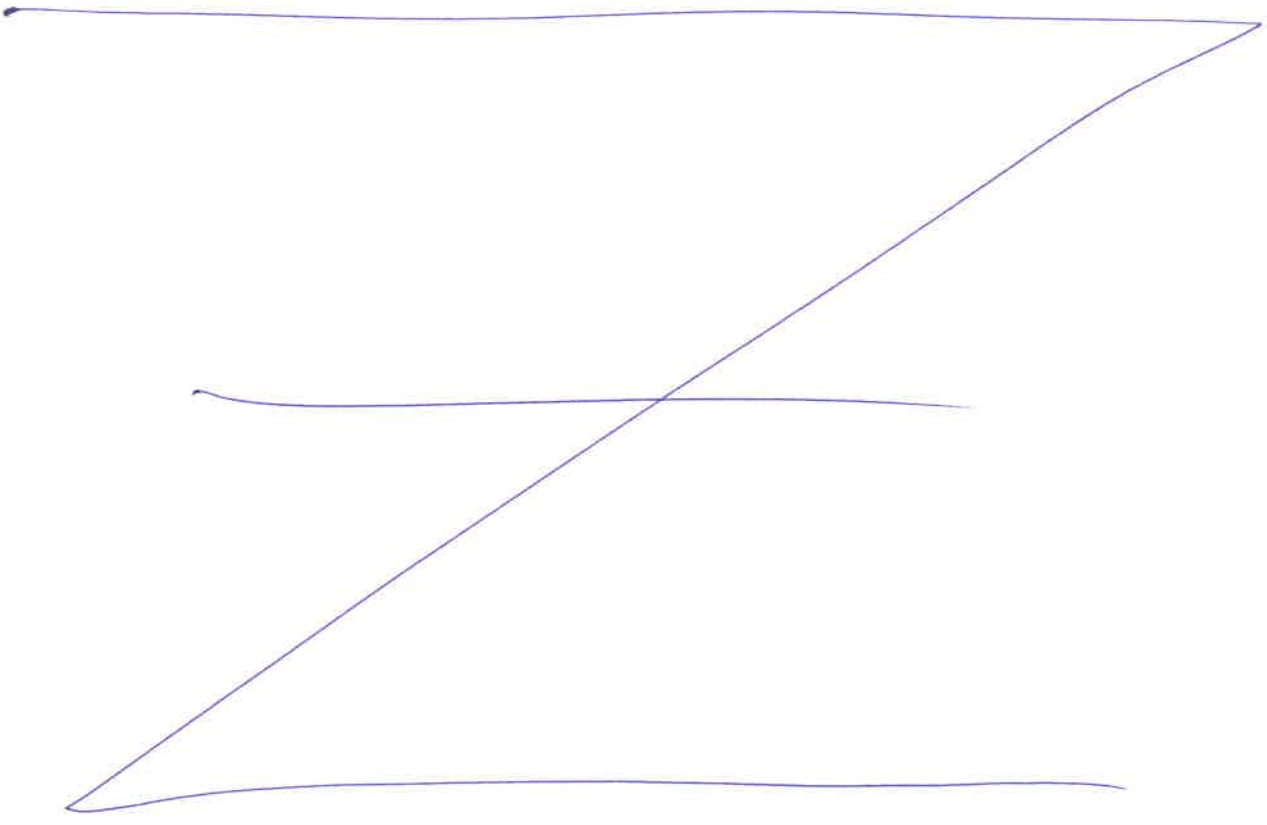
тогда $3ab = k^2 - t^4$, $ab = \frac{k^2-t^4}{3}$, $\Rightarrow k^2t^2 = \left(\frac{k^2-t^4}{3}\cdot c - 1\right)^2$, $\Rightarrow$

$kt = \frac{k^2-t^4}{3}c - 1$, ~~тогда $НОД(k,t)=1$~~

Если $НОД(a-b; a^2+ab+b^2)=3$, то возможен случай

$\begin{cases} a-b=3t^2 \\ a^2+ab+b^2=3k^2 \end{cases} \Rightarrow 3ab = 3k^2 - 9t^4$, $ab = k^2 - 3t^4$, $\Rightarrow$

$9k^2t^2 = ((k^2-3t^4)c-1)^2$, $\Rightarrow$ $3kt = (k^2-3t^4)c - 1$



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	8	6	9	4	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
16	6	20	20	2	///	64

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$f(x) = x^2 - 2x - 1$

$g(x) = x^2 - 3x - 1$

$x_{12} = 1 \pm \sqrt{2}$

$x_{34} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

I) $x_1 = 1+\sqrt{2}$, $x_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$: $g^3(x_1) f(x_3) + g^3(x_2) f(x_4) =$

$= \left((1+\sqrt{2})^2 - 3(1+\sqrt{2}) - 1\right)^3 \cdot \left(\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) - 1\right) +$

$+ \left((1-\sqrt{2})^2 - 3(1-\sqrt{2}) - 1\right)^3 \cdot \left(\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) - 1\right) =$

$= (-1-\sqrt{2})^3 \cdot \frac{1}{4}\left((3+\sqrt{13})^2 - 4(3+\sqrt{13}) - 1\right) +$

$+ (\sqrt{2}-1)^3 \cdot \frac{1}{4}\left((3-\sqrt{13})^2 - 4(3-\sqrt{13}) - 1\right) = (-7-5\sqrt{2})\frac{1}{4}(9+2\sqrt{13}) +$

$+ (5\sqrt{2}-7)\frac{1}{4}(9-2\sqrt{13}) = \frac{1}{4}\left((9-2\sqrt{13})(5\sqrt{2}-7) - (7+5\sqrt{2})(9+2\sqrt{13})\right) =$

$= \frac{1}{4}(45\sqrt{2} - 63 - 10\sqrt{26} + 14\sqrt{13} - (63 + 45\sqrt{2} + 14\sqrt{13} + 10\sqrt{26})) =$

$= \frac{1}{4}(-126 - 20\sqrt{26}) = -31{,}5 - 5\sqrt{26}$

II) аналогично I $x_1 = 1+\sqrt{2}$, $x_4 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ (части суммы меняются местами)

III) $x_1 = 1+\sqrt{2}$, $x_3 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$: $g^3(x_1) f(x_3) + g^3(x_2) f(x_4) =$

$= (-7-5\sqrt{2})\frac{1}{4}(9-2\sqrt{13}) + (5\sqrt{2}-7)\frac{1}{4}(9+2\sqrt{13}) =$

$= \frac{1}{4}(45\sqrt{2} + 10\sqrt{26} - 63 - 14\sqrt{13} - (63 - 14\sqrt{13} + 45\sqrt{2} - 10\sqrt{26})) =$

$= \frac{1}{4}(20\sqrt{26} - 126) = 5\sqrt{26} - 31{,}5$

IV) аналогично III $x_2 = 1+\sqrt{2}$, $x_4 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$.

Ответ: $5\sqrt{26} - 31{,}5$; $-31{,}5 - 5\sqrt{26}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	8	6	9	4	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Рассм. случаи, когда повторяются единицы: 1 1 1 998

1 1 2 997

...

и так 998 случаев, половина повторяется $\Rightarrow$ 499.

двойки: $\frac{1001-2\cdot 2-1}{2}$ = 498 наборов

...

499: $\frac{1001-499\cdot 2-1}{2}$ = 1 набор

случаи не повторяются, т.к. не сущ. две пары одинаковых чисел, где их сумма 1001 ($2n+2k:2$, $1001 \nmid 2$)

Тогда всего наборов: $(1+2\ldots+499)=\frac{499\cdot 500}{2}=124750$

Ответ: 124750

№2

Последовательность: 4, 6, 9, 14, 20, 27, 35, 44, 54, 65, 77, 90, 104, 119, 135, 152, 170, 189, 209, 220, 242, 265, 289, ...

(+5, +6, +14, +15, +23, +24)

$X_{100} = X_3 + (\underbrace{5+6+\ldots+101}_{97\text{ шт.}}) = 9+\frac{106\cdot 97}{2} = 9+53\cdot 97 = 5150$

Ответ: 5150

№5

$(a;b;c) = (2;1;2), (1;2;2)$ ✓

Пусть $НОД(a;b)=k \Rightarrow a^3+b^3 \vdots k^{III}$, $abc:k$,

$\Rightarrow k=1$, $НОД(a;b)=1$ $\quad (abc-1)^2 \nmid k\ (k>1)$

Пусть $a,b:2$: $a^3+b^3:2$, $abc-1 \nmid 2$ ↯

Ответ: $(2;1;2)$, $(1;2;2)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	8	6	9	4	2	5

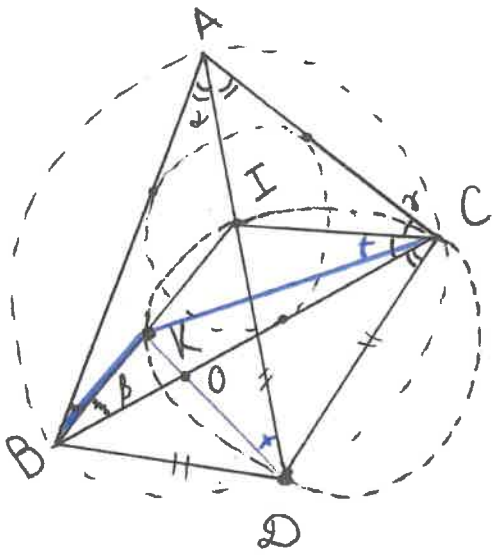
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4



Д-во

Решение: Достаточно д-ть, что $BC \perp KD$ ($BD = CD$ т.к. равн. вписан. углы, $KD \perp BC$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $O = BC \cap KD$ - сер. BC $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ BKC - р/б ч.т.д.)

I) $\angle ICK = \angle IDK = x$

$\angle CAD = \alpha$ $\angle ACI = \gamma$, $\angle ABI = \beta$ $\rightarrow 2(\alpha+\beta+\gamma) = 180^\circ$

$\angle CJD = 180^\circ - \angle IDK - \angle CDI - \angle BCD$ =

$\angle ABC = 2\beta$ (вписан. углы) α

$= 2(\alpha+\beta+\gamma) - x - 2\beta - \alpha =$

$= \alpha + 2\gamma - x$ $(= 90^\circ ?)$

II) Рассм. $\triangle CIK$: $\angle KIC = 180^\circ - \angle IBC - \angle ICB =$ (из $\triangle BIC$: β, γ)

$= 2\alpha + \beta + \gamma$. $\angle IKC = \angle IDC = \angle ABC = 2\beta$ (вписан.)

$\angle ICK = x$ $\rightarrow$ $\Rightarrow$ $180^\circ = (2\alpha+\beta+\gamma) + 2\beta + x$

$2\alpha+2\beta+2\gamma$

Следовательно, $x = \gamma - \beta$. $\angle COD = \alpha + 2\gamma - (\gamma - \beta) = \alpha + \gamma + \beta =$ ($\angle(KD; BC)$)

$= 90^\circ$

ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	0	7	8	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	6	16	20	2	///	64

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

① $f(x) = x^2 - 2x - 1$

$D_1 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow x_{12} = 1 \pm \sqrt{2}$

$g(x) = x^2 - 3x - 1$

$D = 9 + 4 = 13 \Rightarrow x_{34} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

$(g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4)$

Рассмотрим 4 случая выбора корней:

а) $x_1 = 1 - \sqrt{2}$; $x_2 = 1 + \sqrt{2}$; $x_3 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$; $x_4 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$

$g(x_1) = (1 - \sqrt{2})^2 - 3(1 - \sqrt{2}) - 1 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 - 3 + 3\sqrt{2} - 1 = -1 + \sqrt{2}$

$f(x_3) = \left(\frac{3 - \sqrt{13}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3 - \sqrt{13}}{2}\right) - 1 = \frac{9 - 6\sqrt{13} + 13}{4} - 3 + \sqrt{13} - 1 =$

$= \frac{11 - 3\sqrt{13}}{2} - \frac{8 - 2\sqrt{13}}{2} = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$

$g(x_2) = (1 + \sqrt{2})^2 - 3(1 + \sqrt{2}) - 1 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 3 - 3\sqrt{2} - 1 = -1 - \sqrt{2}$

$f(x_4) = \left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right) - 1 = \frac{9 + 6\sqrt{13} + 13}{4} - 3 - \sqrt{13} - 1 =$

$= \frac{11 + 3\sqrt{13}}{2} - \frac{8 + 2\sqrt{13}}{2} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$

$(g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4) = (\sqrt{2} - 1)^3 \left(\frac{3 - \sqrt{13}}{2}\right) +$

$+ (-1 - \sqrt{2})^3 \left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right) = (2\sqrt{2} - 6 + 3\sqrt{2} - 1)\left(\frac{3 - \sqrt{13}}{2}\right) + (-1) \cdot$

$\cdot (1 + 3\sqrt{2} + 6 + 2\sqrt{2})\left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left((5\sqrt{2} - 7)(3 - \sqrt{13}) - (7 + 5\sqrt{2}) \cdot\right.$

$\left. \cdot (3 + \sqrt{13})\right) = \frac{1}{2}\left(15\sqrt{2} - 5\sqrt{26} - 21 + 7\sqrt{13} - 21 - 7\sqrt{13} - 15\sqrt{2} -\right.$

$\left. - 5\sqrt{26}\right) = \frac{1}{2}(-10\sqrt{26} - 42) = \boxed{-5\sqrt{26} - 21}$

б) $x_1 = 1 - \sqrt{2}$; $x_2 = 1 + \sqrt{2}$; $x_3 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$; $x_4 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$

$g(x_1) = -1 + \sqrt{2}$; $g(x_2) = -1 - \sqrt{2}$ (вычислено выше)

$f(x_3) = \left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right) - 1 = \frac{9 + 6\sqrt{13} + 13}{4} - 3 - \sqrt{13} - 1 =$

$= \frac{11 + 3\sqrt{13}}{2} - \frac{8 + 2\sqrt{13}}{2} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	0	7	8	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$f(x_4) = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ (вычислено выше)

$(g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4) = (-1+\sqrt{2})^3 \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) + (-1-\sqrt{2})^3 \cdot \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(2\sqrt{2}-6+3\sqrt{2}-1\right)\left(3+\sqrt{13}\right) - \left(1+3\sqrt{2}+6+2\sqrt{2}\right) \cdot \left(3-\sqrt{13}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\left(5\sqrt{2}-7\right)\left(3+\sqrt{13}\right) - \left(7+5\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{13}\right)\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(15\sqrt{2}+5\sqrt{26}-21-7\sqrt{13}-21+7\sqrt{13}-15\sqrt{2}+5\sqrt{26}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(10\sqrt{26}-42\right) = \boxed{5\sqrt{26}-21}$

б) $x_1 = 1+\sqrt{2}$; $x_2 = 1-\sqrt{2}$; $x_3 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$; $x_4 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

$g(x_1) = -1-\sqrt{2}$; $g(x_2) = -1+\sqrt{2}$; $f(x_3) = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$; $f(x_4) = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

$(g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4) = -\left(1+\sqrt{2}\right)^3 \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) + \left(\sqrt{2}-1\right)^3 \cdot \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(5\sqrt{2}-7\right)\left(3+\sqrt{13}\right) - \left(7+5\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{13}\right)\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(10\sqrt{26}-42\right) = \boxed{5\sqrt{26}-21}$

в) $x_1 = 1+\sqrt{2}$; $x_2 = 1-\sqrt{2}$; $x_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$; $x_4 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$

$g(x_1) = -1-\sqrt{2}$; $g(x_2) = -1+\sqrt{2}$; $f(x_3) = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$; $f(x_4) = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$

$(g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4) = -\left(1+\sqrt{2}\right)^3 \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) + \left(\sqrt{2}-1\right)^3 \cdot \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(5\sqrt{2}-7\right)\left(3-\sqrt{13}\right) - \left(7+5\sqrt{2}\right) \cdot \left(3+\sqrt{13}\right)\right) = \boxed{-5\sqrt{26}-21}$

Таким образом, у нас получилось два возможных значения данного выражения.

Ответ: $5\sqrt{26}-21$; $-5\sqrt{26}-21$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	0	7	8	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

(2) $x_1=4$, $x_2=6$

$x_3 > 2\cdot 6-4 \Rightarrow x_3>8 \Rightarrow x_3=10$,

Т.К. ЧИСЛО ДОЛЖНО БЫТЬ СОСТАВНЫМ

$x_4 > 2\cdot 10-6 \Rightarrow x_4>14 \Rightarrow x_4=15$

$x_5 > 2\cdot 15-10 \Rightarrow x_5>20 \Rightarrow x_5=21$

$x_6 > 2\cdot 21-15 \Rightarrow x_6>27 \Rightarrow x_6=28$

$x_7 > 2\cdot 28-21 \Rightarrow x_7>35 \Rightarrow x_7=36$

Заметим, что $x_4 = x_6+8$

$x_6 = x_5+4$

$x_5 = x_4+6$

$x_4 = x_3+5$

Тогда $x_7 = x_6+8 = x_5+7+8 = x_4+6+7+8 = x_3+5+6+7+8 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n = x_3+(5+6+\ldots+n+(n+1))$

Используя эту закономерность, можно сказать, что $x_{100} = x_3+5+6+\ldots+101 = 10+5+6+\ldots+101$

Найдём сумму чисел от 5 до 101:

$a_1=5$

$d=1 \Rightarrow$

$n=101-5+1=97 \Rightarrow$ $a_n = a_1+d(n-1)=101$

$S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$; $S_{97} = \frac{(5+101)\cdot 97}{2} = \frac{106\cdot 97}{2} = 53\cdot 97 = 5141$

$5141+10 = 5151$

Ответ: 5151

(3) $\exists a,b,c,d$ - НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

$a+b+c+d=1001$

$\exists a=b$, тогда $a+b+c+d = 2a+c+d = 1001 \Rightarrow$

$\Rightarrow c+d = 1001-2a$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	0	7	8	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

При $a=1$, $c+d=999$

$c=1, d=998$
$c=2, d=997$
....
$c=499, d=500$
} 499

Следующие комбинации чисел c и d будут повторять те, которые уже есть

При $a=2$, $c+d=997$

$c=1, d=996$
$c=2, d=995$
...
$c=498, d=499$
} 498

....

При $a=499$, $c+d=3$

$c=1, d=2 \neq 1$

При $a=500$, $c+d=1 \Rightarrow c, d \in \varnothing$, т.к. они должны быть натуральными.

Видим закономерность, удовлетворяющую всем a.

Тогда общее количество подходящих случаев будет: $1+2+\ldots+498+499$.

Найдём значение этого выражения, как сумму арифметической прогрессии.

$a_1=1$

$d=1$

$a_n=499 \Rightarrow n=499$

$S_n=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$

$S_{499}=\frac{(1+499)\cdot 499}{2}=\frac{500\cdot 499}{2}=499\cdot 250=124790$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	0	7	8	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

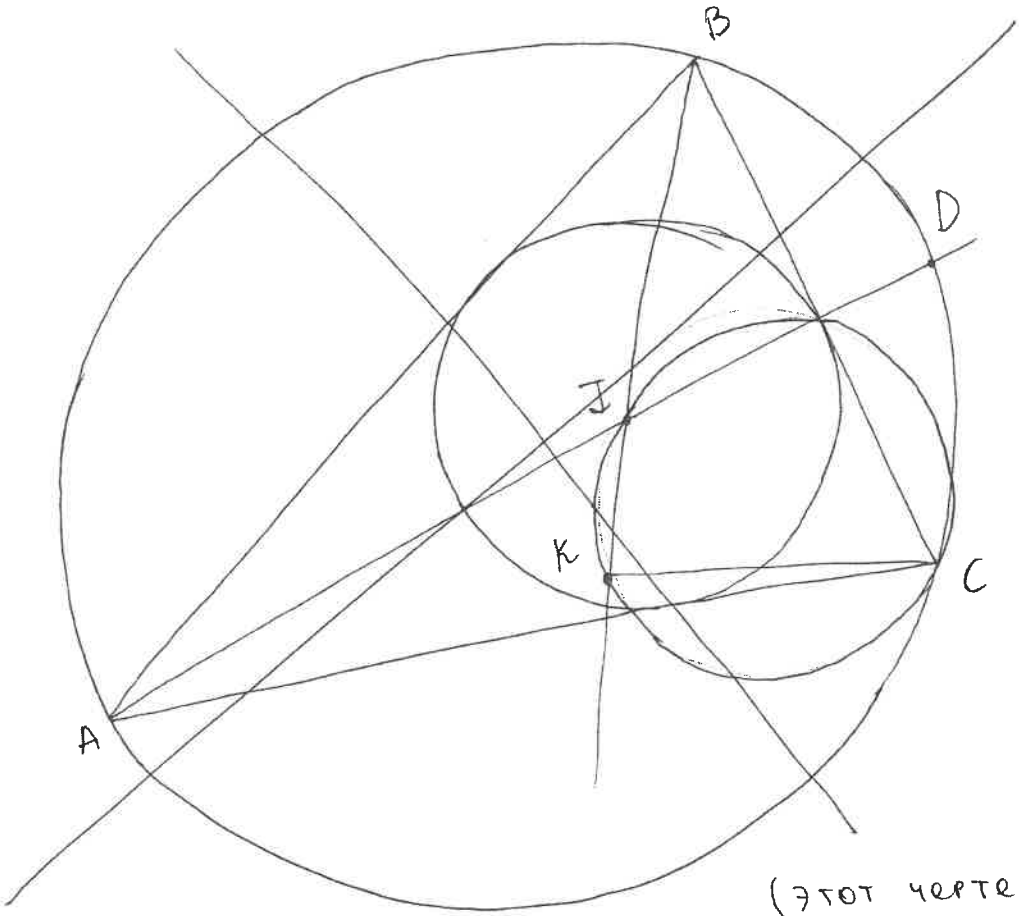
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Ответ: 124790

(4)



(этот чертеж не учитывать)

Дано: $\triangle ABC$ – не р/б

$\omega_1(I; r_1)$ – впис. в $\triangle ABC$

$\omega_3(O_3; r_3)$ – опис. около $\triangle ABC$

$AI \cap \omega_3 = D$

$\omega_2(O_2; r_2)$; $C, D, I \in \omega_2$

$\omega_2 \cap BI = K$

Д-ть: $BK = CK$

~~Решение:~~

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	0	7	8	3	2	5

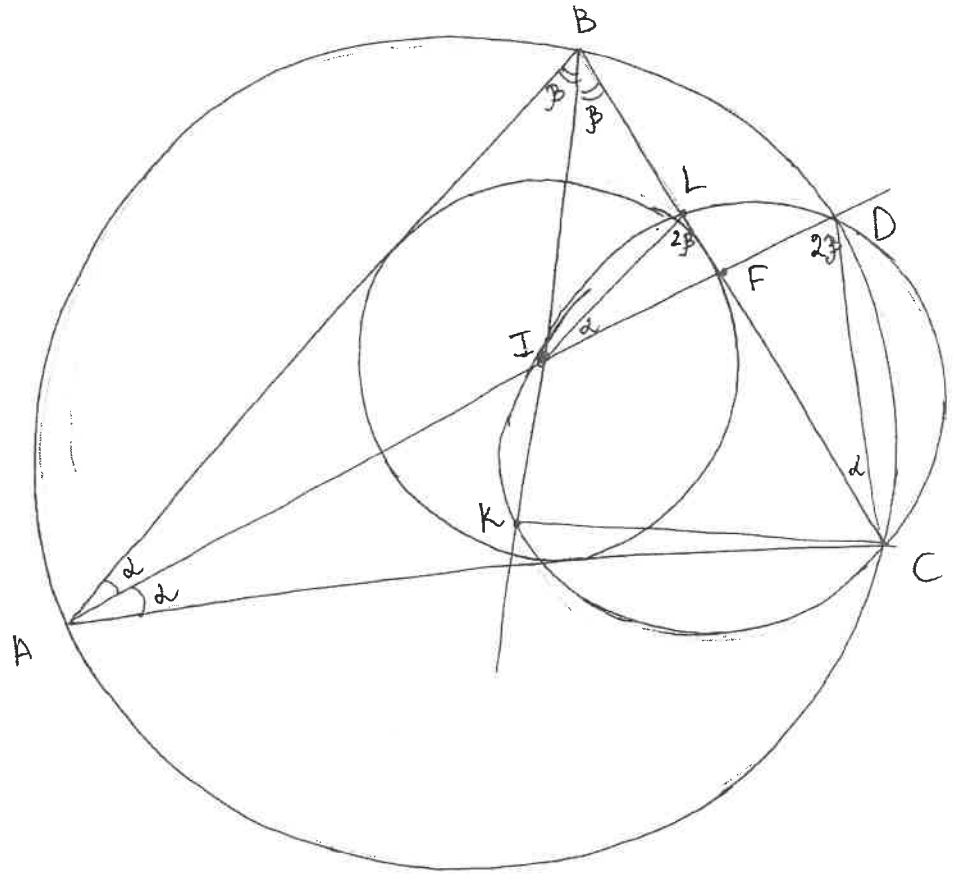
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

~~$\angle BC \cap \omega_2 = L$~~



Решение:

$\angle BC \cap \omega_2 = L$; $BC \cap AD = F$

AI и BI - биссектрисы по св. вписс. окр.

Тогда $\angle BAI = \angle IAC = \alpha$

$\angle ABI = \angle IBC = \beta$

В ω_3: $\angle ADC = \frac{1}{2} \cup AC = \angle ABC = 2\beta$

$\angle BCD = \frac{1}{2} \cup BD = \angle BAD = \alpha$

В ω_2: $\angle LID = \frac{1}{2} \cup LD = \angle LCD = \alpha$; $\angle ILC = \frac{1}{2} \cup IC = \angle IDC = 2\beta$

$\angle BLI = 180^\circ - \angle ILF = 180^\circ - 2\beta$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	0	7	8	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$\angle BIL = 180^\circ - \angle IBL - \angle BLI$

$(\triangle BIL) = 180^\circ - \beta - 180^\circ +$

$+2\beta = \beta$

$\angle KIF = 180^\circ - \angle LIF - \angle BIL = 180^\circ - \alpha - \beta$

В ω_2: $\angle KID = 180^\circ - \angle KCD \Rightarrow \angle KCD = 180^\circ - 180^\circ +$

$+\alpha + \beta = \alpha + \beta$

$\angle KCF = \angle KCD - \angle FCD = \alpha + \beta - \alpha = \beta$

В $\triangle BKC$: $\angle KBC = \beta = \angle KCB \Rightarrow \triangle BKC$ – р/б $\Rightarrow$

$\Rightarrow BK = CK$ ч.т.д.

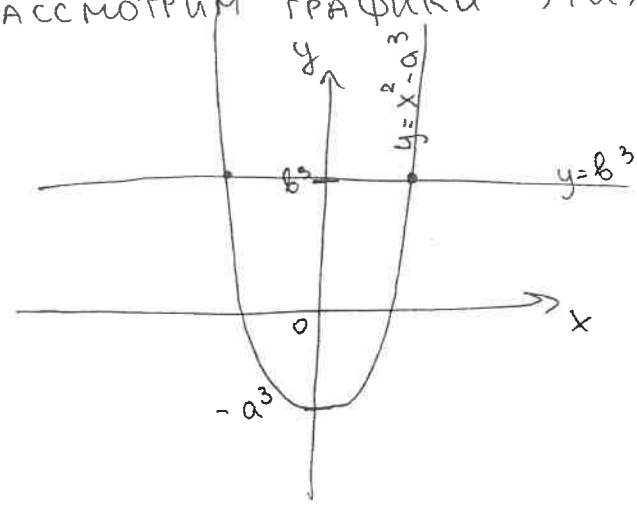
(5) a, b, c – натуральные числа

$a^3 + b^3 = (abc - 1)^2 = x^2$

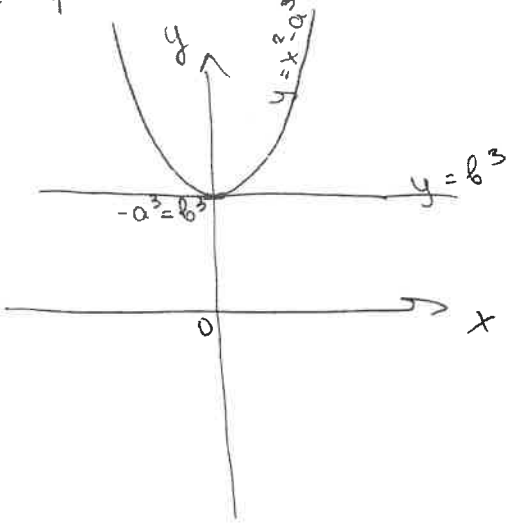
$b^3 = x^2 - a^3$

$\begin{cases} y = b^3 \\ y = x^2 - a^3 \end{cases}$

Рассмотрим графики этих функций:



1 график



2 график

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

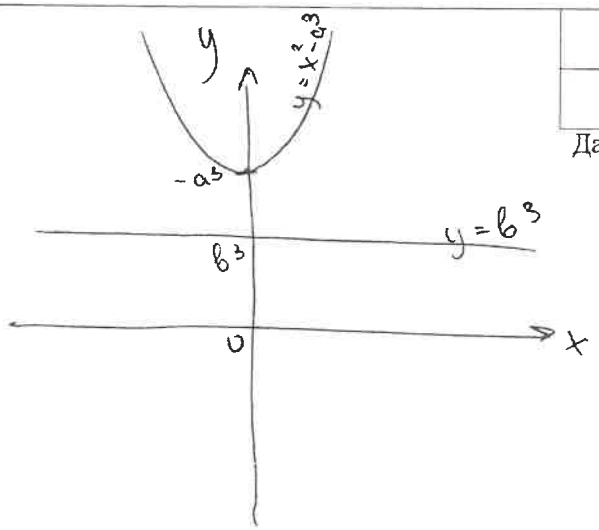
М	А	0	0	0	1	0	7	8	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)



3 график

На 3-ем графике $-a^3 > 0$, что не удовлетворяет условию, т.к. a - натуральное число $\Rightarrow$ $\Rightarrow a^3 > 0$

На 2-ом графике $-a^3 = b^3$, что не удовлетворяет условию, т.к. a и b - натуральные числа $\Rightarrow b^3 > 0$, $-a^3 < 0$

На первом графике две точки пересечения, а значит мы можем подобрать только две пары a и b, чтобы сумма кубов была целым квадратом.

Методом подбора определим, что такие пары - это $a=1, b=2$ и $a=2, b=1$.

а) $a=1, b=2$

$1^3+2^3 = 1+8 = 9$

$(1\cdot 2\cdot c-1)^2 = (2c-1)^2 = 9 \Rightarrow 2c-1 = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} 2c-1=3 \\ 2c-1=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=2 \\ c=-1 \end{cases}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	0	7	8	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Т.к. c - НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО, ТО $c > 0 \Rightarrow$

$c = 2$.

б) $a = 2,\ b = 1$

$2^3 + 1^3 = 8 + 1 = 9$

$(2 \cdot 1 \cdot c - 1)^2 = (2c - 1) = 9 \Rightarrow 2c - 1 = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} 2c - 1 = 3 \\ 2c - 1 = -3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ c = -1 \end{cases}$ $\quad c > 0 \Rightarrow c = 2$

ТАКИМ ОБРАЗОМ, У НАС ПОЛУЧАЕТСЯ ДВЕ ТРОЙКИ ЧИСЕЛ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ:

$(1; 2; 2)$ и $(2; 1; 2)$

Ответ: $a_1 = 1, b_1 = 2, c_1 = 2$

$a_2 = 2, b_2 = 1, c_2 = 2$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	4	9	8	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	2	X	III	62

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задание 1.

Рассмотрим расположение т.С.

т.С имеет координату $(-2; -\frac{1}{2})$, т.к. лежит на гиперболе $y = \frac{1}{x}$. Прямая АС имеет координату: $y = 2x + a$. $-\frac{1}{2} = -4 + a \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 3{,}5$

Прямая ВС имеет координату: $y = \frac{1}{2}x + b$. $-\frac{1}{2} = -1 + b \Rightarrow b = 0{,}5$

Исходя из этого можем найти координаты т. А:

$\begin{cases} y = 2x + 3{,}5 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow 2x + 3{,}5 = \frac{1}{x} \Rightarrow 2x^2 + 3{,}5x - 1 = 0$

$4x^2 + 7x - 2 = 0$

$x = \frac{-7-9}{8} = -2 \quad x = \frac{-7+9}{8} = \frac{1}{4}$

т.к. -2 - абсцисса в т.С $\Rightarrow x = \frac{1}{4}$ - абсцисса А $\Rightarrow$ координата т.А $(\frac{1}{4}; 0)$

Найдем координаты т.В:

$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \quad x = -2 \quad x = 1$

Исходя из этого, получаем, что координаты т.В $(1; 1)$

Центр описанной ок-ти равноудален от вершин треугольника. Но получаем, что $OA = OB = OC \Rightarrow OA^2 = OB^2 = OC^2$

Пусть т.О с координатами $(x; y)$ - центр описанной ок-ти, тогда

$\begin{cases} OA^2 = (x - \frac{1}{4})^2 + (y - 4)^2 \\ OB^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 \\ OC^2 = (x+2)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - \frac{1}{4})^2 + (y-4)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 \\ (x+2)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 \end{cases}$

Раскроем скобки и решим систему линейных уравнений:

$\begin{cases} x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2x + 1 \\ x^2 + 4x + 4 + y^2 + y + \frac{1}{4} = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2x + 1 \end{cases}$

$\begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{16} - 8y + 16 = -2x + 1 - 2y + 1 \\ 4x + 4 + y + \frac{1}{4} = -2x + 1 - 2y + 1 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{3}{2}x - 6y = 17\frac{1}{16} \\ 6x + 3y = 2\frac{1}{4} \end{cases}$

$\frac{3}{2}x - \frac{3}{2} + 12x = 17\frac{1}{16}$

$-\frac{21}{2}x = \frac{231}{16} \Rightarrow x = -\frac{11}{8}$, подставив x во 2-е уравнение, получаем, что $3y = 6 \Rightarrow y = 2$.

Ответ: $(-\frac{11}{8}; 2)$

Шифр: МА 000 1498325

Олимпиада школьников "Ребьюнок"

Вариант 4

Задание 2.

$x_n = n^2 + 300$

$y_n = (x_n; x_{n+1})$

$x_{n+1} = (n+1)^2 + 300$

$НОД(x_n; x_{n+1}) = (n^2 + 300; n^2 + 2n + 1 + 300) = (n^2 + 300; 2n+1)$

По св-ву алгоритма Евклида $(2n+1)$ - нечетное число $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ НОД - нечетное число

$НОД = (4n^2 + 1200; 2n+1) = (-2n + 1200; 2n+1) =$

$= (1201; 2n+1)$

(По св-ву алгоритма Евклида, мы можем вычесть из одного числа другое без изменения НОД)

1201 - простое число, исходя из этого, получаем, что НОД будет равен либо единице, либо 1201. НОД при значении 1201 достигается при значении $n = 600$. Тогда получаем, что максимальное возможное значение $y_n = 1201$.

(т.к. $2n+1$ - нечетное значение мы можем данное выражение на 4 без изменения НОДа, т.к 4 - четное число)

Ответ: 1201

Задание 3.

Было было собрано 1001 орех. Все это количество было распределено на 3 заполненных min одним орехом, кучки.

Их можно выбрать $\frac{1000 \cdot 999}{2}$ вариациями $= 500 \cdot 999$.

Также нужно отсеять те варианты, в которых кол-во орехов может быть равное в 2-х кучках. Пусть в 2-х каких-то кучках будет по m-орехов, а в другой n-орехов.

$2m + n = 1001$

Исходя из этого равенства, определяем, что $m \in [1; 500]$. Нужно отметить, что каждое значение m дает единственное значение n, но при этом $m \neq n$ (т.к. при делении 1001 на 3 не получаем целое число). Итого получаем $500 \cdot 3$ случаев с равными кучками, т.к. кол-во n орехов может быть в любой кучке.

Исходя из этого, получаем $500 \cdot 999 - 500 \cdot 3$ вариации. Также нужно учесть, что имеется $3! = 6$ конфигураций чисел x, y, z, удовлетворяющих только 1 значение, в которых первая переменная больше.

Итого получаем $\frac{500 \cdot 999 - 500 \cdot 3}{3} = 500 \cdot 333 - 500 = 500 \cdot 332 =$

$= 166000$ способов

Ответ: 166000 способов

Шифр: МА 000 1498325

Олимпиада школьников „Ведёнок"

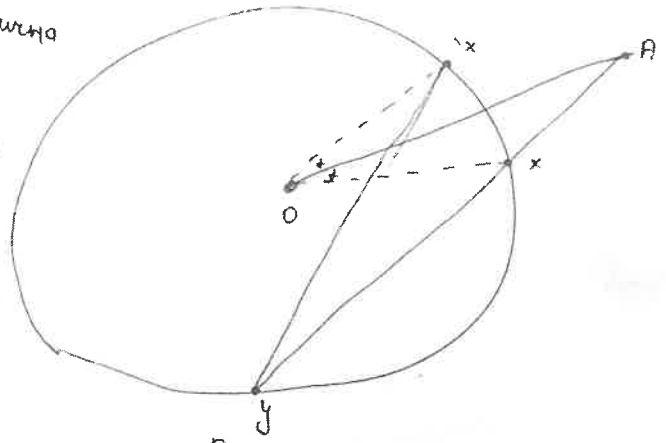
Вариант 4

Задание 4.

Дано

О - центр ок-ти

т. x симметрична т. $1x$ о-ть, y $1x$ вида пересечения ОА



Док-во.

Рассмотрим ок-ть ω с произвольную т. А, проведем из нее секущую к ок-ти. При проведении касательной к ок-ти образуется только одна т. пер. Радиус с точкой касания касательной к ок-ти образуют угол равный 90°. При проведении секущей с г-мя т. пересечения, к обеим точкам угол между радиусом и секущей будет $< 90°$. т.к. углы симметричны $\Rightarrow \angle 1x O x < 180°$. Для того, чтобы $1y$ не пересекала ОА, угол $\angle 1xOx$ должен быть $\geq 180°$, что быть не может.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	7	9	1	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
16	6	20	20	X	11	62

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1 Заметим, что $f(x_3)=g(x_3)+x_3=x_3$, $f(x_4)=g(x_4)+x_4=x_4$,

$g(x_1)=f(x_1)-x_1=-x_1$, $g(x_2)=f(x_2)-x_2=-x_2$

$x^2-2x-1=0$

$x=1\pm\sqrt{2}$ - корни x_1 и x_2

$x^2-3x-1=0$

$x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$ - корни x_3 и x_4

$(g(x_1))^3 f(x_3)+(g(x_2))^3 f(x_4)=-x_1^3\cdot x_3+-x_2^3\cdot x_4=-x_1^3 x_3+(-x_2)^3\cdot x_4$

Т.к. ~~x_1 и x_2 разных знаков~~ x_3 и x_4 разных знаков, x_1 и x_2 разных знаков, выражение может принимать два разных значения:

1) $-(1+\sqrt{2})^3\cdot\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)+(\sqrt{2}-1)^3\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)=-(1+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+6)\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)+(2\sqrt{2}-6+3\sqrt{2}-1)\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)=$

$=-(5\sqrt{2}+7)\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)+(5\sqrt{2}-7)\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)=$ ~~$-\frac{(5\sqrt{2}+7)^2\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2}{(5\sqrt{2})^2-7^2}+1=\frac{-(5\sqrt{2}+7)^2\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2}{50-49}\left(\frac{9}{4}-\frac{13}{4}\right)=$~~

~~$=(5\sqrt{2}+7)^2\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}(-15\sqrt{2}-5\sqrt{26}-21-7\sqrt{13}+15\sqrt{2}+5\sqrt{26}-21+7\sqrt{13})=$~~

$=-21$

2) $-(1+\sqrt{2})^3\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)+(\sqrt{2}-1)^3\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)=-(5\sqrt{2}+7)\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)+(5\sqrt{2}-7)\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)=$

$=\frac{1}{2}(-15\sqrt{2}+5\sqrt{26}-21+7\sqrt{13}+15\sqrt{2}+5\sqrt{26}+21-7\sqrt{13})=5\sqrt{26}-21$

Ответ: -21 ; $5\sqrt{26}-21$

№3 Рассмотрим возможное кол-во равных чисел в наборе:

4: $a+a+a+a=1001$, $a\in N$

$4a=1001$, однако $1001\not\vdots 4$ $\Rightarrow$ такого быть не может

3: $a+a+a+b=1001$ $a\neq b$, $a,b\in N$

2: 1) $a+a+b+b=1001$, $a\neq b$, $a,b\in N$

$2a+2b=2(a+b)=1001$, однако $1001\not\vdots 2$ $\Rightarrow$ такого быть не может

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	7	9	1	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2) $a+a+b+c=1001$, $a\neq b$, $b\neq c$; $a,b,c\in N$

Тогда наборы чисел имеют вид: $a+a+b+c=1001$, $a,b,c\in N$, $(b\neq c)$ (b или c может равняться a, а может и нет) (a не 1, иначе $b=c$)

При $a=1$

b	c
1	998
2	997
⋮	⋮
997	2
998	1

Всего 998 вариантов $(1001-2a-1)$, каждый вариант повторяется дважды $\Rightarrow \frac{998}{2}=499$ вариантов

При $a=2$

b	c
1	996
2	995
⋮	⋮
995	2
996	1

$(1001-2a-1)=996$, $\frac{996}{2}=498$ вариантов

$a\leq 499$

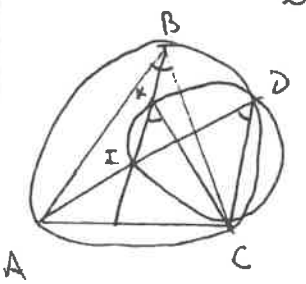
Всего вариантов: $\frac{(1001-3)+(1001-5)+\ldots+(1001-999)}{2}=\frac{499\cdot 1001-(3+5+\ldots+999)}{2}=$

$=\frac{499\cdot 1001-\frac{1002}{2}\cdot 499}{2}=\frac{499(1001-501)}{2}=499\cdot 250=124750$

Ответ: у 124750 наборов.

№4 Рассмотрим ~~трудный~~ случай:

1) Точка K лежит между B и I



I $ABDC$ – вписанный четырехугольник

$\angle ABC=\frac{1}{2}\cup AC=\angle ADC$ (вписанные $\angle$)

(пусть $\angle ABC=\angle ADC=\angle 1$)

II $CIKD$ – вписанный четырехугольник.

$\angle IKC=\frac{1}{2}\cup IC=\angle IDC=\angle 1$ (вписанные $\angle$)

$\angle CKB=180^\circ-\angle IKC=180^\circ-\angle 1$ (смежные $\angle$)

III $\triangle CKB$: $\angle KBC=\frac{\angle ABC}{2}=\frac{\angle 1}{2}$ (т.к. BI – биссектриса $\angle ABC$)

$\angle KCB=180^\circ-\angle CKB-\angle KBC=180^\circ-(180^\circ-\angle 1)-\frac{\angle 1}{2}=\frac{\angle 1}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	7	9	1	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

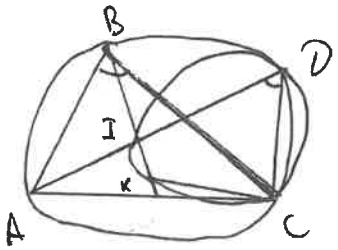
1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\Rightarrow \angle KCB = \frac{1}{2} = \angle KBC \Rightarrow \triangle CKB$ р/б (по пред.) $\Rightarrow BK = CK$ что

2) Точка K лежит на продолжении BI (за точкой I)



I Пусть $\angle ABC = L$

ABDC – впис. четырёхугол.

$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC = \angle ADC = L$ (впис. $\angle$)

II четырехугол. CKID – впис.,

$\Rightarrow \angle BKC + \angle IDC = 180°$ (по св. впис. чет.)

$\Rightarrow \angle BKC = 180° - L$

III $\triangle CKB$: $\angle KBC = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{L}{2}$ (т.к. BK – бисс.)

$\angle KCB = 180° - \angle KBC - \angle OCC = 180° - \frac{L}{2} - (180° - L) = \frac{L}{2}$

$\Rightarrow \angle KBC = \angle KCB = \frac{L}{2} \Rightarrow \triangle CKB$ р/б $\Rightarrow BK = CK$ что

~~3) Точка K лежит внутри угла~~

~~В обоих случаях~~ $BK = CK$ что

№2 Пусть последние три числа на доске a, b, c, где $c = 2b - a + 1$, следующее число $> 2c - b = 4b - 2a - b + 2 = 2 \cdot 36 - 2a = 2(c-1) + b - a + 2 = c + b - a + 1$, значит числа будут $\geq c + (b-a) + 2$.

4, 6, 9, 14

$2 \cdot 6 - 4 = 8 \to 9$

$2 \cdot 9 - 6 = 12 \to 14$

Начиная с 14 разность последующих чисел будет увеличиваться на один ($14 - 9 = 5$, след. число $= 14 + 5 + 1 = 20$, далее $20 + 6 + 1 = 21$ и т.д.)

100-е число $= 9 + (5 + 6 + \ldots + 101) = 9 + \frac{5+101}{2} \cdot 97 = 5150$

Ответ: 5150

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	3	3	8	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Пишется только по одну сторону листа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	X	20	2	///	62

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1.

Если $y = \frac{1}{x}$ и $x = -2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$

Пусть через точку C проведены прямые:

$y_1 = k_1 2x + b_1$

$y_2 = \frac{1}{2}x + b_2$

Т.К. y_1 проходит через C, то $-\frac{1}{2} = -4 + b_1 \Rightarrow b_1 = \frac{7}{2}$

Т.К. y_2 проходит через C, то $-\frac{1}{2} = -1 + b_2 \Rightarrow b_2 = \frac{1}{2}$

Тогда $y_1 = 2x + \frac{7}{2}$

$y_2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Найдем точки пересечения гиперболы $y = \frac{1}{x}$ и прямых y_1 и y_2:

$\frac{1}{x} = 2x + \frac{7}{2} \mid \cdot x$

$2x^2 + \frac{7}{2}x - 1 = 0$

$x_1 = -2;\ x_2 = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \mid \cdot 2x$

$x^2 + x - 2 = 0$

$x_1 = -2;\ x_2 = 1$

Значит прямая $y_1 = 2x + \frac{7}{2}$ пересекает гиперболу в точке $A(\frac{1}{4}; 4)$

прямая $y_2 = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ пересекает гиперболу в точке $B(1; 1)$

Рассмотрим $\triangle ABC$:

$\vec{CA}\left(\frac{9}{4}; \frac{9}{2}\right);\ \vec{CB}\left(3; \frac{3}{2}\right);$

$|\vec{CA}| = \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{16} + \frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{81 \cdot 5}{16}} = \frac{9\sqrt{5}}{4}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	3	3	8	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамках справа

$|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{9+\frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

$\cos\angle C = \frac{\frac{27}{4}+\frac{27}{4}}{\frac{9\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{3\sqrt{5}}{2}} = \frac{\frac{27}{2}}{\frac{27\cdot 5}{8}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin\angle C = \frac{3}{5}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\frac{9}{16}+9} = \frac{3\sqrt{17}}{4} \Rightarrow R_{ABC} = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{2\sin C} = \frac{\frac{3\sqrt{17}}{4}\cdot 5}{8\cdot 3} = \frac{5\sqrt{17}}{8}$

Заметим, что $AC^2 > AB^2 + BC^2$, т.е. $\triangle ABC$ – тупоугольный,
Значит центр описанной окружности лежит вне $\triangle ABC$

Пусть $O(x_0; y_0)$ – центр описанной окружности.

Тогда $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = R \Leftrightarrow \begin{cases} (x_0-\frac{1}{4})^2+(y_0-4)^2 = \frac{25\cdot 17}{64} \\ (x_0-1)^2+(y_0-1)^2 = \frac{25\cdot 17}{64} \end{cases}$

$x_0^2 - \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{16} + y_0^2 - 8y_0 + 16 = x_0^2 - 2x_0 + 1 + y_0^2 - 2y_0 + 1$

$\frac{3}{2}x_0 - 6y_0 = 2 - 16 - \frac{1}{16}$

$y_0 = \frac{1}{32}(75+8x_0)$

$x_0^2 - 2x_0 + 1 + \left(\frac{75}{32} - 1 + \frac{1}{4}x_0\right)^2 = \frac{425}{64}$

После элементарных преобразований:

$1088x_0^2 - 1360x_0 - 3927 = 0$

$x_0 = -\frac{11}{8}$ или $x_0 = \frac{21}{8}$

П.к. $\triangle ABC$ тупоугольный, то $x_0 = -\frac{11}{8}$

Тогда $y_0 = \frac{1}{32}\left(75 - \frac{11}{8}\cdot 8\right) = 2$

Ответ: $\left(-\frac{11}{8}; 2\right)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	3	3	8	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Превратится только то, что написано в данной строке листа в рамке справа

№1.

$g_n = НОД((n+1)^2+300;\ n^2+300) = НОД(n^2+2n+1+300;\ n^2+300) =$

$= НОД(n^2+300;\ 2n+1)$ (т.к. $НОД(a;b) = НОД(b;\ a-b)$; Алгоритм Евклида)

т.к. $2n+1$ – нечетно, то:

$НОД(n^2+300;\ 2n+1) = НОД(2n^2+600;\ 2n+1) = НОД(2n+1;\ n-600)$

$= НОД(n-600;\ 1201) \leqslant 1201$ (т.к. если $НОД(a;b) = d$ и в частном, то $НОД(2a;b) = d) НОД(2a;b) =$

$= НОД(b;r)$, где r – остаток от деления a на b, $НОД(a,b)$

$= НОД(a;-b)$)

При $n = 600$: $НОД(n-600;\ 1201) = НОД(0;\ 1201) = 1201$

Проверим:

$600^2+300 = 360300 = 1201 \cdot 300 = n^2+300$

$601^2+300 = 361501 = 1201 \cdot 301 = (n+1)^2+300$

т.к. 300 и 301 – взаимнопростые, то $НОД(361501;\ 360300) = 1201$

Ответ: 1201

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	3	3	8	7	2	5

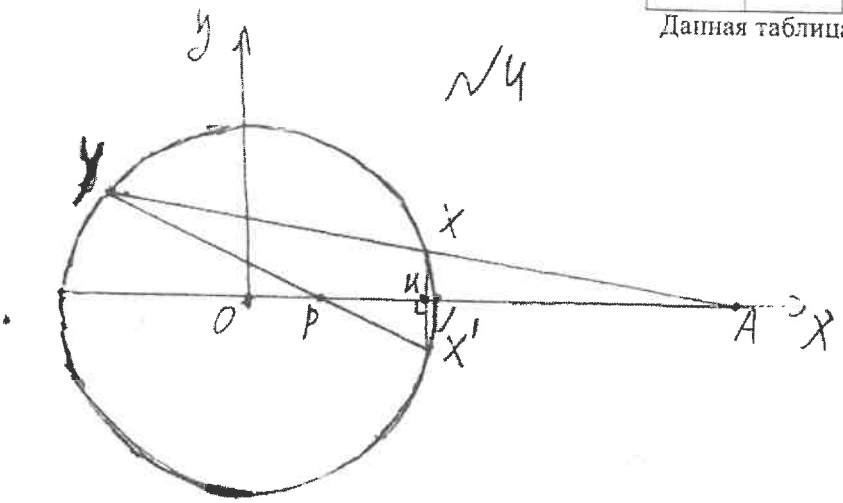
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано в этой стороне листа в рамке справа

№4



Т.к. X и X' - симметричны, то $XX' \perp OA$ и $XH = HX'$.

Введем систему коорд; O - начало координат; $A \in Ox$.

Пусть $A(a;0)$

Тогда (OY) имеет уравнение $y = k(x-a)$

Ур. окружности запишем в виде:

$x^2 + y^2 = R^2$

Найдем точки пересечения секущей с окр.

Из уравнения: $x^2 + k^2(x-a)^2 = R^2$

Раскроем скобки и приведем подобные:

$(1+k^2)x^2 - 2ak^2 + a^2k^2 - R^2 = 0$

Применим к данному кв. ур. относительно x Т. Виета:

$x_1 + x_2 = \frac{2ak^2}{1+k^2}$.

$x_1 + x_2 = \frac{a^2k^2 - R^2}{1+k^2}$; Тогда $X(x_1; k(x_1-a))$; $Y(x_2; k(x_2-a))$

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

Тогда $X'(X_1; -K(X_1-a))$

Найдем ур. прямой $(X'Y)$ по 2-м точкам:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y+k(x_1-a)}{k(x_2-a)+k(x_1-a)}$$

Тогда: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y+k(x_1-a)}{k(x_2+x_1-2a)}$

$$y = \frac{k(x_2+x_1-2a)(x-x_1)}{x_2-x_1} - k(x_1-a)$$

Выразим абсциссу P:

$$\frac{k(x_2+x_1-2a)(x-x_1)}{x_2-x_1} = k(x_1-a)$$

Тогда $X = \frac{(x_1-a)(x_2-x_1)}{(x_2+x_1-2a)} + x_1 = \frac{x_1^2+x_1x_2-x_1^2-ax_2+ax_1+x_1x_2-2ax_1}{x_2+x_1-2a}$

$$= \frac{-a(x_1+x_2)+2x_1x_2}{x_1+x_2-2a} =$$

$$= \frac{-a\left(\frac{2ak^2}{1+k^2}\right)+2\left(\frac{a^2k^2-R^2}{1+k^2}\right)}{\frac{2ak^2}{1+k^2}+2a} = \frac{-2a^2k^2+2a^2k^2-2R^2}{-2ak^2-2a-2ak^2} = \frac{R^2}{a}$$

Значит абсцисса точки R не зависит от K, а зависит лишь от радиуса данной окружности и данной точки A.

Т.к. точка P лежит на оси абсцисс, то ее ордината

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	3	3	8	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано на этой стороне листа в рамке справа

$2 \cdot 3^{(m-2n-1)} - 3^n \cdot C_1 - (2C_1+1) = 0$

Если $m-2n-1 \geq n$, то аналогично:

$2^2 \cdot 3^{n-3n-1} - 3^n \cdot C_2 - 1 + 2C_2) = 0$, где $C_2 \cdot 3^n = 2C_1+1$

Продолжая далее, пока $m-Kn-1 \geq n$ получим:

$2^{K-1} \cdot 3^{m-Kn-1} - 3^n \cdot C_{K-1} - (2C_{K-1}+1) = 0$

Теперь $m-Kn-1 < n$

Заметим, что можно изначально не выделять случай $m-n-1 \geq n$, а рассмотреть его в общем случае

$m-Kn-1 < n \leq m-(K-1)n-1$, $K \in N$.

Вернемся к ур: $2^{K-1} \cdot 3^{m-Kn-1} - 3^n \cdot C_{K-1} - (2C_{K-1}+1) = 0$

~~Поделим уравнение на~~

Тогда: $(2C_{K-1}+1)$ делится на 3^{m-Kn-1}.

Тогда $2^{K-1} - 3^{(K+1)n-m+1} \cdot C_{K-1} - C_K = 0$, где $2C_{K-1}+1 = 3^{\cdot}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	4	5	5	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
10	20	12	20	//	////	62

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

$n \in \mathbb{N}$

$x_n = n^2 + 300$

$y_n = (x_n, x_{n+1})$ max y_n – ?

$(n^2+300, (n+1)^2+300)$ – преобр. это выражение по алгоритму Евклида:

$(n^2+300, n^2+2n+301) = (n^2+300, 2n+1) =$

= 2 случая:

1) $n : 2 \Rightarrow n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$

$(4k^2+300, 4k+1) = (4k^2+300-k(4k+1), 4k+1) = (300-k, 4k+1) = (300-k, 4k+1+4(300-k)) = (300-k, 1201) \le 1201$

т.к. $k \in \mathbb{N}$.

2) $n \not: 2 \Rightarrow n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$

$(4k^2+4k+301, 4k+3) =$

$= (4k^2+4k+301-k(4k+3), 4k+3) =$

$= (k+301, 4k+3) = (k+301, 4k+3-4(k+301)) =$

$= (k+301, 1201) = 1201$ при $k = 900 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 1801$

~~При~~

Ответ: 1201 при $n = 1801$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

M	A	0	0	0	1	4	5	5	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

1001 орех

Боря больше всех, все разное кол-во орехов, ≥ 1.

Решение: Если Боря получил $< \frac{1001}{3}$ орехов, то по принципу Дирихле найдется бельчонок из двух оставш., котор. получит орехов $\geq$ не меньше Бори, что плохо. Пусть Боря получит n орехов, тогда ~~$n \geq \frac{1001}{3} + 1$~~ ~~$n > \frac{999}{3}$~~ $\cdot$ $n \geq \frac{1001}{3} > \frac{999}{3} \Rightarrow n \geq \frac{1002}{3} = 334$.

Но $1000 - 334 = 666 < 333 \cdot 2 \Rightarrow$ по принципу Дирихле $n = 334$ тоже не подходит; при $n \geq 335$ ⓥ

Бельчонок Вася должен взять ~~k~~ $k < n$ орехов ($k \in \mathbb{N}$). $\Rightarrow$ Петя получит оставшиеся $(1001 - n - k)$ орехов.

$$\Rightarrow \begin{cases} 1001 - n - k < k \\ k < n \end{cases}, k, n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1001 - n < 2k \\ k < n \end{cases}$$

т.к. $n \geq 335 \Rightarrow$

$1001 - n \leq 666 < 2k$

$\Rightarrow k > 333$

При $n = 335$:

$335 > k > 333 \Rightarrow k = 334$

$\Rightarrow (1001 - n - k) = 332$ ч.т.д.

Искомое кол-во способов равно сум ме:

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

M	A	0	0	0	1	4	5	5	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3 (прогресс.).

$$\sum_{n=335}^{998}\left(n-\left[\frac{1001-n}{2}\right]+1\right)$$

(учли, что $n \le 998$, т.к. $(k,(1001-n-k)\neq 0)$ и $k\neq(1001-n-k)$).

1) при n з-нечет:

$$S(n\%2)=\sum_{\substack{n=336\\ n\%2}}^{998}\left(n-\frac{1003-n}{2}\right)=$$

$$=\sum_{\substack{n=335\\ n\%2}}^{998}\left(\frac{3n-1003}{2}\right)=\sum_{\substack{n=335\\ n\%2}}^{998}\left(\frac{3n-1003}{2}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\sum_{\substack{n=335\\ n\%2}}^{998}(n)-\frac{1003}{2}\cdot\frac{664}{2}=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{335+997}{2}\right)\cdot 664-\frac{1003}{2}\cdot\frac{664}{2}=$$

$$=\left(\frac{1332\cdot 3}{4}-\frac{1003\cdot 2}{4}\right)\cdot\frac{664}{2}=$$

$$=(1323\cdot 3-1003\cdot 2)\cdot\frac{166}{2}=$$

$$=1963\cdot 166\frac{1}{2}=325\,858\cdot\frac{1}{2}=162929$$

2) при n:2:

$$S(n:2)=\sum_{\substack{n=336\\ n:2}}^{998}\left(n-\left(\frac{1002-n}{2}\right)\right)=$$

$$=\sum_{\substack{n=336\\ n:2}}^{998}\left(\frac{3n-1002}{2}\right)=\frac{3}{2}\sum_{\substack{n=336\\ n:2}}^{998}(n)-501\cdot 332=$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	4	5	5	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{336+998}{2}\right) 332 - 501 \cdot 332 =$

$= 332 \left(\frac{3}{4} \cdot 1334 - 501\right) =$

$= 332 \cdot \frac{2001-1002}{2} =$

$= 332 \cdot \frac{999}{2} = 332 \cdot 166 \quad 999 \cdot 166 = 165834$

Складываем обе суммы:

$162929 + 165834 = 328763$

Ответ: 328 763

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

M	A	0	0	0	1	4	5	5	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

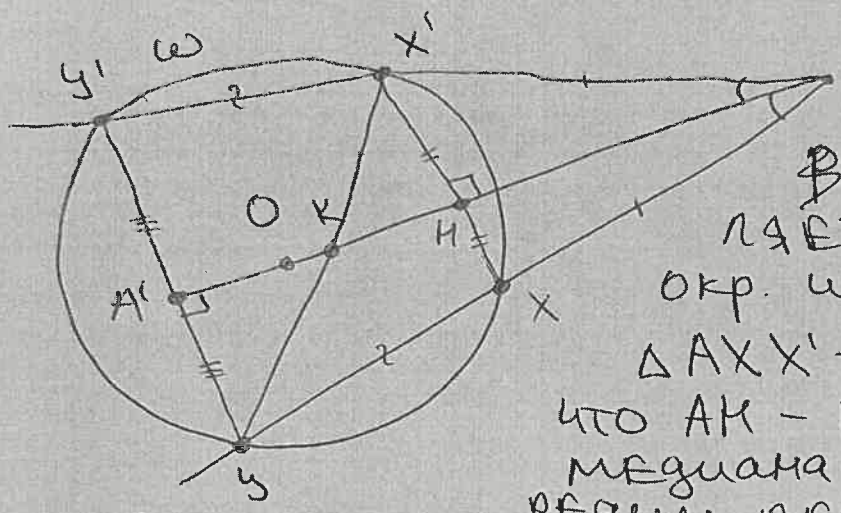
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

Решение:



А Прямая $\mathcal{B}$ $\mathcal{P}_{\mathcal{P}}$ $^{\vee}AX'$ является секущей окр. ω., т.к. $\triangle AXX'$ – р/б (потому что AH – высота и медиана т.к. OH – серединн. перп. к хорде XX') и $\Rightarrow AX = AX' \Rightarrow$ предположив, что AX' – касательная, получим: $AX'^2 = AX \cdot AY$, НО $AX = AX' \Rightarrow$ $\Rightarrow AX = AY = AX + XY$ – противоречие.

!?

Продлим AX' до пересеч-я с ω в точке Y'. Уравн. секущих: $AX' \cdot AY' = AX \cdot AY \Rightarrow AY' = AY \Rightarrow X'Y' = XY$. Тогда по теореме Фалеса о пропорц. отрезках $XX' \parallel YY' \Rightarrow$ $\Rightarrow XX'Y'Y$ – равнобокая трапеция. Продлим AO до пересеч. в точке A'. AA' – высота и медиана в р/б $\triangle YAY'$ т.к. $AO \perp XX'$ и $XX' \parallel YY'$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

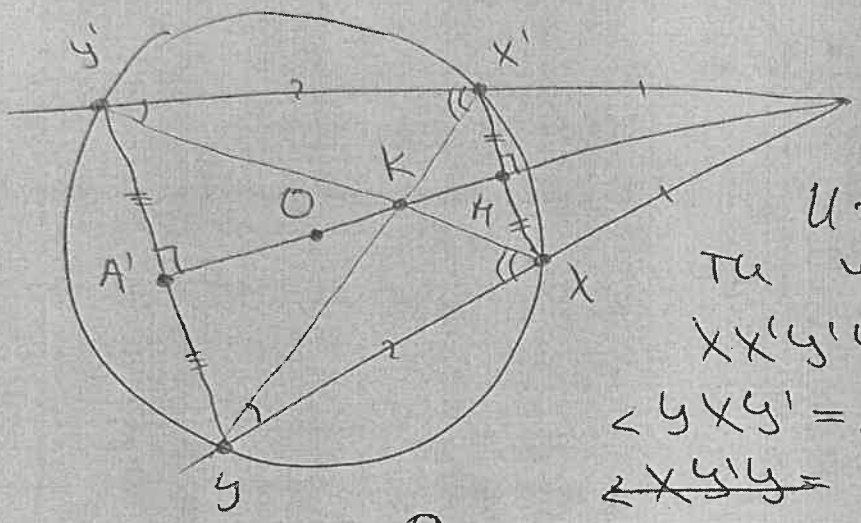
M	A	0	0	0	1	4	5	5	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Из вписанности четырехуг. $XX'Y'Y$:

$\angle YXY' = \angle YX'Y'$ и

~~$\angle XY'Y$~~ $= \angle X'Y'X = \angle X'YX$

⇒ Обозначим т. пересеч. диаг. $XX'Y'Y$ за т. K.

⇒ из равенства углов выше $\triangle X'KY' \sim \triangle XKY$ (по двум углам), но $\frac{X'Y'}{XY} = 1$ (т.к. трапеция $XX'Y'Y$ - р/б).

⇒ $\triangle X'KY' = \triangle XKY$

⇒ $X'K = XK$ и $Y'K = YK$ ⇒

⇒ ~~$\triangle X'KK$~~ $\triangle XKX'$ и $\triangle YKY'$ - равнобедренные.

⇒ в $\triangle XKX'$ отрезок KH является высотой и медианой ⇒ K, H, A лежат на одной прямой AA' ⇒

⇒ $K \in$ ~~A~~ прямой AA', при любом положении секущей ~~AX~~ AY.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	4	5	5	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

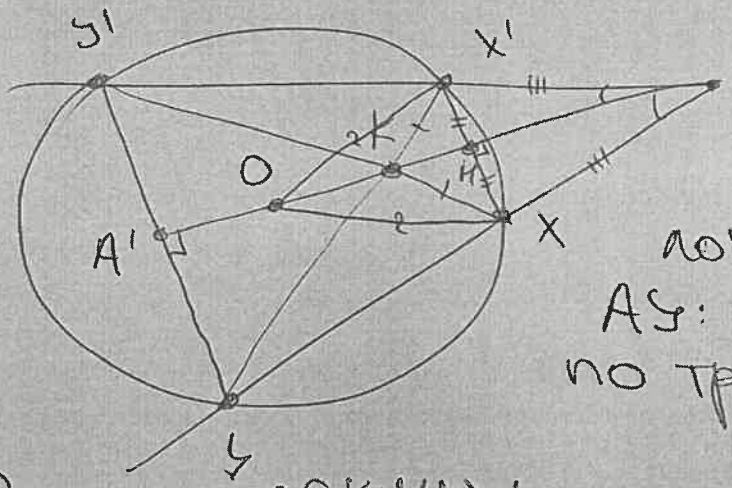
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\triangle AXX' \sim \triangle AYY'$.

$\frac{AA'}{AH} = \frac{AH+KH+KA'}{AH} = \frac{XX'}{YY'}$

$1 + \frac{KH}{AH} + \frac{KA'}{AH} = \frac{XX'}{YY'}$

$\triangle KXX' \sim \triangle KYY' \Rightarrow \frac{KH}{K}$



При любом положении секущ. AY: $\triangle AA'K = \triangle AYK$ по трем сторонам.

По св. секущ:

$AX' \cdot AY' = AX \cdot AY$

Теор. Менелая для $\triangle Y'AA'$:

$1. \frac{YK}{KX'} \cdot \frac{AX'}{AY'} = 1$ $\quad \frac{Y'X'}{AX'} \cdot \frac{AK}{KA'} \; k = 2$

$\frac{YY'}{XX'}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 5 | 5 | 9 | 2 | 5 |

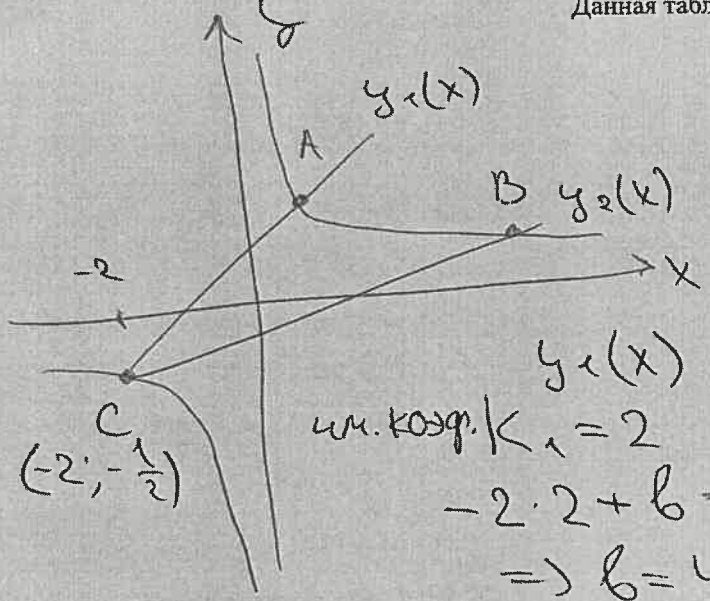
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N1



$y_1(x)$ прох. ч. C и

ин. коэф. $k_1 = 2$

$-2 \cdot 2 + b = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow b = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

$\Rightarrow y_1(x) = 2x + \frac{7}{2}$

$y_2(x)$ прох. чер. C и коэф. $k_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow : -2 \cdot \frac{1}{2} + b = -\frac{1}{2}$

$b = \frac{1}{2} \Rightarrow y_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Коорд. точки A:

$\frac{1}{2}x \Rightarrow 2x + \frac{7}{2} = \frac{1}{x} \quad | \cdot x \neq 0$ т.к. A ∈ гиперболе.

$2x^2 + \frac{7}{2}x - 1 = 0 \quad | \cdot 2$

$4x^2 + 7x - 2 = 0$

$D = 49 + 32 = 81$

$x_1 = \frac{-7+9}{2 \cdot 4} = \frac{1}{4}$

$x_2 = \frac{-7-9}{4} = -4$

$x_1 = \frac{-7+9}{8} = \frac{1}{4}$

$x_2 = \frac{-16}{8} = -2$ — абсцисс. C

$\Rightarrow A = (\frac{1}{4}; 4)$

Коорд. точки B:

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{x} \quad | \cdot 2x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$

$D = 1 + 8 = 9 \Rightarrow$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	4	5	5	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$x_1 = \frac{1+9}{2} = 4$

$x_2 = \frac{-10}{2} = -5$

$x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$

$x_2 = \frac{-4}{2} = -2$ – абсцисса т. C по усл.

$\Rightarrow B = (1; 1)$.

Центр. опис. окр. равноудален от A, B, C $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ пусть $O = (x, y)$. Тогда:

$$\begin{cases} \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + (y-4)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = (x+2)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1$

$x\left(2 - \frac{1}{2}\right) + y(2-8) + \frac{1}{16} + 16 - 2 = 0$

$\frac{3}{2}x - 6y + \frac{1}{16} + 14 = 0 \quad | \cdot 16$

$24x - 96y + 1 + 224 = 0$

$\Rightarrow y = \frac{24x + 225}{96}$

Раскроем скобки ② уравн-я:

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + 4x + 4 + y^2 + y + \frac{1}{48}$

$6x + 3y + 2 + \frac{1}{48} = 0 \quad | \cdot 4$

$24x + 12y + 9 = 0 \Rightarrow y = \frac{24x + 9}{-12}$. Прирав-

няем получ. знач-я:

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	4	5	5	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$\frac{24x+225}{96} = \frac{24x+9}{-12}$$

$$-12 \cdot 24x - 225 \cdot 12 = 16 \cdot 12x + 8 \cdot 12 \cdot 9$$

$$-12 \cdot 12 \cdot 2 \cdot x$$

$$12x(16+24) = -12(225+72) \quad /:12$$

$$8x \cdot 5 = -297$$

$$x = -\frac{297}{40} \Rightarrow y = \frac{24x+9}{-12} =$$

$$= \frac{-\frac{297 \cdot 3}{5} + 9}{-12} = \frac{-\frac{846}{5}}{-12} = \frac{\frac{141}{5}}{2} =$$

$$= \frac{141}{10}$$

Ответ: $O = \left(-\frac{297}{40}; \frac{141}{10}\right)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	0	2	5	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	X	2	111	62

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

$НОД(a, b) = НОД(a \pm b, b)$

$НОД(a, 2b+1) = НОД(2a, 2b+1)$

Выполняется равенство:

$НОД(n^2+300, (n+1)^2+300) = НОД(n^2+300, 2n+1) =$

$= НОД(2n^2+600, 2n+1) = НОД(600-n, 2n+1) =$

$= НОД(1200-2n, 2n+1) = НОД(1201, 2n+1)$

Последняя величина не превосходит 1201.

Равенство выполняется при $n = 600$.

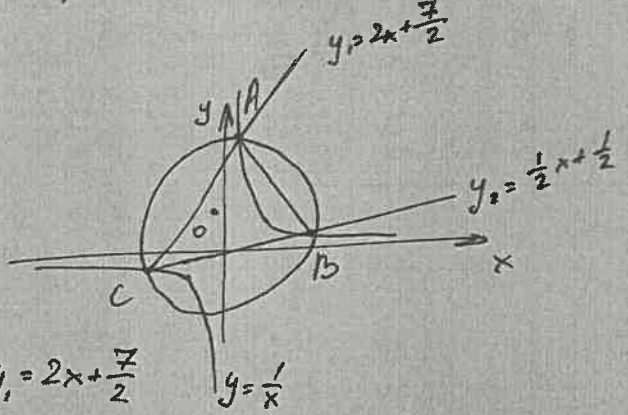
Ответ: 1201

№1

$y = \frac{1}{x} \Rightarrow C(-2; -\frac{1}{2})$

$y_1 = 2x + b_1$

$y_2 = \frac{1}{2}x + b_2$



$-\frac{1}{2} = 2 \cdot (-2) + b_1$; $b_1 = \frac{7}{2} \Rightarrow y_1 = 2x + \frac{7}{2}$

$-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(-2) + b_2$; $b_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y_2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Пусть O – центр опис около $\triangle ABC$ окр. имеет коорд $(x_0; y_0)$

$OA = OB = OC$ как радиусы

Найдем координаты точек A и B:

$2x + \frac{7}{2} = \frac{1}{x}$; $2x^2 + \frac{7}{2}x - 1 = 0$; $4x^2 + 7x - 2 = 0$; $\begin{cases} x = \frac{1}{4}; y = 4 \\ x = -2; y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow A(\frac{1}{4}; 4)$

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{x}$; $x + 1 = \frac{2}{x}$; $x^2 + x - 2 = 0$; $\begin{cases} x = 1; y = 1 \\ x = -2; y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow B(1; 1)$

$OC = \sqrt{(x_0+2)^2 + (y_0+\frac{1}{2})^2}$

$OA = \sqrt{(x_0-\frac{1}{4})^2 + (y_0-4)^2}$

$OB = \sqrt{(x_0-1)^2 + (y_0-1)^2}$

• $OC = OB$:

$(x_0+2)^2 + (y_0+\frac{1}{2})^2 = (x_0-1)^2 + (y_0-1)^2$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

M	A	0	0	0	1	0	2	5	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$x_0^2+4x_0+4+y_0^2+y_0+\frac{1}{4}=x_0^2-2x_0+1+y_0^2-2y_0+1$

$6x_0+3y_0+\frac{9}{4}=0$

$8x_0+4y_0+3=0$

• $OB=OA$:

$x_0^2-2x_0+1+y_0^2-2y_0+1=x_0^2-\frac{1}{2}x_0+\frac{1}{16}+y_0^2-8y_0+16$

$-2x_0+\frac{1}{2}x_0-2y_0+8y_0+2-\frac{1}{16}-16=0$

$-6x_0+24y_0-56-\frac{1}{4}=0$

$-24x_0+96y_0-225=0$

$\begin{cases}8x_0+4y_0+3=0\\-24x_0+96y_0-225=0\end{cases}$ $\begin{cases}24x_0+12y_0+9=0\\-24x_0+96y_0-225=0\end{cases}$ $108y_0-216=0$

$y_0=2$

$8x_0+8+3=0$

$x_0=-\frac{11}{8}=-1,375$

$O(-1,375;2)$

Ответ: $(-1,375;2)$

№3

Введем обозначения того, сколько собрали орехов

Боря – b; Вася – v; Петя – p; $b+p+v=1001$

$\frac{1001-1}{3-1}=\frac{1000}{2}=\frac{1000\cdot 999}{2}=499500$

$|A|$: при $b=v \to 2b+p=1001$

$b\geq 1$ и $p=1001-2b>0 \Rightarrow b\leq 500$

$|B|=500$, $|C|=500$

$|A\cap B|$: $2b=1001$

$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|=1500$

$499500-1500=498500$

$\frac{498500}{3}=166000$

Ответ: 166000

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	0	2	5	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

$\frac{3^m+2}{3^n+2} = \frac{2\cdot 3^m+1}{2\cdot 3^n+1}$

$(3^m+2) : (3^n+2)$

$(2\cdot 3^m+1) : (2\cdot 3^n+1)$, $m > n$

Дробь должна быть целым числом

Число может максимум делиться на корень себя $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{m} > n$

$m > n^2$ ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	1	0	9	8	4	2	5

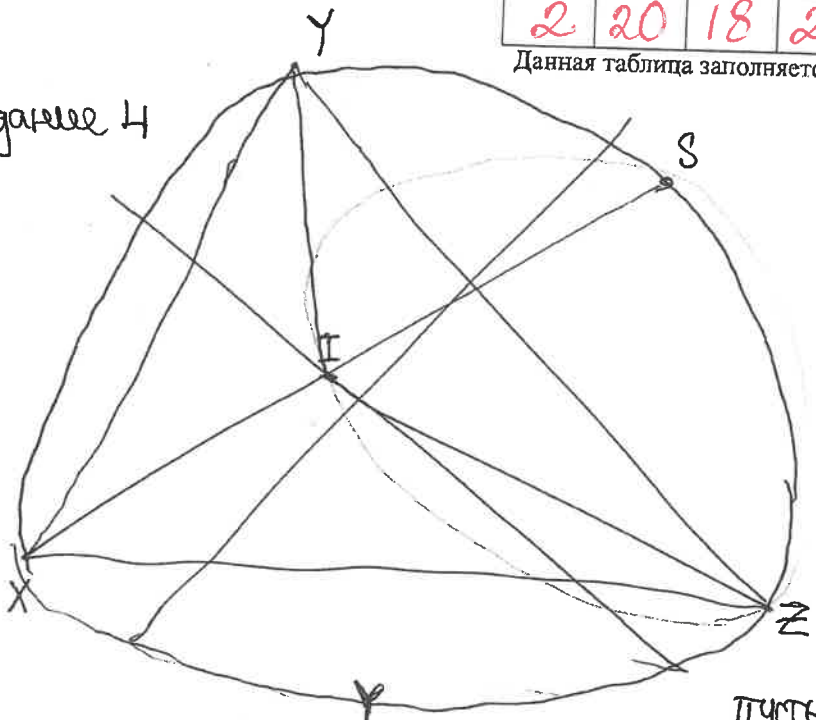
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

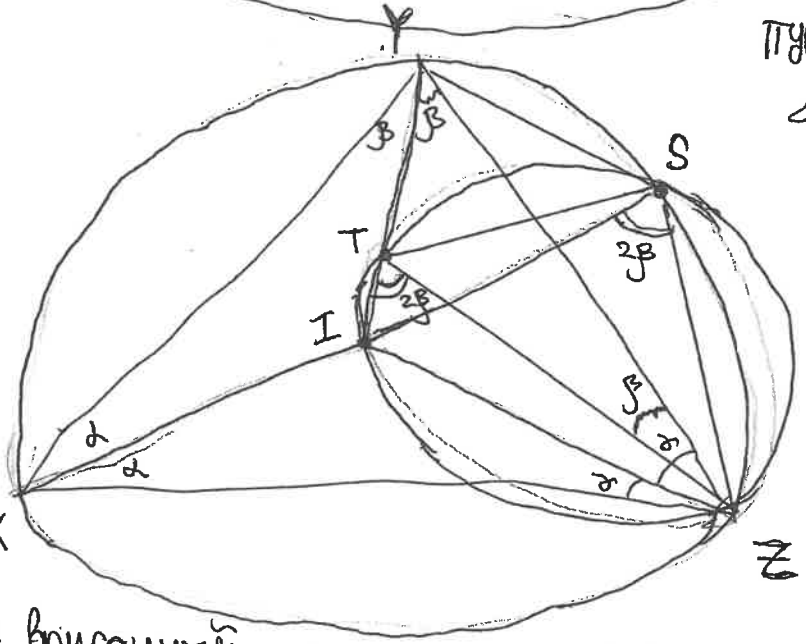
1	2	3	4	5	6	Σ
2	20	18	20	2	1111	62

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 4





Пусть

$\angle YXZ = 2\alpha$

$\angle XYZ = 2\beta$

$\angle YZX = 2\gamma$

$\beta = \angle YZT = \angle TYZ$

$\triangle TYZ$ равнобедренный

$TY = ZT$

ITSZ вписанный $\Rightarrow \angle ITZ = \angle ISZ$

XYSZ вписанный $\Rightarrow \angle XYZ = \angle XSZ = 2\beta$

Т.к. $\angle ITZ = \angle XSZ\ (\angle ISZ) = 2\beta$

Рассмотрим $\triangle TYZ$ и $\angle ITZ$: $\angle ITZ = \angle TYZ + \angle YZT$

$2\beta = \beta + \angle YZT \Rightarrow$ что и требовалось доказать. $\angle YZT = \beta = \angle TYZ$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	С	С	О	1	0	9	8	4	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 3

~~Если 3 из 4 чисел~~
4 слагаемые 1003 ⋮ 4 ⇒ нельзя разбить на 4 равных числа.

Тогда попробуем на 3 равных

$a+b+c+d = 1003$

Допустим

$a = b = c$

$d_{min} = 1$

$a, b, c \in \{1, \dots 334\}$

334 варианта

Теперь пусть 2 из 4 равны.

$a = b$

$a, b \in \{1, \dots, 500\}$

Если известно 3 числа (допустим a, b, c известно; d не известно, можно его d найти однозначно $d = 1003 - (a+b+c)$

Зная 3 числа, мы задаем набор однозначно

a = b	c	1003-(a+b)	d
1	$\{1, \dots 1003\}$	1001	1001 − c
2	$\{1, \dots 999\}$	999	1001 − c
⋮	⋮	⋮	⋮
498	$\{1, \dots 6\}$	7	1001 − c
499	$\{1, 2, 3, 4\}$	5	1001 − c
500	$\{1, 2\}$	3	1001 − c

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	1	0	9	8	4	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Если $a=b$, то $c+d = 1003-2a \Rightarrow$ если $c=d$, то $1003:2 \Rightarrow$ только одна пара равных чисел

Если $a=b=1$, то $c \in \{1,\dots 1000\}$, d однозначная задает 1000 вариантов

$a=b=2$, то $c \in \{1,\dots 998\}$, d однозн. 998 вар.

$\vdots$

$a-b = 500$, то $c \in \{1,2\}$ d однозн 2 вар

Кол-во вариантов $2+4+\dots+1000 = 2(1+\dots+500)$

$= 2\left(\frac{500 \cdot 501}{2}\right) = 500 \cdot 501$

Задание 2

Попробуем посчитать первые значения

номер по порядку	1	2	3	4	5	6	7	8	9
число	2	3	6	10	15	21	28	36	45

Замечаем что $a_n = a_{n-1} + n$

где n - номер по порядку, n начиная с 3.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	0	9	8	4	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 1

посчитаем первые значения

1 2 3 4 5

2, 3, 6, 10, 15, 21, 36 ← это C_n^2

$x_{n-1} 2C_{n-1}^2 - C_{n-2}^2 + 1 = C_n^2$

~~в индексе в числе~~ вторую, ~~и число 2 это 2 (индекс)~~

$C_n^2 = 2C_{n-1}^2 - C_{n-2}^2 + 1$

$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{2(n-1)(n-2)}{2} - \frac{(n-2)(n-3)}{2} + 1 \mid \cdot 2$

$n(n-1) = 2(n-1)(n-2) - (n-2)(n-3) + 2$

$n^2 - n = 2(n^2 - 2n - n + 2) - (n^2 - 2n - 3n + 6) + 2 = n^2 - n$

$n^2 - n = n^2 - n$

Значит на 99-ю будет $x_2 = C_3^2$, $x_3 = C_4^2$

$x_{99} = C_{100}^2$

Задание 1

$f(x) = x^2 - 3x - 1$ корни $\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

$g(x) = x^2 - 4x - 1$ корни $2 \pm \sqrt{5}$

Посчитаем 2 сверху

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	0	9	8	4	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 5

$a^3+b^3 = (abc+1)^2$

$(a+b)(a^2-ab+b^2) = (abc+1)^2$

$abc+1 : a+b$

Если a, b - четные $\Rightarrow$ abc + 1 всегда нечетно

чет = нечетно противоречие

Если значит a и b разной четности

x	x^2	x^3	mod 3
0	0	0	
1	1	1	
2	4	2	

$a = 3k$, $b = 3m$ $\Rightarrow$ $abc+1 = 3t$ невозможно $1 \nmid 3$

$a = 3m+1$, $b = 3t$ $\Rightarrow$ $cab+1 = 3k+1$

$cab = 3k$

$a = 3m+1$, $b = 3k+2$ $\Rightarrow$ $abc+1 = 3t$ $\Rightarrow 2c \underset{3}{\equiv} 2$

$c = 3k+1$

(2 1 1)

(1 2 1) переходит

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	0	9	8	4	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 1

$f(x) = x^2 - 3x - 1$ корни $3 \pm \sqrt{13}$ / 2

$g(x) = x^2 - 4x - 1$ корни $2 \pm \sqrt{5}$

Первый случай

$g\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^3 f(2+\sqrt{5}) + g\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^3 f(2-\sqrt{5})$

2 сл

$g\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^3 f(2+\sqrt{5}) + g\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^3 f(2-\sqrt{5})$

1 сл

$g\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^3$

Задание

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	6	2	7	2	2	5

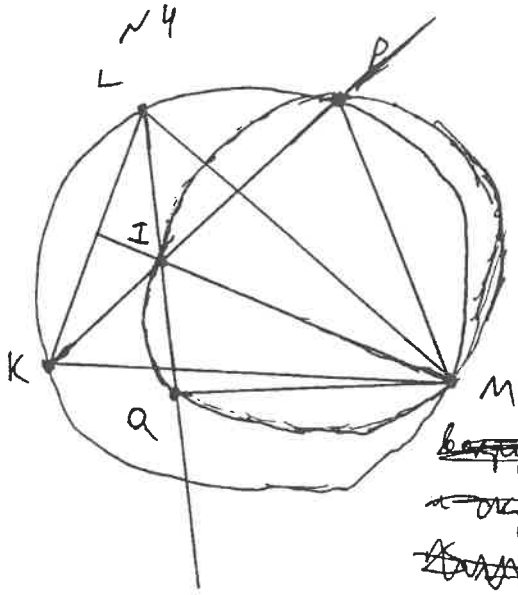
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	0	20	20	2	///	62

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 4



I - точка пересечения биссектрис ~~углов~~ $\triangle KLM$ т.к. I - ~~точка~~ центр вписанной окружности в $\triangle KLM$

~~центр окружности вписанной~~ ~~в~~ ~~окружность~~ ~~окружности~~ ~~

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	6	2	7	2	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

$f(x)=x^2-4x-1=x^2-5x-1+x=g(x)+x$

$g(x)=x^2-5x-1=x^2-4x-1-x=f(x)-x$

$g(x_1)=f(x_1)-x_1=-x_1$ $\quad f(x_3)=g(x_3)+x_3=x_3$

$g(x_2)=f(x_2)-x_2=-x_2$ $\quad f(x_4)=g(x_4)+x_4=x_4$

$f(x)=x^2-4x-1=0$

$D=16+4\cdot1=20$

$x=\frac{4\pm\sqrt{20}}{2}$

$x_{1/2}=2\pm\sqrt{5}$

$g(x)=x^2-5x-1=0$

$D=25+4\cdot1=29$

$x_{3/4}=\frac{5\pm\sqrt{29}}{2}$

$(g(x_1))^3 f(x_3)+(g(x_2))^3 f(x_4)=$

$=(-x_1)^3\cdot x_3+(-x_2)^3\cdot x_4=-(x_1^3\cdot x_3+x_2^3\cdot x_4)$

$x_1=2+\sqrt{5}$ $\quad x_2=2-\sqrt{5}$ $\quad x_3=\frac{5+\sqrt{29}}{2}$ $\quad x_4=\frac{5-\sqrt{29}}{2}$

$(2-\sqrt{5})\cdot\frac{5-\sqrt{29}}{2}+(2+\sqrt{5})\cdot$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	6	2	7	2	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1 (продолжение)

$(2+\sqrt{5})^3 = 8 + 12\sqrt{5} + 30 + 5\sqrt{5} = 38 + 17\sqrt{5}$

$(2-\sqrt{5})^3 = 8 - 12\sqrt{5} + 30 - 5\sqrt{5} = 38 - 17\sqrt{5}$

1) $x_1 = 2+\sqrt{5}$ $x_3 = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$

$x_2 = 2-\sqrt{5}$ $x_4 = \frac{5-\sqrt{29}}{2}$

$-(x_1^3 \cdot x_3 + x_2^3 \cdot x_4) = -\left((38+17\sqrt{5}) \cdot \frac{5+\sqrt{29}}{2} + (38-17\sqrt{5}) \cdot \frac{5-\sqrt{29}}{2}\right) =$

$= -\left(95 + 19\sqrt{29} + \frac{85\sqrt{5} + 17\sqrt{145}}{2} + 95 - 19\sqrt{29} - \frac{85\sqrt{5} - 17\sqrt{145}}{2}\right)$

$= -\left(190 + \frac{85\sqrt{5} + 17\sqrt{145} - 85\sqrt{5} + 17\sqrt{145}}{2}\right) = -190 - 17\sqrt{145}$

2) $x_1 = 2-\sqrt{5}$ $x_3 = \frac{5-\sqrt{29}}{2}$

$x_2 = 2+\sqrt{5}$ $x_4 = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$ такое же как 1)

т.к. от перемен мест слагаемых сумма не меняется

3) $x_1 = 2+\sqrt{5}$ $x_3 = \frac{5-\sqrt{29}}{2}$

$x_2 = 2-\sqrt{5}$ $x_4 = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$

$-\left((38+17\sqrt{5}) \cdot \frac{5-\sqrt{29}}{2} + (38-17\sqrt{5}) \cdot \frac{5+\sqrt{29}}{2}\right) =$

$= -\left(95 - 19\sqrt{29} + \frac{85\sqrt{5} - 17\sqrt{145}}{2} + 95 + 19\sqrt{29} - \frac{85\sqrt{5} + 17\sqrt{145}}{2}\right)$

$= -\left(190 + \frac{85\sqrt{5} - 17\sqrt{145} - 85\sqrt{5} - 17\sqrt{145}}{2}\right) =$

$= -190 + 17\sqrt{145}$

4) $x_1 = 2-\sqrt{5}$ $x_3 = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$ такое же как 3)

$x_2 = 2+\sqrt{5}$ $x_4 = \frac{5-\sqrt{29}}{2}$

Ответ: $-190-17\sqrt{145}$; $-190+17\sqrt{145}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	1	6	2	7	2	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

$(abc-1)^2 \geq 0 \quad a^3-b^3 \geq 0 \quad a^3 \geq b^3 \quad a \geq b$

т.к. $a, b, c \in N$

если $a > b$, то

$a^3-b^3=(abc-1)^2$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=(abc-1)^2$

не может быть квадратом числа

если $a=b$ то

$a^3-b^3=0 \quad 0=(abc-1)^2 \quad abc-1=0 \quad abc=1$

$a=b=c=1$

№3

4 одинаковых не может быть т.к. 1005 ⋮ 4

2 пары одинаковых чисел не может быть т.к.

$x+x+y+y=2x+2y=2(x+y)=1005 \quad 1005 \not\vdots 2$

значит одинаковых чисел либо 3, либо 2.

1) 3 одинаковых числа

1. $1+1+1+1002=1005$
   $+1 \quad +1 \quad +1 \quad -3$
2. $2+2+2+999=1005$
3. $3+3+3+996=1005$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$334 \quad 334+334+334+3=1005$

нельзя отрицательное т.к. $0 \notin N$

Итого: 334 способа

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	6	2	7	2	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3 (продолжение)

2) 2 одинаковых числа

1. $501+501+1+2=1005$

$3<501$ $3=1+2$ 1 способ

2. $500+500+5=1005$

$5<501$ $5=4+1$

$5=3+2$ 2 способа (т.е. $\frac{5-1}{2}$)

3. $499+499+7=1005$

$7<499$ $7=6+1$

$7=5+2$ 3 способа (т.е. $\frac{7-1}{2}$)

$7=4+3$

⋮ ⋮ ⋮

~~250~~ ~~2+2+2+

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	6	2	7	2	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3 (продолжение)

№1 1) + 2) =

$= 334 + 250 \cdot 501 + 167 = 501 + 250 \cdot 501 =$

$= 501 \cdot 251 = 125751$ наборов натуральных чисел

Ответ: 125751

№2

Ответ: 8978

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	8	6	3	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
10	20	12 (12)	20	##	т	62

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Запишем то, что дано по усл. $f(x) = x^2 - 3x - 1$ и $f(x_1) = 0$; $f(x_2) = 0$;
$g(x) = x^2 - 4x - 1$ и $g(x_3) = g(x_4) = 0$.

Найти: $(g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4)$

Решение:

Заметим, что $f(x) = g(x) + x$ т.к $x^2 - 3x - 1 = x^2 - 4x - 1 + x$

$g(x) = f(x) - x$

Перепишем сумму, которую ищем:

$$(\underbrace{f(x_1)}_{0} - x_1)^3 (\underbrace{g(x_3)}_{0} + x_3) + (\underbrace{f(x_2)}_{0} - x_2)^3 (\underbrace{g(x_4)}_{0} + x_4) =$$

$$= (-x_1)^3 x_3 + (-x_2)^3 x_4$$

Заметим, что у $f(x)$ и $g(x)$ есть ровно 2 различных корня, тогда наша сумма может быть, как $(-x_2)^3 x_3 + (-x_1)^3 x_4$

т.к. за x_1 и x_2 - мы один раз могли взять числа $(a; b)$ и могли взять $(b; a)$ т.к. по усл. не оговорено какой из корней x_1 или x_2 (x_3 или x_4) - больше другого, в рамках каждого трёхчлена.

Заметим, что сумма может быть только 2-х видов:

1) $(-x_1)^3 x_3 + (-x_2)^3 x_4$ и 2) $(-x_2)^3 x_3 + (-x_1)^3 x_4$ т.к все остальные перестановки корней одного из трехчленов приводят к уже имеющимся случаям.

Теперь найдём корни трёхчленов $f(x)$ и $g(x)$ и подставим в сумму 1) и сумму 2)

см. лист 2.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	1	8	6	3	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Продолжение №1

$f(x)=0$

$x^2-3x-1=0$

$D=3^2-4\cdot(-1)=13$

$x_1=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ $x_2=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$

$g(x)=0$

$x^2-4x-1=0$

$D=4^2-4(-1)=20$

$x_3=\frac{4+\sqrt{20}}{2}=2+\sqrt{5}$

$x_4=\frac{4-\sqrt{20}}{2}=2-\sqrt{5}$

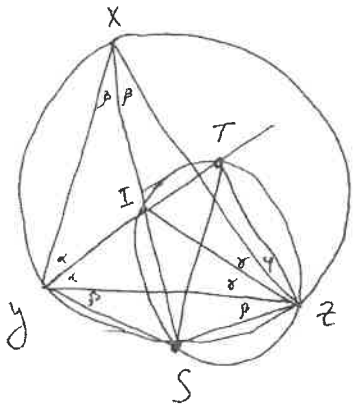
Получим:

1) $\left(-\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^3(2+\sqrt{5})+\left(-\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^3(2-\sqrt{5})$

2) $-\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^3(2+\sqrt{5})+\left(-\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^3(2-\sqrt{5})$

досчитывать пока что не буду. Возможно вернусь к этому заданию позже и досчитаю.

№4



Док-тб: $YT=ZT$

Док-во:

1) Пусть, т.к т.I - т.пересечения биссектрис $\triangle XYZ$ (т.к по усл I - центр вписанной окр.):

$\angle IYZ=\alpha=\angle IYX$; $\angle IXY=\beta=\angle IXZ$; $\angle IZX=\gamma=\angle IZY$

$\angle XZT=\varphi$

см. лист 3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	8	6	3	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2) Если вдруг обязательно описывать доп построения, то сейчас назову определения, которые я нужен. IZ; TS; SZ и SY;

3) Т.к $YT = TZ$ - для док-ва, то надо доказать, что $\angle IYZ = \angle TZY$ т.е $\alpha = 2\gamma + \varphi$

(позже, рассмотрим случай когда T - внутри $\triangle XYZ$.)

4) SZ TY - вписан. 4-х угольник по построению усл, тогда $\angle IST = \angle IZT = \gamma + \varphi$ т.к. опираются на одну дугу

5) XYSZ - вписан 4-х угольник по построению усл. тогда $\angle SYZ = \angle SXZ = \beta$ т.к опираются на одну дугу $= \angle SZY$

6) также во вписан $SZTY$:
$\angle ITS = \angle IZS = \gamma + \beta$

7) По лемме о трезубце для $\triangle XYZ$ и т. I - т. пересечения биссек:
$SY = SI = SZ$

8) Расм $\triangle XYZ$ (сумму углов) $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180$
Расм $\triangle XYS$ (сумму углов) $2\alpha + 2\beta + \angle YSX = 180 \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle YSX = 2\gamma$

9) $\angle SIT = \angle IYS + \angle YSI$ (внешний для $\triangle YIS$
$\angle SIT = 2\gamma + \alpha + \beta$

10) Расм. сумму углов $\triangle ITS$

см. лист 4

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Продолжение №4

$2\gamma+\alpha+\beta+\gamma+\beta+\gamma+\varphi=180^\circ$

т.к. $2\alpha+2\beta+2\gamma=180$, то $\alpha+\beta+\gamma=90 \Rightarrow \beta+\gamma=90-\alpha$

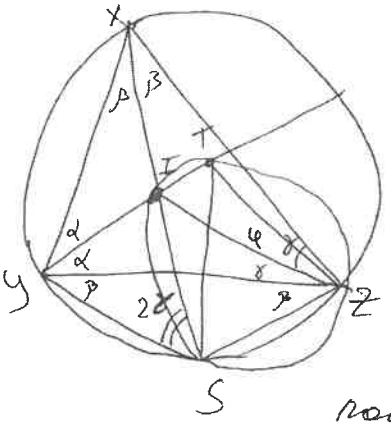
$3\gamma+\beta+\varphi+90=180$

$2\gamma+90-\alpha+\varphi+90=180$

$2\gamma-\alpha+\varphi=0$

$\alpha=2\gamma+\varphi$ – это нужно доказать, $\Rightarrow YT=TZ$

II) Случай, если T – внутри $\triangle XYZ$ будет кратко рассмотрен на основе предыдущих рассуждений.



в $\triangle SIT$:

$\angle SIT = 2\gamma+\alpha+\beta$ (также)

$\angle ITS = \gamma+\beta$ (вне $ITZS$)

$= \angle IZS$

$\angle ITS = \angle ITZ = \varphi$ (вне $ITZS$)

получим $2\gamma+\alpha+\beta+\gamma+\beta+\varphi=180$

$\varphi+2\gamma+90+90-\alpha=180$

$\varphi+2\gamma=\alpha$

III) Все случаи рассмотрены и доказано

т.к $\alpha=\varphi+\gamma$, то в $\triangle YTZ$: $\angle TYZ=\angle TZY=\alpha=\varphi+\gamma$

ч.т.д.

см. лист 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	8	6	3	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяться только то, что записано с этой стороны листа в рамках справа

№ 2

По усл. дано $x_1 = 2$
$x_2 = 3$.

~~Давайте докажем, что каждый x_k (выполняется x_3)~~

~~будет~~ ~~3~~ ~~шаге~~ ~~вид~~ $x_{k+1} = x_k + (k+1)$

~~Докажем по индукции~~

~~Предположим~~ ~~будет~~ ($k \geq 3$)

$x_3 = 2x_2 - x_1 = 6 - 2 = 4$, ~~т.к.~~ $x_3 \geq 4$, то $x_3 \neq 5$, ~~но~~ ~~5~~ ~~простое~~

~~значит~~ x_3 ~~не~~ ~~будет~~ подходить.

~~Пусть~~ ~~дано~~ $x_k = x_{k-1} + k$ - ~~верно~~

~~Докажем~~ ~~дано~~ $x_{k+1} = x_k + k + 1$.

мы по усл. знаем, что $x_n \geq 2x_{n-1} - x_{n-2}$ =>

=> $x_n \geq 2x_{n-1} - x_{n-2} + 1$ (т.к. числа целые (сост.))

давайте посмотрим на первые члены последовательности

№n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
x_n	2	3	6	10	15	21	28	36	...

для x_3: $x_3 \geq 2 \cdot 3 - 2 + 1 = 5$, но 5 - простое, значит $x_3 = 6$,

далее $x_4 \geq 2 \cdot 6 - 3 + 1 = 10$ - сост - подходит

$x_5 \geq 2 \cdot 10 - 5 + 1 = 15$ - сост - подходит

см. лист 6

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	1	8	6	3	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Продолжение №2

Заметим, что пока что мы можем брать числа вида $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} + 1$ – давайте докажем, что сможем всегда так при $n \geq 4$, по индукции.

База: для $n = 4$ и $n = 5$ – подходит

Заметим, что $x_4 = 2x_3 - x_2 + 1 = x_3 + 4$

Пусть $x_k = 2x_{k-1} - x_{k-2} + 1 = x_{k-1} + k$ – верно при $k \geq 4$!

Переход: $x_{k+1} = 2x_k - x_{k-1} + 1 = x_k + k + 1$

Док-во: если $2x_k - x_{k-1} + 1 = x_k + k + 1$, то переход доказан

$x_k - x_{k-1} + 1 = k + 1$ (подставим по предположению x_k)

$x_{k-1} + k - x_{k-1} + 1 = k + 1$

$k + 1 = k + 1$ – верно!

Переход доказан.

Также теперь нужно доказать, что $x_k = x_{n-1} + n + p$, где p – простое при $n \geq 4$

Заметим, что $x_n = \frac{n(n-1)}{2}$ при $n \geq 4$

т.к. $x_4 = x_3 + 4$

$x_5 = x_4 + 5 = x_3 + 4 + 5$ и т.д.

см. лист 7

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	8	6	3	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Продолжение №2

Получаем, что мы складываем числа от 4 до n и числа $X_3 = 6 = 2+1+3$, заметим, что это сумма подряд идущих n чисел, которая равна $\frac{n(n+1)}{2}$

Теперь надо доказать что $\frac{n(n+1)}{2} = X_n \neq P$ - простое при $n \geq 4$

очевидно, что либо n, либо $n+1$ делится на 2

тогда ЖУО: $n : 2$, тогда ~~Пусть~~ Пусть $\frac{n}{2}(n+1) = P$ - простое,

тогда $P : 1$ и $P : P$ при $P \neq 1$ => ~~что-то~~ произведение 2 чисел простое тогда, когда одно 1, а другое P, тогда

~~ЖУО~~

$\begin{cases} \frac{n}{2} = P \\ n+1 = 1 \end{cases} \Rightarrow n = 0$, но у нас $n \geq 4$ - значит не подходит

$\begin{cases} \frac{n}{2} = 1 \\ n+1 = P \end{cases} \Rightarrow n = 2$, но у нас $n \geq 4$ - значит не подходит

В случае $n+1$ - четного, просто делаем замену $n+1 = k$, получим

$\begin{cases} \frac{k}{2} = P \\ k+1 = 1 \end{cases} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow n = -1$?!

$\begin{cases} \frac{k}{2} = 1 \\ k+1 = P \end{cases} \Rightarrow k = 2 \Rightarrow n = 1$?! $(n \geq 4)$

Доказали, что простое числа не будут получены, а значит $X_n = \frac{n(n+1)}{2}$ $(n \geq 4)$, т.к. мы брали минимально возможное число подходящее под условие, то у нас все усл. соблюдены.

Теперь найдем S_{99} см. лист 8

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Продолжение №2

$S_{99} = X_{99} = \frac{99(99+1)}{2} = 50 \cdot (100-1) = (500-5) \cdot 10 =$

$= 4950$

Ответ: 4950

№3

Пусть у нас числа a, b, c, d

У нас есть 2 варианта, когда в сумме из 4 чисел есть хотя бы 2 равных:

1) 3 числа равны ($a=b=c$), но d - другое ($1003 \not\vdots 3$)
2) 2 числа равны ($a=b$), а c и d различны.

Варианта, когда по 2 числа равны не парно быть не может, т.к. тогда $1003 = 2a + 2c$, (НУО какие парно равны) тогда $1003 : 2$?! (это неправда)

Вариантов наборов из 4 чисел будут считаться одинаковыми (одними и теми же), если количество каждого числа первого набора, равно количеству этого числа, во втором наборе.

1) В первом случае пусть $1003 = 3a + d$, тогда вариантов наборов $1000 : 3 = 333$ набора.

см. лист 9.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	8	6	3	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа и рядом справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Продолжение №3.

3) Теперь пусть $1003 = 2a+c+d$

тогда получим, что для каждого $a \in \mathbb{N}$ $a \in [1; 500]$

будет наборов суммы $c+d$ в количестве

$\frac{1003-2a-1}{2}$ – количество нечетных сумм (т.к $2a$ - чет)

таких, что нечетное число можно сложить, как минимум с 1 и получить $c+d$, ровно одно из этих чисел для каждого a будет входить в тройку равных, значит вместе 334 в конце

Разберем, как ведет себя число $\frac{1003-2a-1}{2}$ на маленьких числах, пусть $\frac{1003-2a-1}{2} = \blacksquare$

Значит НОО $c \in \{1; 3; 5\}$ ← 3 варианта, затем 5 и т.д

Значит считаем сумму первых чисел от 1 до 334 и вместе 334 $\frac{(334)(335)}{2}$ – кол-во наборов из 4 чисел

Ответ: $\frac{334 \cdot 335}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 3 | 5 | 6 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	X	20	2	///	62

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано в этой строчке листа = работа сдана

Задание 1.

Если x_1 и x_2 - корни $f(x) = x^2 - 4x - 1$, то

$x_1^2 - 4x_1 - 1 = 0$ и $x_2^2 - 4x_2 - 1 = 0$

Тогда $g(x_1) = x_1^2 - 5x_1 - 1 = (x_1^2 - 4x_1 - 1) - x_1 = -x_1$

и $g(x_2) = (x_2^2 - 4x_2 - 1) - x_2 = -x_2$

Если x_3 и x_4 - корни $g(x) = x^2 - 5x - 1$, то

$x_3^2 - 5x_3 - 1 = 0$ и $x_4^2 - 5x_4 - 1 = 0$

Тогда $f(x_3) = (x_3^2 - 5x_3 - 1) + x_3 = x_3$

и $f(x_4) = (x_4^2 - 5x_4 - 1) + x_4 = x_4$

Тогда значение, которое надо найти, это:

$(-x_1)^3 \cdot x_3 + (-x_2)^3 \cdot x_4 = -(x_1^3 \cdot x_3 + x_2^3 \cdot x_4)$ (1)

Пусть $x_1 > x_2$, то по теор. Виета $x_1 = 2 + \sqrt{5}$

$x_2 = 2 - \sqrt{5}$

Рассмотрим случаи, когда $x_3 > x_4$ и $x_3 < x_4$.

Случай 1)

По т. Виета $x_3 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$; $x_4 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, записано с этой стороны листа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$(2+\sqrt{5})^3 = 38+17\sqrt{5}$

$(2-\sqrt{5})^3 = 38-17\sqrt{5}$

Подставляем ~~данные~~ полученные значения в выражение ~~уравнения~~ (1), получим:

$$-\frac{1}{2}\left((38+17\sqrt{5})(5+\sqrt{29})+(38-17\sqrt{5})(5-\sqrt{29})\right) \quad (2)$$

Раскрывая скобки и приводя подобные получим:

$$-\frac{1}{2}\left(2\cdot 38\cdot 5+2\cdot 17\cdot\sqrt{29\cdot 5}\right)=-190-17\sqrt{145}$$

Случай 2):

$X_3=\frac{5-\sqrt{29}}{2}$; $X_4=\frac{5+\sqrt{29}}{2}$

Подставляем в (1), получим:

$$-\frac{1}{2}\left((38+17\sqrt{5})(5-\sqrt{29})+(38-17\sqrt{5})(5+\sqrt{29})\right) \quad (3)$$

Раскрывая скобки и приводя подобные:

$$-\frac{1}{2}\left(2\cdot 38\cdot 5-2\cdot 17\sqrt{5\cdot 29}\right)=17\sqrt{145}-190$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 3 | 5 | 6 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

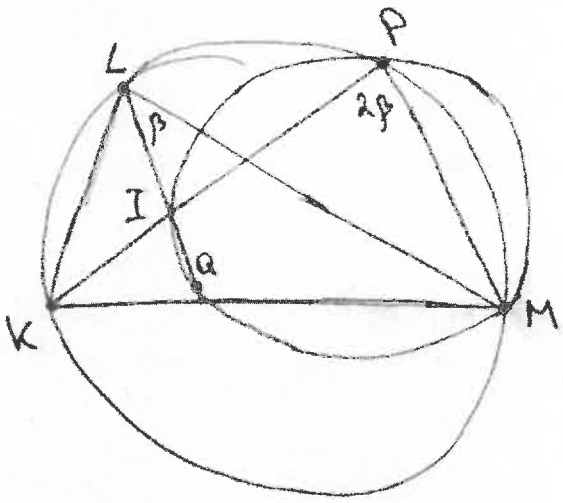
Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Замечание: Дописав только то, что написано с этой стороны листа, вы можете существенно снизить оценку за задание.

Заметим, что не имеет смысла рассматривать случай $x_3 < x_2$ и для него ещё случай, где $x_3 > x_4$ и $x_3 < x_4$, т.к. получатся такие же выражения, как (2) и (3).

Ответ: $-190 - 17\sqrt{145}$; $17\sqrt{145} - 190$

Задание 4.



Будем воспринимать центр вписанной в $\triangle KLM$ окружности, как т. пересечения биссектрис.

~~Если~~

1) Пусть $\angle KLM = 2\beta$, то $\angle QLM = \beta$.

2) $\angle KLM = \angle KPM = 2\beta$ (т.к. опираются на одну дугу и на опр. описанной около $\triangle KLM$)

3) ~~PIQM - выпук~~ точки P, Q, I, M - лежат на одной окр. по условию.

Значит $\angle IQM = 180 - \angle IPM = 180 - 2\beta$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | N | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 3 | 5 | 6 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Помните, что записи в этой графе не должны содержать что-либо, что позволило бы идентифицировать автора работы

4) Рассмотрим $\triangle LQM$:

$\angle QLM = \beta$; ~~$\angle LQM =$~~ $\angle LQM = 180 - 2\beta$

Значит ~~$\angle M$~~ $\angle LMQ = \beta$ (по сумме углов треуг.)

Значит $\angle QLM = \angle LMQ \Rightarrow$ он равнобедренный,

где $LQ = MQ$.

Стоит только сказать, что невозможно пересекает луч LI окружность описанную около $\triangle PIM$ ~~ни~~ ~~прямой~~ ~~KM~~ или нет.

В любом случае $PIQM$ будет вписанным и $LQ = MQ$.

Задача 5.

Предположим, что $a = b = c$. Тогда $a^3 - b^3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (abc - 1)^2 = 0 \Rightarrow abc = 1 \Rightarrow c^3 = 1 \Rightarrow c = 1$

Тогда все три числа равны 1.

Если $a = b \neq c$, получим $a^3 - b^3 = 0 \Rightarrow$ правая часть тоже тоже ноль $(abc - 1)^2 = 0 \Rightarrow b^2 c = 1$

т.к. a, b, c - натуральные, то $b = a = c = 1$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	8	3	5	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Информация будет проверяться только та, что записана с этой стороны листа и ручкой синего цвета

Задача 2.

Я утверждаю, что начиная с пятого числа на доске каждое следующее будет определяться по формуле $x_n = x_{n-1} + (x_{n-1} - x_{n-2}) + 1$ (1)

~~То есть каждый след раз~~ $n \geq 6$

По условию $x_n > x_{n-1} + (x_{n-1} - x_{n-2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n \geq x_{n-1} + (x_{n-1} - x_{n-2}) + 2$

Посчитав руками первые 7 чисел на доске, получим:

5; 7; 10; 14; 20; 27; 35; 44; 54; 65 ...

Начиная с числа 14 числа идут парами:

два четных, два нечетных, два четных, два нечетных и т.д.

Доказательство: (по индукции)

База: для небольшого кол-ва первых чисел очевидно.

~~Пусть~~ Если идут два чёт подряд, то по модулю 2 следующее число равно $0 + (0 - 0) + 1 \overset{2}{\equiv} 1$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	8	3	5	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Продолжайте писать только с этой стороны листа и работу сдайте

Если идёт чётное, а за ним нечетное, то следующее по модулю 2 равно:

$1+(1-0)+1 \overset{2}{=} 1$

Если идёт нечетное, а за ним идёт четное, то следующее по модулю два равно:

$0+(0-1)+1 \overset{2}{=} 0$

Если идут два нечетных, то следующее по мод. два равно.

$1+(1-1)+1 \overset{2}{=} 0$

~~Доказать~~

~~То что~~ четное число - это составные числа (в рамках нашей задачи), что делятся нечетным?

Я утверждаю, что каждое нечетное число тоже будет составным, т.к. будет делиться хотя бы на одно из трёх чисел 3; 5; 7.

Это можно объяснить тем, что числа, кратные трём будут встречаться через два числа.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	8	3	5	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Работа проверяется только то, что записано с этой стороны листа и только справа

Числа, ~~кратные~~ кратные ~~7~~ 7 будут встречаться следующим образом: через одно, потом через два, через одно, опять через два и т.д.

Числа, кратные семи тоже встречаются с некоторым периодом (через два, потом через три и т.д.)

~~Если~~ То есть последовательность чисел на доске задана формулой $x_n = x_{n-1} + (x_{n-1} - x_{n-2}) + 1$

$n \geq 6$

14 - это четвертое число на доске

98-ое число будет равно:

$14 + (6 + 7 + 8 + \ldots + 98 + 99) = 4949$

Ответ: 4949.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	7	3	5	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
8	20	12	20	2	//	62

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

$x_1; x_2$ – корни кв. трехчлена $f(x) = x^2 - 3x - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по т. Виета: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \cdot x_2 = -1 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{x_2} \end{cases}$

$x_2 - \frac{1}{x_2} - 3 = 0 \Rightarrow$ | $x_2 \neq 0$ и $x_1 \neq 0$, т.к. $x^2 - 3x - 1$ при подстановке $x_1 = 0$ или $x_2 = 0$ не равняется нулю, а также.

$x_1 \cdot x_2 = -1 \Rightarrow x_1 \neq 0$ и $x_2 \neq 0$ | $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_2^2 - 3x_2 - 1 = 0.$

Аналогично $x_2 = -\frac{1}{x_1} \Rightarrow x_1^2 - 3x_1^2 - 1 = 0.$ } (α).

$x_3; x_4$ – корни кв. трехчлена $g(x) = x^2 - 4x - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по т. Виета: $\begin{cases} x_3 + x_4 = 4 \\ x_3 \cdot x_4 = -1 \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{x_4} \Rightarrow \end{cases}$

$\Rightarrow x_4 - \frac{1}{x_4} - 4 = 0 \Rightarrow$ | $x_4 \neq 0$ и $x_3 \neq 0$, т.к. $x_3 \cdot x_4 = -1$. |

(β). $\begin{cases} x_4^2 - 4x_4 - 1 = 0, \text{ аналогично!} \\ x_3^2 - 4x_3 - 1 = 0 \end{cases}$

$(g(x_1))^3 \cdot f(x_3) + (g(x_2))^3 \cdot f(x_4) = (x_1^2 - 4x_1 - 1)^3 \cdot (x_3^2 - 3x_3 - 1) +$

$+ (x_2^2 - 4x_2 - 1)^3 \cdot (x_4^2 - 3x_4 - 1) = ((x_1^2 - 3x_1 - 1) - x_3)^3 \cdot ((x_3^2 - 3x_3 - 1) + x_3)^3 +$

$+ ((x_2 - 3x_2 - 1) - x_2)^3 \cdot ((x_4^2 - 4x_4 - 1) + x_4) =$ | подставим слова (α) и (β). | $=$

$= (0 - x_3)^3 \cdot (0 + x_3) + (0 - x_2)^3 \cdot (0 + x_4) = -x_3 \cdot x_1^3 - x_4 \cdot x_2^3;$

т.к. нам по условию даны числа $x_1; x_2; x_3$ и $x_4 \Rightarrow$ Ответ: $-x_3 \cdot x_1^3 - x_4 \cdot x_2^3$

продолжение на листе 4.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	7	3	5	2	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
	20					

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

Найдем x_3 (где $x_1=2$ и $x_2=3$, x_1 и x_2 уже были записаны по условию задачи на доске Петей).

$x_3 > 2\cdot x_2 - x_1 \Rightarrow x_3 > 2\cdot 3 - 2 \Rightarrow x_3 > 4 \Rightarrow$ т.к. x_n - это наименьшее составное число, которое меньше $2x_{n-1} - x_{n-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_3 = 5$, но т.к. x_n - составное число, а 5 - простое $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_3 = 6$.

Также заметим, что: $x_n > x_{n-1}\cdot 2 - x_{n-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n > x_{n-1} + (x_{n-1} - x_{n-2}) \Rightarrow$

$\overset{(*)}{\Rightarrow}$ раз все числа на доске будут натуральными $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_n$ (это наименьшее составное число, меньшее $2x_{n-1} - x_{n-2}$) $\Rightarrow x_n = 1 + x_{n-1} + (x_{n-1} - x_{n-2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ разница между x_n и x_{n-1} больше всегда на 1, чем разница x_{n-1} и x_{n-2} (кроме x_2 и x_3), доказано ранее

$\Rightarrow (x_n - x_{n-1}) - (x_{n-1} - x_{n-2}) = 1. \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 \xrightarrow{+1} x_2 \xrightarrow{+3} x_3 \xrightarrow{+4} x_4 \xrightarrow{+5} x_5 \xrightarrow{+6} \dots \xrightarrow{+n} x_{99}$.

Заметим, что раз $x_2 = x_1 + 1$; $x_3 = x_2 + 3$; $x_4 = x_3 + 4$. и т.д. $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_2 = x_1 + 1$; $x_3 = x_1 + 4$; $x_4 = x_1 + 8$. и т.д. $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_2 = x_1 + 1$; $x_3 = x_1 + 1 + 3$; $x_4 = x_1 + 1 + 3 + 4 \dots$

$\dots x_{99} = x_1 + 1 + 3 + \dots + 99 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + 99 = \frac{(1+99)\cdot 99}{2} = 4950$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_{99} = 4950$. $\in \mathbb{N}$ $\in \mathbb{N}$.

(*) Все числа на доске натуральные т.к. т.е. $x_3 \in \mathbb{N}$, т.к. $x_1 \in \mathbb{N}$ и $x_2 \in \mathbb{N}$. и т.д.

$x_1 = \underset{\in\mathbb{N}}{x_{n-1}} + \underset{\in\mathbb{N}}{(x_{n-1} - x_{n-2})} + \underset{\in\mathbb{N}}{1}$

Ответ: 4950.

→ продолжение на 4 листе

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	7	3	5	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

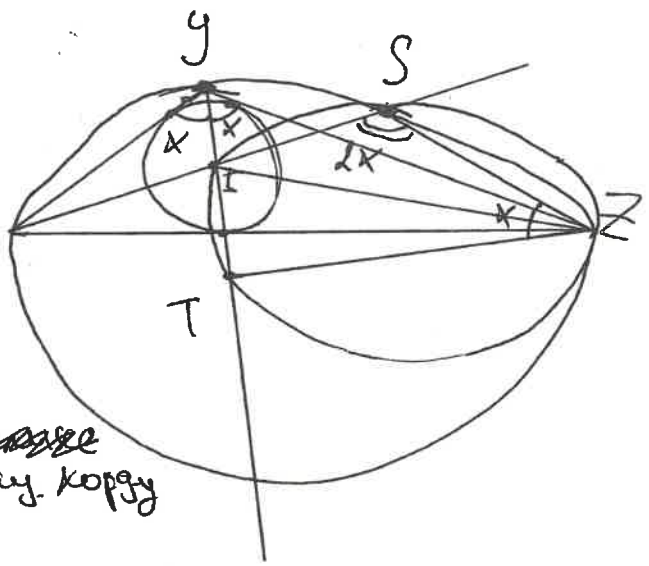
№3

Заметим, что Раз XI (луч) пересекает описанную вокруг Δ-ка XYZ в т. S ⇒

⇒ X, Y, Z, S лежат на одной окружности ⇒

⇒ XYSZ – вписанный четырехугольник. ⇒

⇒ ∠XYZ = ∠XSZ, т.к. они опираются на общую дугу XZ (т.е. опираются на общ. хорду XZ)



Пусть: ~~∠XYT~~ ∠XYI = x; тогда ∠IYZ = x, т.к. YI – это биссектриса угла XYZ из-за того, что YI – прямая соединяющая вершину треугольника XYZ и центр вписанной окружности Δ-ка XYZ I ⇒ ∠XYZ = ∠ZYI + ∠IYZ = [redacted] = x + x = 2x; ⇒ ∠XSZ = 2x;

Раз луч YI пересекает вторично окр. SZI в т. T ⇒

⇒ S, Z, I и T лежат на одной окружности ⇒

⇒ ∠ISZ + ∠ITZ = 180° ⇒ ∠ITZ = 180° − ∠ISZ. и т.к. ∠ISZ = ∠XSZ = 2x ⇒ ∠ITZ = [redacted] 180° − 2x;

Тогда в Δ-ке YTZ: 180° = ∠YTZ + ∠TZY + ∠ZYT, вспомним, что ∠YTZ = 180° − 2x, а ∠TYZ = x ⇒ 180° = 180° − 2x + x + ∠TZY ⇒

⇒ ∠TZY = x ⇒ в Δ-ке TYZ: ∠TYZ = ∠TZY = x ⇒

⇒ Δ YTZ – равнобедренный (с основанием YZ) ⇒ TZ = YT,

ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	7	3	5	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~1 (продолжение).

P.S. по условию задачи $x_1; x_2; x_3; x_4$ – это целые числа $\Rightarrow$ их можно использовать в ответе. (в ответе записи).

Однако если же нельзя их использовать в записи ответа $\Rightarrow$ $x^2-3x-1=0$.

б.о.о. $D=9+4=(\sqrt{13})^2$

$x_1=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$; $x_2=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$

и $x^2-4x-1=0$.

$D=16+4=20$.

б.о.о. $x_3=\frac{4-\sqrt{20}}{2}$; $x_4=\frac{4+\sqrt{20}}{2}$;

их нужно подставить в ответ: $-x_3\cdot x_1^3-x_4\cdot x_2^2$;

~~$-\left(\frac{4+\sqrt{20}}{2}\right)$~~ (2 случая: 1 случай: $x_1=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ и $x_2=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ / и $x_1=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$; $x_2=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$

и 2 случай: $x_3=\frac{4-\sqrt{20}}{2}$ и $x_4=\frac{4+\sqrt{20}}{2}$ / и $x_4=\frac{4-\sqrt{20}}{2}$; $x_3=\frac{4+\sqrt{20}}{2}$)

~2 (продолжение).

после x_3 все числа будут составными, т.к.

$x_4>2x_3-x_2 \Rightarrow x_4>12-3 \Rightarrow x_4>10$, и ~~$x_4 \vdots x_3$~~ $\Rightarrow$ ~~$x_4 \vdots 2$~~

$\Rightarrow$ через число (т.е. x_n и x_{n+2}) $x_n \vdots 2$ и $x_{n+1} \vdots 2$, т.к.

$x_n=2x_{n-1}-x_{n-2}+1$ $\Rightarrow$ $x_n \vdots 2$, аналогично и $x_{n+2} \vdots 2$ $\Rightarrow$

$\vdots 2 \quad \vdots 2$

$\Rightarrow x_n; x_{n+2}; x_{n+4}$... и т.д. составные числа, т.к. они >2 (т.к. $x_1=2$ и все) и они имеют больше 2-х делителей (т.к. кратны двум); $x_{n+1}=2x_n-x_{n-1}+1$. $x_n \vdots 3$ и $x_{n+3} \vdots 3$ и т.д., т.к. (записи x_3).

к ~~x_3~~ x_3 добавляют n и $n+1$ (как мы выяснили из первой части решения), чтобы получить x_5 $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_3=6 \vdots 3 \Rightarrow \underbrace{x_3}_{\vdots 3.} + \underbrace{2n+3}_{\vdots 3}$, т.к. n и $n+1$ имеют остатки 1 и 2 соответ. при делении $\Rightarrow$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	7	3	5	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2 (продолжение)

на 3, т.к. $\overset{+1}{\rightarrow}\ \overset{+3}{\rightarrow}\ \overset{+4}{\rightarrow}\ \overset{+5}{\rightarrow}\ \overset{+6}{\rightarrow}$

$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6$

два числа подряд идущие, находятся между числами кратными 3-м $\Rightarrow$ одно из них дает остаток 1 при делении на 3, а другое остаток 2 при делении на 3 $\Rightarrow$ в сумме они кратны трем

$\Rightarrow$ числа $x_3; x_5$ (или x_2 и т.п.) кратны 3-м $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ они составные.

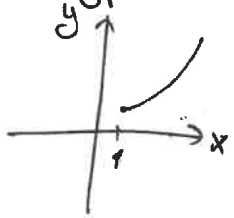
№5

пусть функция $f = a^3+b^3$, а функция $g = (abc+1)^2$

$f = g$; f монотонно возрастающая функция при $a,b,c \in N$, т.к. a^3 при $abc \in N$ ↑ монотонно и b^3 ↑ монотонно при $a,b,c \in N$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow a^3+b^3 = $ ↑ $\Rightarrow f$ ↑ монотонно.

g ↑ монотонно, т.к. $(abc+1)^2$, квадратичная функция монотонно возрастает при $a,b,c \in N$, т.к. вершина параболы (крит. с. мин. знакоп. аргумента, а т.е $\min abc = 1$ при $a,b,c \in N$). $(1;4)$, но так как меньше 1 abc быть не может, т.к. $a \in N$, $b \in N$ и $c \in N$ $\Rightarrow$ g на графике будет иметь лишь одну ветвь, которая монотонно возрастает $\Rightarrow$



$\Rightarrow f = g$ ~~однократно~~ $a^3+b^3 = (abc+1)^2$ могут принимать не более одновременно только одно значение $\Rightarrow$ 1 решение $\Rightarrow$

$a=1; b=2; c=1$ и $a=2; b=1; c=1$ — это пробники, при

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	7	3	5	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

~5 (продолжение).
подстановке которых в f и g они принимают значения

$f=3$ и $g=3$ ⇒ ответ: $a=1; b=2; c=1$ и $a=2; b=1; c=1$ ⇒ 2 тройки.

№3

Т.к. в задаче нам нужно найти наборы из 4-х натур. чисел, где числа могут повторяться разберем 3 случая, когда числа в наборе могут повторяться.

Пусть: Б.О.О. числа в наборе a, b, c, d, где $a, b, c, d \in N$.

I. 4 повторяются числа ⇒ Б.О.О. $a+a+a+a=1003$ ⇒
⇒ $4a=1003$, но $1003 \not\vdots 4$ ⇒ $a \notin N$ ⇒ противоречие ⇒
⇒ в этом случае нет нужных наборов.

II 3 повторяющихся; 1 – нет:

Б.О.О. $3a+b=1003$; $a \le 334$; $b \ge 1$. $\Rightarrow \begin{cases} a=-k+334 \\ b=3k+1 \end{cases}$ (при $k \in [0; 333]$, где $k \in \mathbb{Z}$). ⇒

⇒ всего наборов 334 штуки.

III 2 повтор. и 2 неповтор:

Б.О.О. $\underset{:2}{2a}+\underset{:2}{b+c}=\underset{:2}{1003}$; ⇒ $b+c \not\vdots 2$ ⇒ Б.О.О. b – нечет.; c – нечет.;

$b+c \ge 2+k$. $a, b, c \in N$. ⇒

$2a \le 1003-2$ ⇒ $2a \le 1001$ ⇒ $1 \le a \le 500$. (наборов)

Б.О.О. { при $a=1$: $b+c \le 1001$. ⇒ $1+1000$; $2+999$ … $500+501$. ⇒ 500 вариантов.
при $a=2$: $b+c \le 999$ ⇒ $1+998$; $2+997$ … $499+500$. ⇒ 499 вариантов
при $a \le 500$ наборов: $500+499+\ldots+1 = \frac{501 \cdot 500}{2} = \left(\text{т.е. } \frac{(500+1)500}{2}\right)$ наборов

⟶ след. лист.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	7	3	5	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3 (продолжение)

$= 250 \cdot 501 = 125250$, но здесь мы учли повторы со случаями, когда 3 повторяющихся числа в наборе $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ всего наборов может быть:

$125250 - 334 = 124916$

Ответ: 124.916 наборов

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	6	5	4	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
10	20	20	12	0	//	62

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.

Д-ем, что $x_n = 2(n+1)$

Индукция.

База:

$n=1$ $x_1 = 2(1+1) = 4$

$x_2 = 2(2+1) = 6$

$x_3 = 2 \cdot 6 - 4 = 8 = 2(3+1)$

Переход: пусть до n включительно. Тогда:

№1.

Заметим, что $f(x) = x^2 - 3x - 1 + x = g(x) + x$, а

$g(x) = x^2 - 2x - 1 - x = f(x) - x$, тогда.

$(g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4) = (f(x_1) - x_1)^3 (g(x_3) + x_3) +$

$+ (f(x_2) - x_2)^3 (g(x_4) + x_4) = -x_1^3 x_3 - x_2^3 x_4$. Тогда

и-ли x_1, x_2, x_3, x_4 в левом виде.

Тогда выражение может

равняться:

$$-\left(\frac{2+\sqrt{6}}{2}\right)^3 \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) - \left(\frac{2-\sqrt{6}}{2}\right)^3 \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)$$

или

$$-\left(\frac{2+\sqrt{6}}{2}\right)^3 \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) - \left(\frac{2-\sqrt{6}}{2}\right)^3 \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$$

$x^2 - 2x - 1 = 0$

$D = 8$

$x_1 x_2 = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$

$x^2 - 3x - 1 = 0$

$D = 13$

$x_3 x_4 = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	6	5	4	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

Пусть есть нечетное число $2k+1$. Д-ем, что кол-во способов представить его в виде суммы двух слагаемых - k.

Зафиксируем одно слагаемое и будем увел. его на 1.

Тогда: $1+2k$

$2+2k-1$.

⋮

$k+k+1$. тогда слаг. станет больше k, но

$k+1+k$ ← оно будет повторять первое и т.д.

⋮

$2k+1$.

Зафиксируем первые два числа из набора. Пусть они одинаковы. Тогда эти числа от 1 до 499, т.к. все числа в наборе натур. Пусть два зафикс. числа - a, a, тогда два ост. в сумме $1001-2a = 2(500-a)-1$ - по выводу кол-во сл-в представить такое $500-a$, т.к. $a = 1, 2, \ldots, 498, 499$, то $500-a = 499, 498, \ldots, 2, 1$. Тогда итоговое кол-во $499+498+\ldots+2+1 = \frac{499 \cdot 500}{2} = 250 \cdot 499 =$

$= 124750$

О: 124750.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	6	5	4	9	2	5

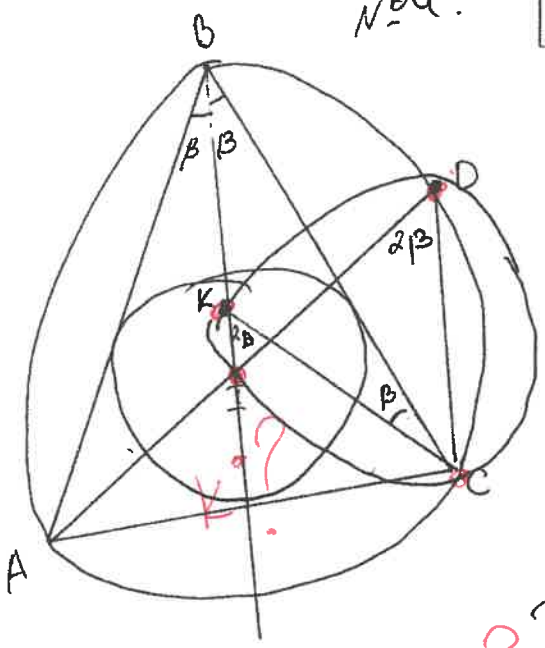
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4.



Т.к. I-ц. вис. окр, то AI и BI - бис-сы. Пусть $\angle B = 2\beta$, тогда $\angle ABI = \angle CBI = \beta$

четырехуг. $ABCD$ - вписан по условию. Тогда $\angle ABC = \angle ADC = 2\beta$, как опир. на одну дугу. четырехуг. $CDIK$ - вис. по условию. Тогда $\angle IKC = \angle IDC = 2\beta$, как опир. на одну дугу. Тогда

а если? нет.

$\angle BKC = 120° - \angle IKC = 120° - 2\beta$ как смежные. Значит, $\angle BCK = 120° - \angle KBC - \angle BKC = \beta$, как сумма углов $\triangle BKC$.

Значит, $\triangle BKC$ равнобедр., т.к. $\angle KBC = \angle BCK$ и $BK = KC$.

Ч.Т.Д.

№5

$a^3 + b^3 = (abc-1)^2$

$a^3 + b^3 = a^2b^2c^2 - 2abc + 1$

$b^3 - 1 = a^4b^2c^2 - 2abc - a^3$

Т.к. правая часть $\vdots a$, но и левая тоже, откуда $b^3 - 1 \vdots a$,

аналогично $a^3 - 1 \vdots b$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	6	5	4	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2.

Д-ем, что $x_n = x_{n-1} + n + 1$

Д-ем по индукции:

База:

4 6 9

$x_3 = 2 \cdot 6 - 4 = 8 + 1 = 9$

$x_4 = 2 \cdot 9 - 6 = 12 + 1 = 13 + 1 = 14$

$x_4 = x_3 + 4 + 1$

$14 = 9 + 4 + 1$ ✓

Переход: Пусть верно для всех x_i $i < n$. Тогда:

$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} = 2(x_{n-2} + n) - x_{n-2} = 2x_{n-2} + 2n = x_{n-1} - n + 2n =$

$= x_{n-1} + n$, что и ~~требовалось доказать~~. Тогда:

$x_n = x_{n-1} + n + 1$

Тогда $x_n = 9 + \frac{(6+n)(n-3)}{2}$

(x_3; сумма арифм. пр. от 5 до $n+1$. с кол-вом членов $n-3$ и шагом 1.)

И $x_{100} = 9 + \frac{106 \cdot 97}{2} = 9 + 5141 = 5150$

О: 5150

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	6	3	7	7	2	5

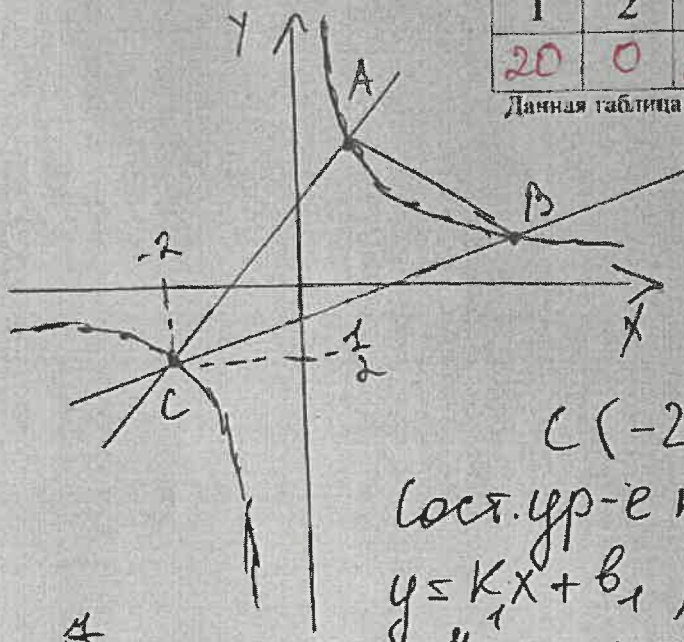
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	0	20	20	2	///	62

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано слева в рамке справа

№1



т.к. абсцисса т. $C = -2$, $C \in y = \frac{1}{x} \Rightarrow$

$C(-2; -\frac{1}{2})$

Сост. ур-е прямой AC:

$y = k_1 x + b_1$; $-\frac{1}{2} = 2 \cdot (-2) + b_1$)

$b_1 = \frac{4}{2}$; $y = 2x + \frac{4}{2} \Rightarrow$ найдем коорд. т. A:

$2x + \frac{4}{2} = \frac{1}{x} \mid \cdot x \neq 0$; $2x^2 + \frac{4}{2}x - 1 = 0 \mid \cdot 2$;

$4x^2 + 4x - 2 = 0$. $D = 49 + 32 = 81$. $x_1 = \frac{-4+9}{8} = \frac{1}{4}$

$x_2 = \frac{-4-9}{8} = -2$ – не подх. (абс. т. C)

$y_1 = \frac{1}{x_1} = 4 \Rightarrow$

$A(\frac{1}{4}; 4)$

Сост. ур-е прямой BC: $y = k_2 x + b_2$;

$-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot (-2) + b_2 \Rightarrow b_2 = \frac{7}{2}$; $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Вычислим коорд. т. B: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{x} \mid \cdot x \neq 0$;

$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1 = 0$; $x^2 + x - 2 = 0$; $x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 1$

$x_2 = -2$ – не подх.

$B(1; 1)$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ): М А 0 0 0 1 6 3 7 7 2 5

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверьте, пожалуйста, что все записи совпадают с этой стороной листа

№ продолж.:

Пусть $(a;b)$ – центр окр.

$$\begin{cases} (a-1)^2+(b-1)^2 \le \left(a-\frac{1}{4}\right)^2+(b-4)^2 \\ (a-1)^2+(b-1)^2 \le (a+2)^2+\left(b+\frac{1}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{3}{4}\cdot\left(2a-\frac{5}{4}\right)+3\cdot(2b-5)\le 0 \\ -3\cdot(2a+1)+\left(-\frac{9}{2}\right)\cdot\left(2b-\frac{1}{2}\right)\le 0 \end{cases}$$

$$-\frac{3a}{2}+\frac{15}{16}+6b-15\le 0 \quad \text{и} \quad -6a-3-3b+\frac{3}{4}\le 0 \;|:3$$

$$-\frac{3a}{2}+\frac{15}{16}-2a-\frac{9}{2}-15\le 0 \qquad 2a\le b\le -2a-1+\frac{1}{4}\le -2a-\frac{3}{4}$$

$$-\frac{21a}{2}\le \frac{39}{2}-\frac{15}{16}; \quad a\le -\frac{294\cdot 2}{16\cdot 21}\le -\frac{11}{8}$$

$$b=-2a-\frac{3}{4}=\frac{11}{4}-\frac{3}{4}=2. \quad 4502:\left(-\frac{11}{8};2\right).$$

Ответ: $\left(-\frac{11}{8};2\right)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 3 | 7 | 7 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3 пусть орехи – это конфеты, то посчитаем кол-во разделений конфет на 3 кучи: C^2_{1000}
из этого кол-ва вычтем такие распределения, при которых кто-то получил равное кол-во орехов: Пусть у Пети – с орехов, Васи – в орехов; Бори – а орехов, то $a+b+c=1001$; без умал. общ-ти: $a=b$, то $2b+c=1001$; по каждому есть c (кроме 1001) 2 в однозн. опред $\Rightarrow$ таких способов $\frac{1001-1}{2}=500$. Т.к. могло совп. кол-во орехов у Пети и Васи; Бори и Васи; Пети и Бори, то итого способов раздать равное кол-во орехов 1500. Итак, $C^2_{1000}-1500$ – кол-во распределений с разн. числом орехов. Т.к. Боря имеет больше всех, то $\left[\begin{array}{l} c<b<a \\ b<c<a \end{array}\right.$ – 2 способа $\left[\begin{array}{l} a<b<c \\ a<c<b \\ b<a<c \\ c<a<b \end{array}\right.$ не подх.

$\Rightarrow$ Итог: $\frac{C^2_{1000}-1500}{3}\cdot 2 =$

$= \frac{C^2_{1000}-1500}{3} = \frac{C^2_{1000}}{3}-500$. Ответ: $\frac{C^2_{1000}}{3}-500$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	6	3	7	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Правильность ответа не является основанием для высокой оценки работы

№2

$НОД(x_n; x_{n+1}) = НОД(n^2+300; (n+1)^2+300) = НОД(n^2+300; 2n+1)$ по алг. Евклида

$НОД(n^2+300; 2n+1) = НОД((n-1)^2+298; 2n+1) =$

$= НОД((n-2)^2+296; 2n+1) \ldots = НОД((n-150)^2; 2n+1)$

Аналогично.

Заметим, что числа n^2 и $(n+1)^2$ взаимно-пр-ы, а также n^2+300 и $(n+1)^2+300$ имеют разность, кратную 3, но их НОД не кратен 3) макс. НОД $\leq$ НОД 1

где $n = 150$ $НОД(x_n; x_{n+1}) = 301$ Верно.

$x_n = 150^2+300 = 150 \cdot 152$, $x_{n+1} = 151^2+300$

Ответ: 1.

№5 $\frac{3^m+2}{3^n+2} \in \mathbb{Z}$ т.к. $m > n$, то $НОД(3^m+2; 3^n+2) =$

$= НОД(3^m+2; 3^m-3^n) = НОД(3^n+2; 3^{m-n}-1) =$

$\Rightarrow НОК(3^m+2; 3^n+2) = \frac{(3^m+2)(3^n+2)}{1} \Rightarrow m > n$;

$n, m \in \mathbb{N}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

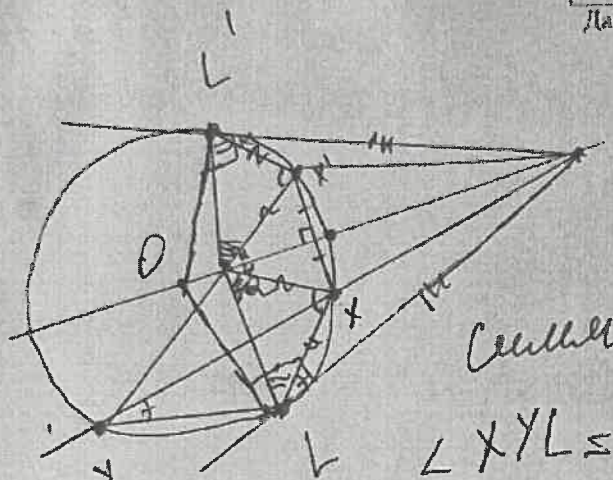
Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 3 | 7 | 7 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

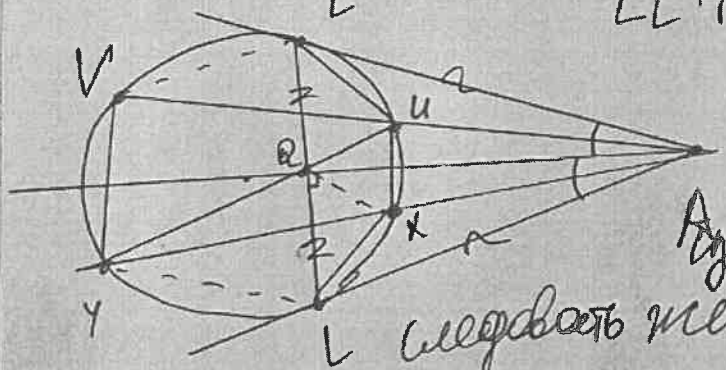
№4



Проведём касательную AL, симметр. ей AL' относ. AO, то симм. относ. AO: X → X', L → L'

∠XYL = ∠XLA как угол между хордой и кас. ∠XYL = ∠X'L'A из симм.

Докажем, что если LL' ∩ OA = Q, Y Q ∩ окр = U, то X и U симм., а дальше и дудет следовать желаемое. Заметим, что тогда Q явл. центром инверсии (Y → U; L → L') ⇒ ⇒ из свойств симметрии ⇒ X → V и U и симм. относ. AO, ч.т.д.



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	2	8	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	14	6	20	1	11	61

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1 $f(x)=x^2-2x-1$

при этом $(x-x_1)(x-x_2)=Q\,f(x)$

$g(x)=x^2-3x-1$ при этом $(x-x_3)(x-x_4)=Q\,g(x)$

1) $x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+4}}{2}=1\pm\sqrt{2}$, т.о.

$\begin{cases} x_1=1+\sqrt{2} \\ x_2=1-\sqrt{2} \end{cases}$ (1)

$\begin{cases} x_1=1-\sqrt{2} \\ x_2=1+\sqrt{2} \end{cases}$ (2)

2) $x_{3,4}=\frac{3\pm\sqrt{9+4}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$, т.о.

$\begin{cases} x_3=\frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ x_4=\frac{3-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$ (3)

$\begin{cases} x_4=\frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ x_3=\frac{3-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$ (4)

3) Исходя из системы решения ур-й видим что всего $2\cdot2=4$ решения выр-я $(g(x_1))^3 f(x_3)+(g(x_2))^3 f(x_4)=(1+\sqrt{2})^2-$

(1) $\begin{cases} x_1=1+\sqrt{2} \\ x_2=1-\sqrt{2} \\ x_3=\frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ x_4=\frac{3-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$

$(g(1+\sqrt{2}))^3=((1+\sqrt{2})^2-3(1+\sqrt{2})-1)^3=(1+2\sqrt{2}+2-3-3\sqrt{2}-1)^3=(-1-\sqrt{2})^3=$

$=-1-3\sqrt{2}-6-2\sqrt{2}=-5\sqrt{2}-7$

$(g(1-\sqrt{2}))^3=((1-\sqrt{2})^2-3(1-\sqrt{2})-1)^3=(1-2\sqrt{2}+2-3+3\sqrt{2}-1)^3=(\sqrt{2}-1)^3=$

$=2\sqrt{2}-6+3\sqrt{2}-1=5\sqrt{2}-7$

$f\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)=\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^2-(3+\sqrt{13})-1=\frac{9+6\sqrt{13}+13}{4}-\sqrt{13}-4=\frac{\pm2\sqrt{13}-6}{4}=\frac{\pm\sqrt{13}-3}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	2	8	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$f\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) = \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^2 - \left(3-\sqrt{13}\right) - 1 =$

$= \frac{9-6\sqrt{13}+13}{4} - 3 + \sqrt{13} - 1 =$

$= \frac{-2\sqrt{13}-6}{4} = \frac{-\sqrt{13}-3}{2}$

4) ~~Рассм.~~ подставим все возможные варианты корней

~~1)~~ $\exists \left(g(x_1)\right)^3 f(x_3) + \left(g(x_2)\right)^3 f(x_4) = a$

1) ~~Пусть~~ $\begin{cases} ① \\ ③ \end{cases}$ $a_1 = \left(-5\sqrt{2}-7\right)\cdot\frac{\sqrt{13}-3}{2} + \left(5\sqrt{2}-7\right)\cdot\frac{-\sqrt{13}-3}{2} =$

$= \frac{-5\sqrt{26} - 7\sqrt{13} + 15\sqrt{2} + 21 + 5\sqrt{26} - 15\sqrt{2} + 7\sqrt{13} + 21}{2} = \frac{+10\sqrt{26}+42}{2} =$

$= 21 - 5\sqrt{26}$

2) $\begin{cases} ① \\ ④ \end{cases}$ $a_2 = \left(-5\sqrt{2}-7\right)\frac{-\sqrt{13}-3}{2} + \left(5\sqrt{2}-7\right)\frac{\sqrt{13}-3}{2} =$

$= \frac{5\sqrt{26} + 15\sqrt{2} + 7\sqrt{13} + 21 + 5\sqrt{26} - 15\sqrt{2} - 7\sqrt{13} + 21}{2} = 5\sqrt{26} + 21$

3) $\begin{cases} ② \\ ③ \end{cases}$ $a_3 = \left(5\sqrt{2}-7\right)\frac{\sqrt{13}-3}{2} + \left(-5\sqrt{2}-7\right)\cdot\frac{-\sqrt{13}-3}{2} = a_2 =$

$= 5\sqrt{26} + 21$

4) $\begin{cases} ① \\ ④ \end{cases}$ аналог. $a_4 = a_1$, т.к. слаг-е мен-ся местами

Ответ: $21 - 5\sqrt{26}$; $21 + 5\sqrt{26}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	2	8	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 4

Дано

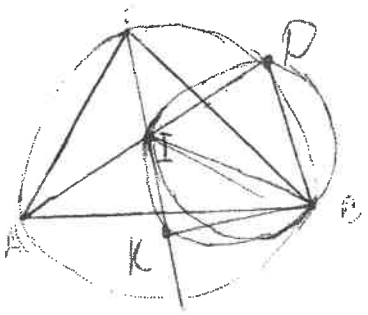
I - центр вп. окр-ти в △ ABC

~~A~~ $S(O,R)$ - опис. окр-ть △ ABC

$AI \cap S(O;R) = P$

$S_2(O_1; R_1) \ni A, P, I$

1) $BK = CK$



1) $\angle ABC = 2\varphi$

2) $\angle ABC = \angle ADC = 2\varphi$ т.к. опир-ся на одну дугу AC

3) т.к. KCDI - чуг. впис. окр-ть, то по необх. и дост. усл-ю $\angle CKI = 180° - CID = 180° - 2\varphi$

4) I - центр вп. окр-ти в △ ABC ⇒ BI - бисс-са △ ABC ⇒

$\Rightarrow \angle IBK = \frac{1}{2}\angle ABC = \varphi$

5) $BCK = 180° - \angle CKB - \angle KBC = 180° - 180° + 2\varphi - \varphi = \varphi$

6) ∠ △ CKB $\angle KCB = \angle KBC \Rightarrow$ △ CKB - р/б $\overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} CK = BK$

ч.т.д.

№ 5. ~~Дано~~ Рассмотрим набор, где есть 2 единицы, чтобы $a+b+c+d = 1001$, где $a=b=1$, нужно $c+d = 999$, представить c и d так можно $\left[\frac{999}{2}\right] = 496$ способами если $a=b=2$, то таких сл-в 495 и т. д. до $a=b=496$, где такой набор ед-н 496; 496; 1; 2., т.к. Нечетное - Четное = Четное, то наборы нигде не повторялись, т.к. нев-но пред-ть $c+d$ од-ми числами, при этом наборы, где $a=b=c$

(на след. листе →)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	2	8	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

мы тоже рассм-ли $\Rightarrow$

n-кол-во таких наборов

$$n = \frac{495 \cdot 496}{2} = 128\,260$$

Ответ: 128 260

№2. $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} + a$

$2x_{n-1} - x_{n-2}$

$\Rightarrow$ если x_n - нечетное, то a гар-но равно 1, т.к., тогда x_n будет четным $\Rightarrow$ составным

$\Rightarrow$ если $2x_{n-1} - x_{n-2}$ - четное, то $\begin{cases} a=1 \\ a=2 \end{cases}$, при этом $a=2$, только если $2x_{n-1} - x_{n-2} + 1$ - простое число

Пусть $a=1$ всегда, тогда

$$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} + 1 = \Delta x + x_{n-1} + 1$$

$\Delta x = x_{n-1} - x_{n-2}$

1) $x_n - x_{n-1} = \Delta x + 1 \Rightarrow$ если $a=1$, то ~~такого~~ разница между числами на 1 больше, чем предыдущая

Ряд первых чисел выглядят так:

4	6	9	14
x_1	x_2	x_3	x_4

в x_4, $a=2$

2) Все посл-ущие числа вплоть до ар-го числа будут выр-ся формулой: $x_n = 14 + \frac{d(d+1)}{2} - \frac{5 \cdot 6}{2} = \frac{d(d+1)}{2} - 1$ $(n = d-1)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	2	8	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

3) Для корректного ответа следует найти, когда $\frac{d(d+1)}{2} - 1$ будет простым

минимальное усл-е $\frac{d(d+1)}{2} : 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} d:4 \\ (d+1):4 \end{bmatrix}$ $\exists d=4b \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Нет такого d, где X_n - простое $\Rightarrow$

$\Rightarrow X_{100} = \frac{101 \cdot 102}{2} - 1 = 101 \cdot 51 - 1 = 5151$

Ответ: $X_{100} = 5151$

№5. $a^3+b^3 = (abc-1)^2$

$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$, т.к. a^3+b^3 - полный нв-т,

то $a+b = a^2-ab+b^2 \Leftrightarrow a^2-ab+b^2-a-b=0$

$a+b = (a+b)^2 - 3a \Leftrightarrow (a+b)(a+b-1) = 3a$

Но тогда $(a+b)^2 = (abc-1)^2 \Leftrightarrow a+b = abc-1 \Leftrightarrow abc-a-b=1$

$\exists a=b$, тогда $2a^3 = (a^2c-1)^2 \Rightarrow 2a^3$ - полный квадрат,

если $2a^3$ $a=2$, $4c-1=4 \Leftrightarrow c=\frac{5}{4}$, не подх.

Подходит $a=1$; $b=2$; $c=2$

$a+b \geq ab \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 1$ $\begin{bmatrix} a>b \\ a<b \end{bmatrix}$, тогда $\begin{bmatrix} c=2 \\ c=1 \end{bmatrix}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	7	8	3	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
~~20~~ 16	20	0	20	0	//	60

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

$f(x) = x^2 - 2x - 1$, $f(x_1) = f(x_2) = 0$

$g(x) = x^2 - 3x - 1$, $g(x_3) = g(x_4) = 0$.

$(g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4) = ?$

Заметим что $f(x) = g(x) + x$, $g(x) = f(x) - x$.

Тогда искомое выражение можно переписать так:

$$\underbrace{(f(x_1)}_{0} - x_1)^3 \cdot \underbrace{(g(x_3)}_{0} + x_3) + \underbrace{(f(x_2)}_{0} - x_2)^3 \cdot \underbrace{(g(x_4)}_{0} + x_4) =$$

$$= -x_1^3 \cdot x_3 - x_2^3 \cdot x_4$$

Найдем x_1, x_2, x_3, x_4:

$x^2 - 2x - 1 = 0$

$D_f = 4 + 4 = 8$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$x^2 - 3x - 1 = 0$

$D_g = 9 + 4 = 13$

$x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	7	8	3	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Тогда

$$-X_1^3 \cdot X_3 - X_2^3 \cdot X_4 = -(1+\sqrt{2})^3 \cdot \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) - (1-\sqrt{2})^3 \cdot \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)$$

или

вариант ①

$$-X_1^3 \cdot X_3 - X_2^3 \cdot X_4 = -(1+\sqrt{2})^3 \cdot \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) - (1-\sqrt{2})^3 \cdot \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$$

вариант ②

$(1+\sqrt{2})^3 = 1+3\sqrt{2}+6+2\sqrt{2} = 7+5\sqrt{2}$

$(1-\sqrt{2})^3 = 1-3\sqrt{2}+6-2\sqrt{2} = 7-5\sqrt{2}$

① $-\left(\frac{(7+5\sqrt{2})(3+\sqrt{13})}{2} + \frac{(7-5\sqrt{2})(3-\sqrt{13})}{2}\right) =$

$= -\frac{1}{2}\left(21\cdot 2 + 7\sqrt{13} - 7\sqrt{13} + 15\sqrt{2} - 15\sqrt{2} + 5\sqrt{26}\cdot 2\right) =$

$= \boxed{-21 - 5\sqrt{26}}$

② $-\left(\frac{(7+5\sqrt{2})(3-\sqrt{13})}{2} + \frac{(7-5\sqrt{2})(3+\sqrt{13})}{2}\right) =$

$= -\frac{1}{2}\left(21\cdot 2 - 7\sqrt{13} + 7\sqrt{13} + 15\sqrt{2} - 15\sqrt{2} - 5\sqrt{26}\cdot 2\right) =$

$= \boxed{5\sqrt{26} - 21}$

Ответ: $-21-5\sqrt{26}$ и $5\sqrt{26}-21$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	7	8	3	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

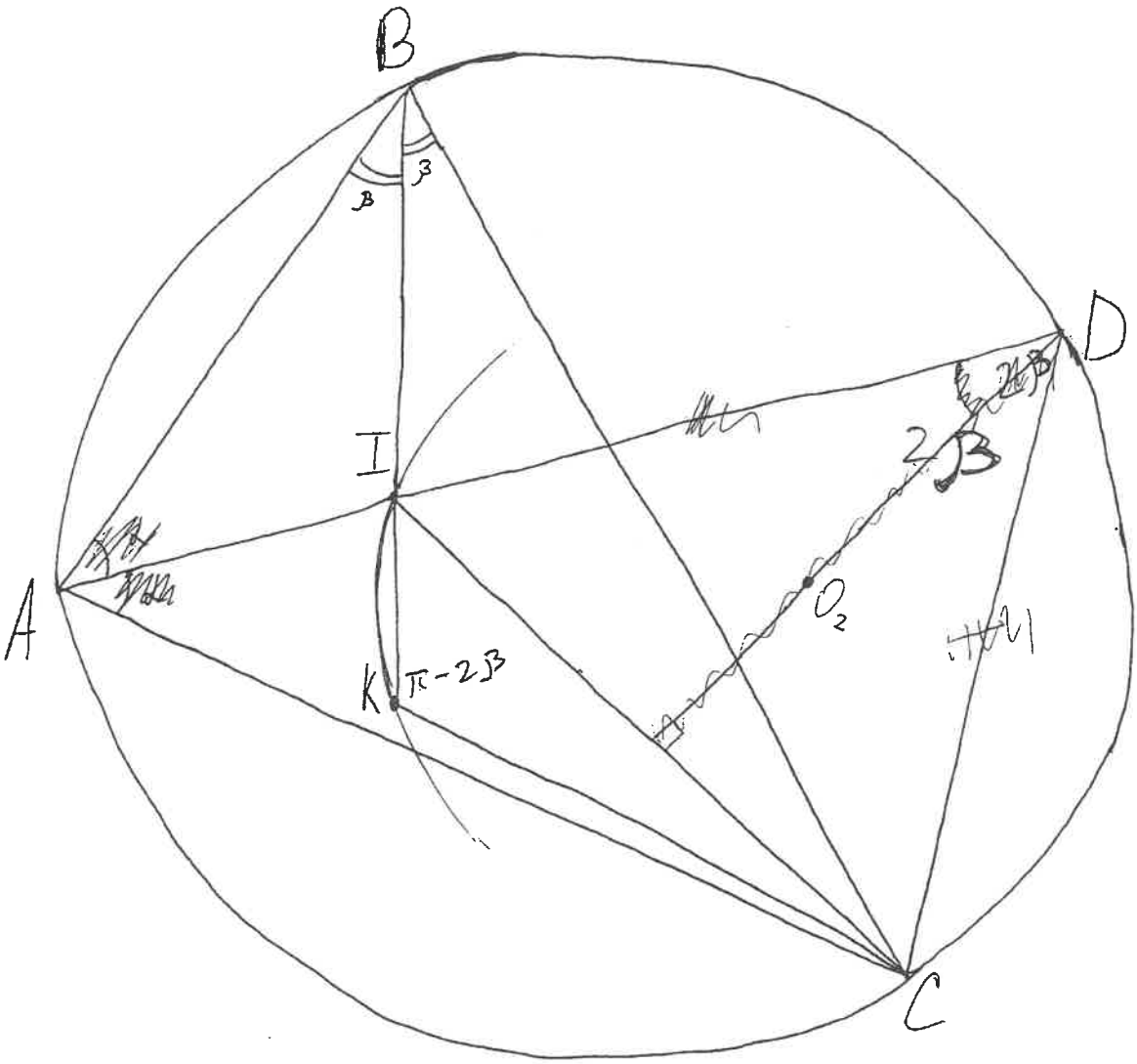
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

Док-ть: $BK = CK$.



I - центр впис. окруж., ⇒ I - точка пересеч. бис., [illegible]

$\angle ABI = \angle IBC$, обозначим их за β.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

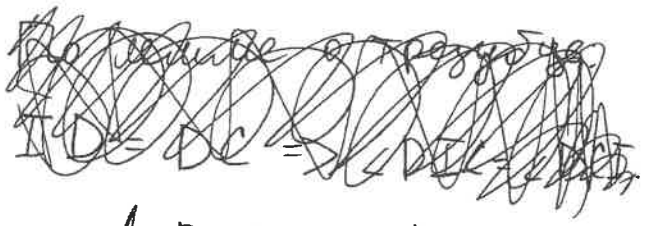
М	А	0	0	0	1	7	8	3	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)



$\angle ADC = \angle ABC$, т.к. они опираются на $\smile AC$, $\Rightarrow \angle ADC = 2\beta$.

K лежит на опис. окр. $\triangle IDC$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow KIDC$ – вписан. $\Rightarrow \angle IKC = \pi - \angle IDC = \pi - 2\beta$.

Обозначим $\angle KCB = X$. Тогда в $\triangle KCB$:

$\pi = \pi - 2\beta + \beta + X \Rightarrow X = \beta = \angle KBC$.

$\angle KBC = \angle KCB$, $\Rightarrow KB = KC$, ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	7	8	3	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N2

$X_1 = 4$, $X_2 = 6$

$X_{10} - ?$

$X_3 > 12 - 4 = 8$, $X_3 = 9$

$X_4 > 18 - 6 = 12$, $X_4 = 14$

$X_5 > 28 - 9 = 19$, $X_5 = 20$

$X_6 > 40 - 14 = 26$, $X_6 = 27$

$X_7 > 54 - 20 = 34$, $X_7 = 35$

$X_8 > 70 - 27 = 43$, $X_8 = 44$

$X_9 > 88 - 35 = 53$, $X_9 = 54$

$X_{10} > 108 - 44 = 64$, $X_{10} = 65$

$X_{11} > 130 - 54 = 76$, $X_{11} = 77$

$X_{12} > 154 - 65 = 89$, $X_{12} = 90$

$X_{13} > 180 - 77 = 103$, $X_{13} = 104$

$X_{14} > 208 - 90 = 118$, $X_{14} = 119$

$X_{15} > 238 - 104 = 134$, $X_{15} = 135$

$X_{16} > 270 - 119 = 151$ $X_{16} = 152$

$X_{17} > 304 - 135 = 169$ $X_{17} = 170$

$X_{18} > 340 - 152 = 188$ $X_{18} = 189$

$X_{19} > 378 - 170 = 208$ $X_{19} = 209$

$X_{20} > 418 - 189 = 229$ $X_{20} = 230$

$X_{21} > 460 - 209 = 251$ $X_{21} = 252$

$X_{22} > 504 - 230 = 274$ $X_{22} = 275$

$X_{23} > 550 - 252 = 298$ $X_{23} = 299$

$X_{24} > 598 - 275 = 323$ $X_{24} = 324$

$X_{25} > 648 - 299 = 349$ $X_{25} = 350$

$X_{26} > 700 - 324 = 376$ $X_{26} = 377$

$X_{27} > 754 - 350 = 404$ $X_{27} = 405$

+1 +2 +3 +14 +15 +16 +17 +18 +19 +20 +21 +22 +23 +24 +25 +26 +27 +28 +29

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	7	8	3	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$X_{28} > 810 - 377 = 433$ $\quad X_{28} = 434$ +30

$X_{29} > 868 - 405 = 463$ $\quad X_{29} = 464$ +31

$X_{30} > 928 - 434 = 494$ $\quad X_{30} = 495$ +32

$X_{31} > 990 - 464 = 526$ $\quad X_{31} = 527$ +33

$X_{32} > 1054 - 495 = 559$ $\quad X_{32} = 560$ +34

$X_{33} > 1120 - 527 = 593$ $\quad X_{33} = 594$ +35

$X_{34} > 1192 - 560 = 628$ $\quad X_{34} = 629$ +36

$X_{35} > 1258 - 594 = 664$ $\quad X_{35} = 665$ +37

$X_{36} > 1330 - 629 = 701$ $\quad X_{36} = 702$ +38

$X_{37} > 1404 - 665 = 739$ $\quad X_{37} = 740$ +39

$X_{38} > 1480 - 702 = 778$ $\quad X_{38} = 779$ +40

$X_{39} > 1558 - 779 = 818$ $\quad X_{39} = 819$ +41

$X_{40} > 1638 - 819 = 869$ $\quad X_{40} = 870$ +42

$X_{41} > 1740 - 879 = 911$ $\quad X_{41} = 912$ +43

$X_{42} > 1824 - 870 = 954$ $\quad X_{42} = 955$ +44

$X_{43} > 1910 - 912 = 998$ $\quad X_{43} = 999$ +45

$X_{44} > 1998 - 955 = 1043$ $\quad X_{44} = 1044$ +46

$X_{45} > 2088 - 999 = 1089$ $\quad X_{45} = 1090$ +47

$X_{46} > 2180 - 1044 = 1136$ $\quad X_{46} = 1137$ +48

$X_{47} > 2274 - 1090 = 1184$ $\quad X_{47} = 1185$ +49

$X_{48} > 2370 - 1137 = 1233$ $\quad X_{48} = 1234$ +50

$X_{49} > 2268 - 1185 = 1283$ $\quad X_{49} = 1284$ +51

$X_{50} > 2568 - 1234 = 1334$ $\quad X_{50} = 1335$ +52

$X_{51} > 2670 - 1284 = 1386$ $\quad X_{51} = 1387$ +53

$X_{52} > 2774 - 1335 = 1439$ $\quad X_{52} = 1440$ +54

$X_{53} > 2880 - 1387 = 1493$ $\quad X_{53} = 1494$ +55

$X_{54} > 2988 - 1440 = 1548$ $\quad X_{54} = 1549$ +56

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	7	8	3	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$X_{55} > 3098 - 1494 = 1604$ $X_{55} = 1605$ +58

$X_{56} > 3210 - 1543 = 1661$ $X_{56} = 1662$ +59

$X_{57} > 3324 - 1605 = 1719$ $X_{57} = 1720$ +60

$X_{58} > 3440 - 1662 = 1778$ $X_{58} = 1779$ +61

$X_{59} > 3558 - 1720 = 1838$ $X_{59} = 1839$ +62

$X_{60} > 3678 - 1779 = 1899$ $X_{60} = 1900$ +63

$X_{61} > 3800 - 1839 = 1961$ $X_{61} = 1962$ +64

$X_{62} > 3924 - 1900 = 2024$ $X_{62} = 2025$ +65

$X_{63} > 4050 - 1962 = 2088$ $X_{63} = 2089$ +66

$X_{64} > 4178 - 2025 = 2153$ $X_{64} = 2154$ +67

$X_{65} > 4308 - 2089 = 2219$ $X_{65} = 2220$ +68

$X_{66} > 4440 - 2154 = 2286$ $X_{66} = 2287$ +69

$X_{67} > 4574 - 2220 = 2354$ $X_{67} = 2355$ +70

$X_{68} > 4710 - 2287 = 2423$ $X_{68} = 2424$ +71

$X_{69} > 4848 - 2355 = 2493$ $X_{69} = 2494$ +72

$X_{70} > 4988 - 2424 = 2564$ $X_{70} = 2565$ +73

$X_{71} > 5130 - 2494 = 2636$ $X_{71} = 2637$ +74

$X_{72} > 5274 - 2565 = 2709$ $X_{72} = 2710$ +75

$X_{73} > 5420 - 2637 = 2783$ $X_{73} = 2784$ +76

$X_{74} > 5568 - 2710 = 2878$ $X_{74} = 2879$ +77

$X_{75} > 5758 - 2784 = 2954$ $X_{75} = 2955$ +78

$X_{76} > 5910 - 2879 = 3031$ $X_{76} = 3032$ +79

$X_{77} > 6064 - 2955 = 3109$ $X_{77} = 3110$ +80

$X_{78} > 6220 - 3032 = 3188$ $X_{78} = 3189$ +81

$X_{79} > 6378 - 3110 = 3268$ $X_{79} = 3269$ +82

$X_{80} > 6538 - 3189 = 3349$ $X_{80} = 3350$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	7	8	3	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$X_{81} > 6700 - 3269 = 3431$ $X_{81} = 3432$ +83

$X_{82} > 6864 - 3350 = 3514$ $X_{82} = 3515$ +84

$X_{83} > 7030 - 3432 = 3598$ $X_{83} = 3599$ +85

$X_{84} > 7198 - 3515 = 3683$ $X_{84} = 3684$ +86

$X_{85} > 7378 - 3599 = 3769$ $X_{85} = 3770$ +87

$X_{86} > 7540 - 3684 = 3856$ $X_{86} = 3857$ +88

$X_{87} > 7714 - 3770 = 3944$ $X_{87} = 3945$ +89

$X_{88} > 7890 - 3857 = 4033$ $X_{88} = 4034$ +90

$X_{89} > 8068 - 3945 = 4123$ $X_{89} = 4124$ +91

$X_{90} > 8248 - 4034 = 4214$ $X_{90} = 4215$ +92

$X_{91} > 8430 - 4124 = 4306$ $X_{91} = 4307$ +93

$X_{92} > 8614 - 4215 = 4399$ $X_{92} = 4400$ +94

$X_{93} > 8800 - 4307 = 4493$ $X_{93} = 4494$ +95

$X_{94} > 8988 - 4400 = 4588$ $X_{94} = 4589$ +96

$X_{95} > 9178 - 4494 = 4684$ $X_{95} = 4680$ +97

$X_{96} > 9360 - 4589 = 4776$ $X_{96} = 4777$ +98

$X_{97} > 9554 - 4680 = 4874$ $X_{97} = 4870$ +99

$X_{98} > 9750 - 4777 = 4978$ $X_{98} = 4949$ +100

$X_{99} > 9948 - 4875 = 5078$ $X_{99} = 5049$ +101

$X_{100} > 10148 - 4974 = 5049$ $X_{100} = 5150$

Ответ: $X_{100} = 5150$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	7	8	3	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

$a^3+b^3=(abc-1)^2$

Докажем, что НОД$(a,b)=1$.

Действительно, пусть НОД$(a,b)=p\neq 1$.

Тогда $a=p\cdot a_1$, $b=p\cdot b_1$,

$p^3(a_1^3+b_1^3)=(p^2\cdot a_1\cdot b_1\cdot c-1)^2$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\cdot p}$

Заметим что $p^2\cdot a_1\cdot b_1\cdot c \vdots p$, при этом НОД$(p^2\cdot a_1\cdot b_1\cdot c,\ p^2\cdot a_1\cdot b_1\cdot c-1)=1$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ правая часть $\not\vdots p$, в то время как левая $\vdots p$. Противоречие. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ a и b взаимнопросты.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	7	8	3	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

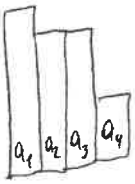
Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамках справа

№3.

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1001$.

Представим числа в виде диаграммы Юнга. Тогда нам нужно будет посчитать кол-во диаграмм с равными столбцами; для простоты упорядочим числа: $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4$



Всего 1001

Не может быть 2 пар одинаковых столбцов, т.к. если $a_1 = a_2$, $a_3 = a_4$, то $1001 = 2(a_1 + a_3)$, но $1001 \not\vdots 2$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	2	8	2	2	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	0	20	20	0	—	60

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1. Найдём корни $f(x)$:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2}$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Найдём корни $g(x)$: $x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2}$; $x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

Далее для удобства обозначения будем использовать запись вида $h(+)/h(-)$, где $+a$ - обозначает корни, содержащие $+a$ - соотв.

Рассмотрим все возм. вар. выражений:

1) $(g(+))^3 f(-) + (g(-))^3 f(+)$ 2) $(g(-))^3 f(+) + (g(+))^3 f(-)$

3) $(g(-))^3 f(-) + (g(+))^3 f(+)$ 4) $(g(+))^3 f(+) + (g(-))^3 f(-)$

Вариантов всего 4 т.к. расстановка $+a$ - можно представить иначе как постановку их в первое слагаемое т.к. во второе уже принципиально ничего нового не добавит по ассоциативному принципу. $(+-; -+; --; ++)$

Заметим, что случаи 1) и 2) получаются друг из друга перестановкой слагаемых и вариантов 3) и 4) тоже.

Тогда в конечном итоге нас интересуют 2 значения:

$(g(+))^3 f(-) + (g(-))^3 f(+)$ и $(g(+))^3 f(+) + (g(-))^3 f(-)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	2	8	2	2	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Продолжение №1:

Представим мн-ны в более удобном виде:

$f(x) = x^2 - 2x - 1$ $\quad g(x) = x^2 - 3x - 1$

$f(x) = x^2 - 2x + 1 - 2$ $\quad g(x) = x^2 - 3x + 2{,}25 - 3{,}25$

$f(x) = (x-1)^2 - 2$ $\quad g(x) = (x - 1{,}5)^2 - 3{,}25$

Подставим в выражение корни:

$$\underbrace{((1+\sqrt{2}-1{,}5)^2-3{,}25)^3}_{①}\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}-1\right) + \underbrace{((1-\sqrt{2}-1{,}5)^2-3{,}25)^3}_{②}\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}+1\right)$$

① $((1+\sqrt{2}-1{,}5)^2-3{,}25)^3 = ((-0{,}5+\sqrt{2})^2-3{,}25)^3 = (0{,}25-\sqrt{2}+2-3{,}25)^3 = (-1-\sqrt{2})^3 =$

$= -(1+3\sqrt{2}+6+2\sqrt{2}) = -7-5\sqrt{2}$

② $((1-\sqrt{2}-1{,}5)^2-3{,}25)^3 = ((-0{,}5-\sqrt{2})^2-3{,}25)^3 = (0{,}25+\sqrt{2}+2-3{,}25)^3 = (\sqrt{2}-1)^3 =$

$= (2\sqrt{2} - 6 + 3\sqrt{2} - 1) = -7+5\sqrt{2}$

$(-7-5\sqrt{2})\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) + (-7+5\sqrt{2})\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) =$

$= -3{,}5 + 3{,}5\sqrt{13} - 2{,}5\sqrt{2} + 2{,}5\sqrt{26} - 3{,}5 - 3{,}5\sqrt{13} + 1{,}5\sqrt{2} + 2{,}5\sqrt{26} = -7 + 5\sqrt{26}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	2	8	2	2	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Продолжение №1:

~~Подставим во второе выражение:~~

~~$((1+\sqrt{2}-1,5)^2-3,25)^3((3$~~

Подставим корни в первое выражение:

$$((1+\sqrt{2}-1,5)^2-3,25)^3\left(\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}-1\right)^2-2\right)+((1-\sqrt{2}-1,5)^2-3,25)^3\left(\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}-1\right)^2-2\right)$$

① ③ ② ④

① $((1+\sqrt{2}-1,5)^2-3,25)^3=((-0,5+\sqrt{2})^2-3,25)^3=(-1-\sqrt{2})^3=-7-5\sqrt{2}=(g(+))^3$

② $((1-\sqrt{2}-1,5)^2-3,25)^3=((-0,5-\sqrt{2})^2-3,25)^3=(\sqrt{2}-1)^3=-7+5\sqrt{2}=(g(-))^3$

③ $\left(\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}-1\right)^2-2\right)=\frac{(1-\sqrt{13})^2}{4}-2=\frac{1-2\sqrt{13}+13}{4}-2=\frac{7\mp\sqrt{13}}{2}-2=\frac{3\mp\sqrt{13}}{2}=f(-)$

④ $\left(\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}-1\right)^2-2\right)=\frac{(1+\sqrt{13})^2}{4}-2=\frac{1+2\sqrt{13}+13}{4}-2=\frac{7\pm\sqrt{13}}{2}-2=\frac{3+\sqrt{13}}{2}=f(+)$

$(-7-5\sqrt{2})\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)+(-7+5\sqrt{2})\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)=-10,5+3,5\sqrt{13}-7,5\sqrt{2}+2,5\sqrt{26}-10,5$

$-3,5\sqrt{13}+2,5\sqrt{26}+7,5\sqrt{2}=-21+2\sqrt{26}$

Подставим во второе выражение (используя вышеназв. зн.)

~~$(-7-5\sqrt{2})$~~

$(-7-5\sqrt{2})\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)+(-7+5\sqrt{2})\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)=-10,5-3,5\sqrt{13}-7,5\sqrt{2}-2,5\sqrt{26}$

$*-10,5+3,5\sqrt{13}+7,5\sqrt{2}-2,5\sqrt{26}=-21-2\sqrt{26}$

Ответ: $\{-21-2\sqrt{26};-21+2\sqrt{26}\}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	2	8	2	2	2	5

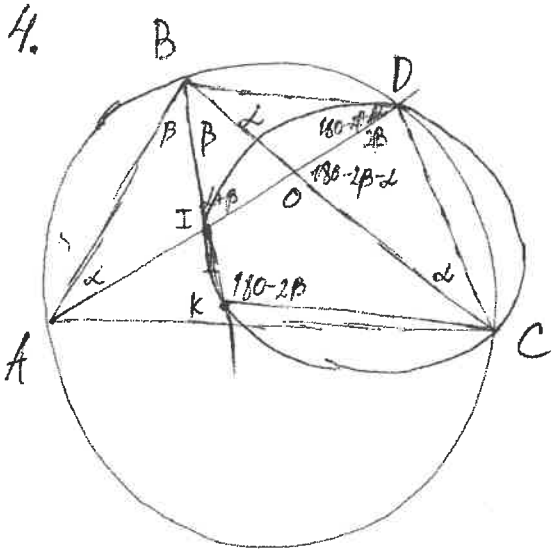
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

4.



По лемме о трилистнике:

$BD = DI = DC \Rightarrow \Delta BDI$ - равнобедренный. Свен. BI

$\Downarrow$

ΔBDC - равнобедренный с осн. BC $\Rightarrow \angle IBD = \angle IBD$

$\Downarrow$

$\angle DBC = \angle DCB$

Пусть $\angle BAI = \alpha$, а $\angle ABI = \beta$,

тогда $\angle BID = \alpha + \beta$ по т-ме о вн. угл. треуг., тогда и $\angle IBD = \alpha + \beta$ ($\angle IBD = \angle BID$)

I - центр вп. окр. $\Rightarrow$ BI - бис. (ΔABC) $\Rightarrow \angle ABI = \angle IBC = \beta \Rightarrow \angle DBC = \angle DBI - \angle CBI = \alpha + \beta - \beta = \alpha = \angle DCB$ (ранее док.)

$\angle BOI = 180 - \beta - \alpha - \beta = 180 - 2\beta - \alpha$ (по сумме уг. треуг. ΔIBO)

$\angle DOC \Rightarrow \angle ODC = 180 - 180 + 2\beta + \alpha - \alpha = 2\beta$

$\angle BDI = 180 - \alpha - \beta - \alpha - \beta = 180 - 2\alpha - 2\beta$ (по сумме уг. ΔBDI)

$\angle IDC$ опирается на хорду IC, $\angle IKC$ оп. на другую сторону от C, но данная они это с разных сторон от IC $\Rightarrow \angle IKC + \angle IDC = 180 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle IKC = 180 - 2\beta$.

Рассмотрим четырёхуг. PBKC и его сумму углов:

$360 = \alpha + \beta + 180 - 2\alpha + \alpha + \angle BCK + 180 - 2\beta \Rightarrow \angle BCK = \beta = \angle KBC \Rightarrow \Delta BKC$ - равнобедренный с осн. BC $\Rightarrow BK = KC$ что и требовалось доказать.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	2	8	2	2	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано в рамке справа

в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

8.

1/6

2·64=128

2. 4, 6, 9, 14, 20, 27, 35, 44, 54, 65, 77, 90, 104, 119,
135, 152, 170, 189, 210, 232, 255, 279, 304, 330, 357, 385,
414, 444, 475, 507, 540, 574, 608, 645

2·6−4=8 → 9 : 3
9·2−6=12 → 14 : 2
14·2−9=19 → 20 : 2
20·2−14=26 → 27 : 3
27·2−20=34 → 35 : 7
35·2−27=43 → 44 : 2
44·2−35=53 → 54 : 2
54·2−44=64 → 65 : 5
65·2−54=76 → 77 : 7
77·2−65=89 → 90 : 2
90·2−77=103 → 104 : 2
104·2−90=118 → 119 : 7
119·2−104=134 → 135 : 3
135·2−119=151 → 152 : 2
152·2−135=169 → 170 : 2
170·2−152=188 → 189 : 7
189·2−170=208 → 210 : 2
210·2−189=231 → 232 : 2
232·2−210=254 → 255 : 5
255·2−232=278 → 279 : 3
279·2−255=303 → 304 : 2
304·2−279=329 → 330 : 2
330·2−304=356 → 357 : 3
357·2−330=384 → 385 : 5
385·2−357=413 → 414 : 2
414·2−385=443 → 444 : 2
444·2−414=474 → 475 : 5
475·2−444=506 → 507 : 3
507·2−475=539 → 540 : 2
540·2−507=573 → 574 : 2
574·2−540=608 → 608 : 3
608·2−574=644 → 645 : 5
645·2−608=682

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	2	8	2	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

3. Разобьем случаи на группы.

I — одинаковых числа-2, II — одинак. ч.-3, III — одинак ч.-4.

Первая группа — первая цифра повторилась т.к. 1001 / 4.

Вторая группа — вторая цифра: 1001:3 = 333,(6) а значит у нас есть варианты, где было по 3 „1", „2" ... „333". Оставшееся же 4-ое число дополняет сумму до 1001. То есть наших случаев у нас 333.

Третья группа: 1001:2=500,5, но если мы делим набор, где 500,500... то при любых нет. двух других чисел сумма будет больше 1001. То есть 3а вариантов повт. чисел. есть ещё 499.

При этом на каждый „повтор" приходится по (1001-2n)//2 (где // - деление нацело) по сути по 500-n (при том что n-ое число которое повторилось дважды)*. Важно будет заметить, что в 3-ю группу включены и все случаи из первой группы.

К примеру: Пусть двойка повторилась „2", тогда все случаи вида: 2,2,1,3996; 2,2,2,995; ... 2,2,198,499.

То есть все случаи будут включены в следующую посчитать по сл. ф-ле: $\sum_{n=1}^{499}(500-n) = 500\cdot 499 - \underbrace{(1+2+\ldots+499)}_{\text{а.п.}} = 500\cdot 499 - \frac{500}{2}\cdot 499 =$

$= 250 \cdot 499 = 124750$

* вариантов двух других чисел *

Ответ: 124750

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	2	8	2	2	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5. $a^3+b^3=(abc-1)^2$

НОД$(a,b)=1$ т.к. если они равны m, то $a^3+b^3 \vdots m$, а $(abc-1)\not\vdots m \Rightarrow (abc-1)^2 \not\vdots m$ – противоречие.

$(a+b)(a^2+ab+b^2)=(abc-1)(abc-1)$

Утверждение: если НОД$(a,b)=1$, то НОД$(a+b,a)=1$, НОД$(a+b,b)=1$

$$\begin{cases} a+b=\dfrac{abc-1}{m} \Rightarrow (a+b)m=abc-1 \Rightarrow am+bm=abc-1 \Rightarrow \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad m\in\mathbb{N} \quad bm-1=a(bc-m) \\ a^2+ab+b^2=(abc-1)m \Rightarrow a^2+ab+b^2=abcm-m \Rightarrow a^2+b^2-m=ab(cm-1) \end{cases}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	6	4	7	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	×	×	111	60

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано в этой тонкой линии в рамке справа

№1.

Нужно найти коэффициент C.

$y = 2x + c$ и $y = \frac{1}{x} + c$.

$C = -2$ и $C = -\frac{1}{2}$. (нужно подставить в 2 уравнения).

через C проходят две прямые ① $y = 2x + 3{,}5$ и ② $y = \frac{1}{2}x + 0{,}5$

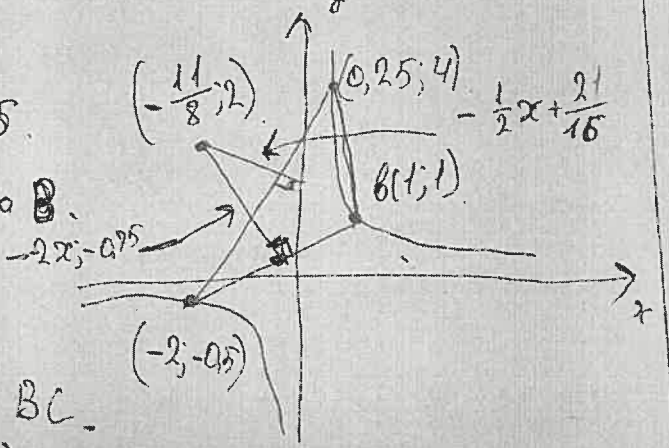
найти точки пересечений

~~$2x + 3{,}5$~~ через C проходят

$y = 2x + 3{,}5$ и $y = \frac{1}{2}x + 0{,}5$.

$\left(\frac{1}{4}; 4\right)$ точка A $\quad (1; 1)$ – точка B.

центр пересечений.



нужно найти середины AC и BC.

середина AC будет $\left(-\frac{7}{8}; \frac{7}{4}\right)$

середина BC будет $(-0{,}5; +0{,}25)$.

$AC = AM + MC$.

уравнение прямой.

через M проходят перпендикуляр с AC ~~так что~~ $y = \frac{1}{2}x + c$.

Так как $\left(-\frac{1}{2} \cdot 2 = -1\right)$;

в уравнении $y = -\frac{1}{2}x + c \left(-\frac{7}{8}; \frac{7}{4}\right) \Rightarrow C = \frac{21}{16} \Rightarrow$ серединный перпендикуляр к AC: $y = -\frac{21}{2}x + \frac{21}{16}$; центр BC это $(-0{,}5; +0{,}25)$

для того, чтобы прямая перпендикулярная BC.

угловой коэффициент ~~нужен~~ = 2; нужен свободный член. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$

$y = -2x + c \Rightarrow C = -0{,}75$. решим систему уравнений 1

Вариант № 4

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ): М А 0 0 0 1 6 4 7 1 2 3

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Оформляется только то, что записано с этой стороны листа

$$\begin{cases} y = -2x - 0{,}75 \\ y = -\frac{24}{2}x + \frac{21}{16} \mid \cdot 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x - 0{,}75 \\ 4y = -2x + \frac{84}{16} \end{cases} \Rightarrow 3y = \frac{84}{16} + 0{,}75.$$

$$3y = \frac{96}{16 \cdot 8}$$

$$y = \frac{32}{16}$$

$y = 2$

подставим $y = 2$ в $y = -2x - 0{,}75$

$$2 = -2x - 0{,}75$$

$$2x = -2{,}75$$

$$x = -\frac{11}{8}.$$

точка $\left(-\frac{11}{8}; 2\right)$ является центром описанной ОКР.

Ответ: $\left(-\frac{11}{8}; 2\right)$ – центр описанной ОКР.

№2.

$n \in \mathbb{N}$ $x_n = n^2 + 300$ и $y_n = НОД(x_n; x_{n+1})$.

Когда считаем НОД имеем право (по свойству) заменять

Большее число то есть $a > b$ $НОД(a; b)$ $НОД(a; a \% b)$ % – остаток от деления

$n^2 + 2n + 1 \cdot (n+1)^2 + 300 - (n^2 + 300) = n^2 + 2n + 1 + 300 - n^2 - 300 = 2n + 1.$

$n^2 + 300$ = 1 число

$2n + 1$ = 2 число

Олимпиада школьников «...

Вариант № 4

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ): МА 0 0 0 1 6 4 7 1 2 5

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~2n+~~

n^2+300 и $2n+1$

$2n-$

n^2+300
$2n+1$ } НОД этих чисел $НОД\left(\frac{n^2+300}{2n+1}\right) = \left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{4}\right)\cdot(2n+1) + \frac{1201}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2+300$ меняем на $\frac{1201}{4}$ только если $\frac{1}{2}n - \frac{1}{4}$ целое, но оно не целое.

НОД должен быть наибольшим $\frac{n^2+300}{2n+1}$ нужно найти n, где остаток $\left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{4}\right)\cdot(2n+1) + \frac{1201}{4}$ - равен 0

НОД $\left(\frac{n^2+300}{2n+1}\right.$ или $\left(1201 + \frac{2n+1}{4}\right.$ или $\left.1201 - \frac{2n+1}{4}\right)$

меняется в зависимости от чётности

$1201 - \frac{2n+1}{4}$ (при чёт)

$1201 + \frac{2n+1}{4}$ (при не чёт) $\Rightarrow$ должно быть целое для наибольшего НОД

$1201 \pm \frac{2n+1}{4}$ один из них нечёт значит можем чёт

домножить на 4

например: $n=600$ ост $=0$ НОД $= 2n+1$. то есть 1201.

нужно проверить может ли быть >1201.

НОД$(2n+1)$ и $1201 \pm \frac{2n+1}{4}$ когда целое.

$2n+1$ всегда не чёт $\Rightarrow$ НОД всегда будет финаковым.

имеем право к числу 1201 или плюс $2n+1$ или минус $2n+1$

$2n+1$ ~~то есть 1201~~ не может быть больше 1201.

Ответ: 600.

Лист 3 из

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 4 | 7 | 1 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная табица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа

№3

Воспользуемся методом шаров перегородок

выкладываем орехи в цепочку есть 1000 мест = n нужно вставить 2 перегородки ~~так~~ = k ⇒

$C^2_{1000} = \frac{1000!}{(1000-2)!\cdot 2!} = \frac{1000\cdot 999}{2} = 500\cdot 999$. Из этого нужно

Выбрать ~~сколько одинаковых~~ где нет одинаковых.

Считаем варианты:

У 2 разных людей может быть в 500 случаев, но нам нужно ~~так~~ умножит на 3 число всех сочетаний когда орехов поровну у 2 людей, Тем самым исключим повторы

$500\cdot 999 - 500\cdot 3 = 500\cdot 996$

нужно чтобы у Бори было больше всех орехов то есть

500 · 996 нужно разделить на 3 (~~количество повторов~~) =

Т.к нужно чтобы у Бори было больше всех орехов ⇒

⇒ ~~ВПБ~~ ВПБ; ПВБ; БПВ; ВВП ВБП; ПБВ 2 из 6 = $\frac{1}{3}$ ⇒

$\frac{500\cdot 996}{3} = 500\cdot 332 = 166000$.

Ответ: Орехи можно подлить 166000 способами.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	4	9	8	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	×	×	///	60

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

1) По условию -2 – это абсцисса (.) C

$\Rightarrow C(-2; -\frac{1}{2})$, т.к. (.)C $\in y = \frac{1}{x}$; $y_c = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

2) AC – $y = 2x + h$ (прямая)

подставим: $-\frac{1}{2} = -4 + h$; откуда $h = 4 - \frac{1}{2} = 3,5$

3) BC – $y = \frac{1}{2}x + p$ (прямая)

подставим: $-\frac{1}{2} = -1 + p$; откуда $p = 0,5$.

4) Координаты ~~h и p~~ A и B:

1. $\begin{cases} y = 2x + h = 2x + 3,5 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$ $\Rightarrow 2x + 3,5 = \frac{1}{2x}$

$2x^2 + 3,5x - 1 = 0 \cdot 2$ ($x \neq 0$ по условию $y = \frac{1}{x}$)

$4x^2 + 7x - 2 = 0$

~~1) = 49 + 16 =~~ $D = 49 + 32 = 81$

$x_A = \frac{-7 \pm 9}{8} = -2; \frac{1}{4}$

Однако по условию A и B отличны от C

$\Rightarrow x_A = \frac{1}{4}$; $y_A = \frac{1}{2} + 3,5 = 4$, поэтому $A(\frac{1}{4}; 4)$

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

2. $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + p = \frac{1}{2}x + 0{,}5 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$ $\Rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{x}$

$x^2 - 2 + x = 0$; $x^2 + x - 2 = 0$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 \cdot x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow x_B = -2; 1$

Однако по условию A и B не совпадают с C.

$\Rightarrow x_B = 1$

$y_B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ $\Rightarrow B(1; 1)$

5) Центр описанной окружности равноудалён от вершин $\triangle ABC \Rightarrow OA = OB = OC$, где O – это центр опр. описанной $\triangle ABC$. ~~$O(\alpha, \beta)$~~ $O(x; y)$

Тогда $OA^2 = OB^2 = OC^2$

$OA^2 = (x - \frac{1}{4})^2 + (y - 4)^2$; $OB^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2$

$OC^2 = (x+2)^2 + (y + \frac{1}{2})^2$

6) $\begin{cases} (x - \frac{1}{4})^2 + (y - 4)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 \\ (x+2)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 \end{cases}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	4	9	8	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$\begin{cases} x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} + y^2 - 8y + 16 = \\ = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2x + 1 \\ x^2 + 4x + 4 + y^2 + y + \frac{1}{4} = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{16} - 8y + 16 = -2x - 2y + 2 \\ 4x + 4 + y + \frac{1}{4} = -2x - 2y + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x + \frac{1}{16} + 16 - 2 = 6y \\ 6x + 4 + \frac{1}{4} - 2 = -3y \mid \cdot 2 \end{cases} +$$

$\frac{3}{2}x + \frac{1}{16} + 16 - 2 - 12x - 8 + \frac{1}{2} + 4 = 0$

$\frac{3}{2}x + \frac{1}{16} + 16 - 2 + 12x + 8 + \frac{1}{2} - 4 = 0$

$-\frac{21x}{2} + 18 + \frac{1}{2} = 0$, $-21x + 36 + 1 = 0$

$x = -1\frac{3}{8} = -\frac{297}{27 \cdot 8} = -\frac{11}{8}$

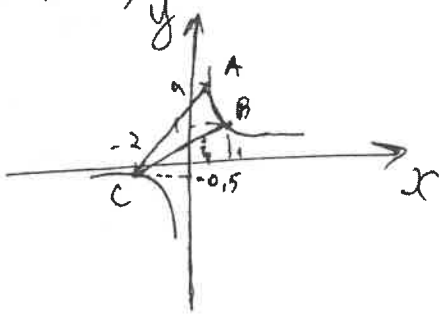
$x = \frac{35}{21} = \frac{5}{3}$

$-\frac{21x}{2} + 12 - \frac{1}{2} - 2 = 0$, $-\frac{21x}{2} = -\frac{19}{2}$

$21x = 19$

Отсюда, $x = -1\frac{3}{8}$; $y = 2$

Ответ: $(-1\frac{3}{8}; 2)$



Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 9 | 8 | 1 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

$x_n = n^2 + 300$, где $n \in \mathbb{N}$

$y_n = НОД(x_n; x_{n+1})$; Найти $y_n = max$.

1) $x_{n+1} = (n+1)^2 + 300 = n^2 + 2n + 301$

$\Rightarrow НОД(x_n; x_{n+1}) = (n^2 + 300; n^2 + 2n + 301)$.

2) По свойствам алгоритма Евклида следует и свойству НОД-а (можем вычесть).

$(2n+1)$ - нечет., $\Rightarrow$ НОД - нечет.

Тогда $(4n^2 + 1200; 2n+1) = (-2n + 1200; 2n+1)$.

Домножим на 4, т.к. 4 : 2.

Также $(-2n + 1200; 2n+1) = (1201; 2n+1)$.

$НОД(x_n; x_{n+1}) = (1201; 2n+1)$

3) 1201 - простое число, а НОД простого числа равен 1 или самому простому числу.

$\Rightarrow y_n = max = 1201$ (достигается при $n = 600 \in \mathbb{N}$).

Ответ: 1201

Вариант № 4 | М | А | Д | 0 | 0 | 1 | 4 | 9 | 8 | 1 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

1) Воспользуемся методом перегородок: Пусть между орехами 2 перегородки.

$C_{1000}^{2} = 999 \cdot 500$ – способов, которыми можно выбрать перегородки.

2) Далее исключим случаи, в которых множества орехов равны:

Пусть в ~~2~~ двух x кучах по x орехов, а в третьей y куче орехов: $2x+y=1001$.

$\Rightarrow x \in [1; 500]$, в то же время $y \neq x$, т.к. $1001 \not\vdots 3$.

Получили $500 \cdot 3$ случаев с равными множествами орехов, т.к. у орехов может быть в любом множестве!

3) Имеем всего $500 \cdot 999 - 500 \cdot 3$ случаев, т.к. случаи с равными множествами исключаются.

Теперь их нужно разделить на 3 (т.к. из всех случаев удовлетворяют те, в которых у Бори больше всех; из 6 случаев подходят 2). $\frac{500 \cdot 999 - 500 \cdot 3}{3} = 500 \cdot 332$ способов.

Ответ: 166000 способов.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	4	9	8	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	X	X	111	60

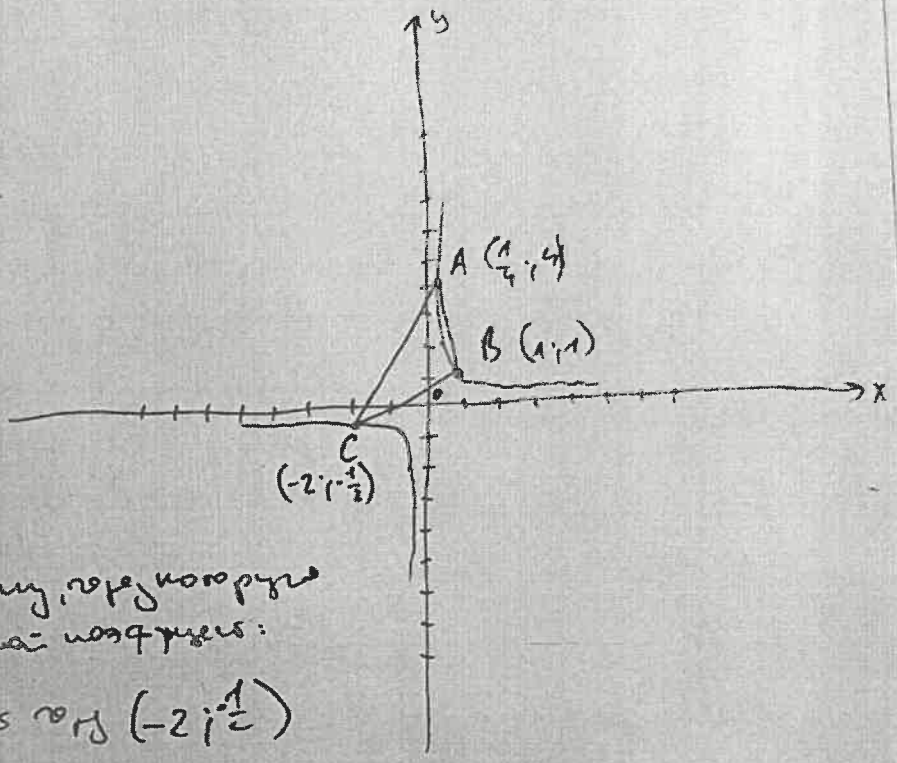
Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Дано: $y=\frac{1}{x}$

Построим график:

$y=\frac{1}{x}$

x	1	-1	2	-2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
y	1	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2	-2	



1.) Найдем уравнение прямых, зная одну точку, через которую они проходят + угловой коэффициент:

1.) $y=kx+b$ $k=2$ проходит через $(-2;-\frac{1}{2})$

$y=2x+3\frac{1}{2}$

2.) $y=kx+b$ $k=\frac{1}{2}$ проходит через $(-2;-\frac{1}{2})$

$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

2.) Т.к. сказано, что эти прямые пересекаются параболой → найдем их:

1.) $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

$x^2+x-2=0$

$D=9$

$x_1=-2$ - это нашли абсциссу т. C

$x_2=1$ - получили в $\frac{1}{x}$, чтобы найти y → (1;1) - координаты т. B.

2.) $\frac{1}{x}=2x+3\frac{1}{2}$ $4x^2+7x-2=0$ $D=81$ $x_1=-2$ - абсцисса т. C

$x_2=\frac{1}{4}$ → $y=4$ (подст. в $\frac{1}{x}$)

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 9 | 8 | 7 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа

9.) Итак, у нас есть:

$C\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$

$A\left(\frac{1}{4};4\right)$

$B(1;1)$

Центр описанной окружности есть точка пересечения серединных перпендикуляров, а следовательно она равноудалена от всех вершин, тут центр описанной около $\triangle ABC$ окружности – $Q \Rightarrow AQ = BQ = CQ$, чтобы найти координаты точки нужно воспользоваться теоремой Пифагора $\Rightarrow AQ^2 = BQ^2 = CQ^2$, где т. Q с координатами $(x;y)$

Составим несколько этих уравнений:

$AQ^2 = \left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + (y-4)^2$

$BQ^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2$

$CQ^2 = (x+2)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2$

Составим систему:

$$\begin{cases} \left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + (y-4)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 \\ (x+2)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 \end{cases}$$

видно, что x^2 и y^2 с обеих сторон имеют один знак, значит они сократятся $\Rightarrow$ раскроем скобки без них

$$\begin{cases} 4x + 4 + y + \frac{1}{4} = -2x + 1 - 2y + 1 \\ \dots = -2x + 1 - 2y + 1 \end{cases}$$

Получим $x = -1\frac{3}{8}$ $y = 2$

$\downarrow$

$-\frac{x}{2} + \frac{1}{16} - 2y + 16$

Ответ: Координаты $Q\left(-1\frac{3}{8};2\right)$

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 9 | 8 | 7 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 2

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Пусть есть 2 числа a и b:

если $a \equiv 0 \pmod m$ и $b \equiv 0 \pmod m \Rightarrow$

$|a-b| \equiv 0 \bmod (m) \Rightarrow$ НОД $(a;b)$ будет равен $(a-b;b)$ (нулевого не нарушая общности) $\Rightarrow$

$x_n = n^2 + 300 \Rightarrow x_{n+1} = (n+1)^2 + 300 = n^2 + 2n + 301$, нам нужно найти НОД $(n^2+300; n^2+2n+301)$, но, чтобы упростить это выражение воспользуемся свойством, описанным выше:

НОД $(n^2+300; n^2+2n+301)$ = НОД $(n^2+300; 2n+1) \Rightarrow$ делимое n^2+300 чет 4, т.к. $2n+1$ нечет $\Rightarrow$ НОД сам будет нечетным

$= \text{НОД}(4n^2+1200; 2n+1) \overset{\text{НОД}}{=} (-2n+1200; 2n+1) =$

$=$ НОД $(1201; 2n+1) \Rightarrow$ Мы не знаем, что больше $2n+1$ или 1201, но НОД (наибольший для двух этих чисел число, на которое они делятся, а всего на него они делятся, однако 1201 - не делится ни на что, кроме себя и 1 $\Rightarrow$ НОД = 1201 $\Rightarrow$ ~~подставим в x_n~~

~~чтобы выполнялось~~ $\Rightarrow$

~~$n^2 = 1201 - 300 =$~~

~~$x_n = n^2 + 300 = 1201$~~ $\Rightarrow n = 6$

Ответ: $y_6 = 1201$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 9 | 8 | 7 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 3

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано в этой стороне листа в рамке справа

1.) Т.к. у нас должно получиться 3 кучки => эту задачу можно решить перебором: (1 х было 2, т.к. 3 кучки), а было орехов 1001 (узнаем мы сколько их выбрать C_{1000}^{2} способами

$$= \frac{1000!}{998! \cdot 2!} = \frac{999 \cdot 1000}{2} = 999 \cdot 500 \text{ способов}$$

2.) Можем заметить так, что числа в некоторых кучках повторяются, в таком случае нужно посчитать сколько таких случаев будет:

Пусть в 2 одних будет a орехов, а в одной b (большей) тогда $2a+b=1001$

$\Rightarrow a \in [1;500]$, т.к. у нас есть ещё и b

$a=b \Rightarrow$ во всех 3 кучках равное число орехов, но $1001 \not\equiv 0 \bmod 3 \Rightarrow$ случаев $500 \cdot 3$, где b орехов может быть в разных кучках $\Rightarrow$ Т.к. подходящих случаев будет $500 \cdot 999 - 500 \cdot 3 \Rightarrow$ нужно разделить на 3 (т.к. дано не два набора ~~одинаковых~~ одинаковых орехов в кучках нам подходят) $\Rightarrow$ Итого: $\frac{500 \cdot 999 - 500 \cdot 3}{3}$

$= 3 \cdot 500 (1 \cdot 333 - 1) = 1500 \cdot (332) = 166000$

Ответ: 166000 способов.

Лист 5 из

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

M	A	0	0	0	1	5	1	9	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	12	6	2	11	60

Данные заполняются жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

$y(-2) = \frac{1}{-2}, -\frac{1}{2} \Rightarrow C\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$

$-\frac{1}{2} = 2 \cdot (-2) + b$

$b = 3{,}5$

$y_1 = 2x + 3{,}5$

$-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(-2) + b$

$b = \frac{1}{2}$

$y_2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

$k_1 \cdot k_2 = -1$ - условие перпендикулярности

$\frac{1}{x} = 2x + 3{,}5 \quad | \cdot x$

ОДЗ: $x \neq 0$

$1 = 2x^2 + 3{,}5x$

$x_1 = -2 \quad x_2 = \frac{1}{4}$

$y = -\frac{1}{2} \quad y = 4$

$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad | \cdot 2x$

ОДЗ: $x \neq 0$

$2 = x^2 + x$

$x_1 = -2 \quad x_2 = 1$

$y = -\frac{1}{2} \quad y = 1$

$A\left(\frac{1}{4}; 4\right)$

$B(1; 1)$

$C\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$

Середина AC: $\left(-\frac{7}{8}; \frac{7}{4}\right)$

Середина BC: $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$

$-\frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{8}\right) + \frac{7}{4} = -2\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}$

$-\frac{1}{2}x - \frac{7}{16} + \frac{7}{4} = -2x - 1 + \frac{1}{4}$

$-\frac{1}{2}x + \frac{21}{16} = -2x - \frac{3}{4}$

$-\frac{1}{2}x + 2x = -\frac{21}{16} - \frac{12}{16}$

$\frac{3}{2}x = -\frac{33}{16}$

$x = -\frac{11}{8} \rightarrow y = 2$

Ответ: $\left(-\frac{11}{8}; 2\right)$

Лист 1 из 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 1 | 9 | 7 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица для служебных записей (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Правильное оформление работы см. в инструкции

№3.

Введем ус. обозначения:

Боря = Б

Вася = В

Петя = П

Оценка кол-ва денег у Б: у Бори не меньше, чем 998, т.к. если у него хотя бы 999, то у Васи и Пети получится равное кол-во орехов, а это противоречит условию.

Также заметим, что у Бори не меньше, чем 335, потому что если у Бори 334 или меньше, то в сумме не наберется 1001.

$$335 \leq Б \leq 998$$

Если Б = 998, то В = 1, П = 2 или В = 2, П = 1 – 2 случая

Если Б = 997, то возможны варианты: В = 1, П = 3 или П = 1, В = 3 — 2 случая

Если Б = 996, то П = 1, В = 4 или П = 2, В = 3 или П = 3, В = 2 или П = 4, В = 1 – 4 случая

Если Б = 995, то П = 1, В = 5 или П = 2, В = 4 или П = 4, В = 2 или П = 5, В = 1 – 4 случая

Видно, что кол-во вариантов: 2, 2, 4, 4...

Посчитаем сумму 2+2+4+4+...1

Ясно у нас 998-335+1 = 664 варианта кол-ва орехов у Бори.

Олимпиада школьников «ЕЛЬЧОПОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	5	1	9	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3- продолжение

$5, 2+4+\ldots+664+2+4+\ldots+664 = 2(1+2+\ldots+332)+2(1+2+\ldots+332) =$

$= 2\cdot\frac{1+332}{2}\cdot 332 + 2\cdot\frac{1+332}{2}\cdot 332 = 333\cdot 332\ 2 = 221112$

Ответ: 221112 способов.

№2.

Рассмотрим $НОД(X_n, X_{n+1})$:

$X_n = n^2+300$

$X_{n+1} = (n+1)^2+300 = n^2+2n+301$

$НОД(n^2+300,\ n^2+2n+301) = НОД(n^2+300,\ 2n+1) =$

$= НОД(n^2+300,\ (2n+1)^2) = НОД(4(n^2+300),\ 4n^2+4n+1) =$

$= НОД(4n^2+1200,\ 4n^2+4n+1) = НОД(1199-4n,\ 2n+1) =$

$= НОД(1199-4n,\ 4n+2) = НОД(1201,\ 4n+2) = 1201$ (max)

Рассмотрим его делители, чтобы проверить возможные появления новых делителей в результате переходов. Заметим, что 1201 не делится ни на какие числа до 35 (проверяли простоту числа до его корня). 1201 - простое число, значит новых делителей в результате переходов у нас не появилось.

$НОД(1201,\ 4n+2)$, при $n=600$, $НОД(1201,\ 2402) = 1201$

Проверим $n=600$: $X_n = 600^2+300 = 360300$

$X_{n+1} = 601^2+300 = 361501$

$\frac{360300}{1201} = 300$; $\frac{361501}{1201} = 301 \Rightarrow$ Ответ: 1201.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 1 | 8 | 7 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

(листы шифра заполняются жюри) (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Бумажный носитель с шифром сдается вместе с работой

№5.

$$\frac{3^m+2}{3^n+2} = K, \quad K \in Z$$

$3^m + 2 = K \cdot 3^n + 2K$

$3^m - K \cdot 3^n = 2K - 2$

$(3^m - K \cdot 3^n)$ - делится на 3^n

т.е $2K - 2 \equiv 0 \mod 3^{n^2}$

$2K \equiv 2 \mod 3^{n^2}$

$K \equiv 1 \mod 3^{n^2}$

$K = 1 + t \cdot 3^{n^2}$, $K > 0$ и $t \geq 0$

$3^m + 2 = (1 + t \cdot 3^{n^2}) \cdot (3^n + 2)$

$3^m = 3^n + 2 + t \cdot 3^{n^2+n} + 2 \cdot t \cdot 3^{n^2} - 2$

Т.к. $t \geq 1$, видно, что при $m \leq n^2$, это не выполнено.

Получается, что выполняется только при $m > n^2$

Доказано.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

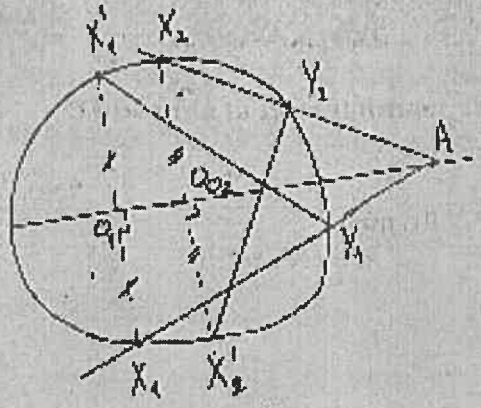
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ): М А 0 0 0 1 5 1 9 7 2 5

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Перед началом работы впишите в бланк свои данные.

№ 4



Из соображений симметрии мы можем убедиться, что как бы мы не построили секущую, точка пересечения будет единственная. Расстояние между точками X_1X_1' и X_2X_2' будет увеличиваться или уменьшаться при вводе секущей, однако $X_1'Y_1 \cap X_2'Y_2$ будет оставаться единственной и не зависит от ввода секущей.

где доказ?

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	8	1	2	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	X	20	20	0	//	60

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Шифровается только та часть работы, которая будет проверяться жюри

№ 1

$f(x) = x^2 - 4x - 1$

$D = 16 + 4 = 20$

$x_1, x_2 = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$

$g(x) = x^2 - 5x - 1$

$D = 25 + 4 = 29$

$x_3, x_4 = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}$

$f\left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right) = \left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right) - 1 = \frac{25+10\sqrt{29}+29}{4} - 10 - 2\sqrt{29} - 1 = \frac{54+10\sqrt{29}-44-4\sqrt{29}}{4} = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$

$f\left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right) = \left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right) - 1 = \frac{25-10\sqrt{29}+29}{4} - 10 + 2\sqrt{29} - 1 = \frac{5-\sqrt{29}}{2}$

$g(2-\sqrt{5}) = (2-\sqrt{5})^2 - 5(2-\sqrt{5}) - 1 = 4 - 4\sqrt{5} + 5 - 10 + 5\sqrt{5} - 1 = -2 + \sqrt{5} = -(2-\sqrt{5})$

$g(2+\sqrt{5}) = (2+\sqrt{5})^2 - 5(2+\sqrt{5}) - 1 = 4 + 4\sqrt{5} + 5 - 10 - 5\sqrt{5} - 1 = -2 - \sqrt{5} = -(2+\sqrt{5})$

1) $x_1 = 2 - \sqrt{5}$, $x_2 = 2 + \sqrt{5}$, $x_3 = \frac{5-\sqrt{29}}{2}$, $x_4 = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$ $\Rightarrow$ $f(x_4) = x_4$, $f(x_3) = x_3$, $g(x_1) = -x_1$, $g(x_2) = -x_2$

$(g(x_1))^3 \cdot f(x_3) + (g(x_2))^3 \cdot f(x_4) = -x_1^3 \cdot x_3 - (-x_2^3) \cdot x_4 = -\frac{(2-\sqrt{5})^3(5-\sqrt{29}) + (2+\sqrt{5})^3(5+\sqrt{29})}{2} =$

$= -\frac{(38-17\sqrt{5})(5-\sqrt{29}) + (38+17\sqrt{5})(5+\sqrt{29})}{2} = -\frac{38\cdot 5 - 38\sqrt{29} - 17\cdot 5\sqrt{5} + 17\sqrt{145} + 38\cdot 5 + 38\sqrt{29} + 17\cdot 5\sqrt{5} + 17\sqrt{145}}{2} =$

$= -(38\cdot 5 + 17\sqrt{5}\cdot\sqrt{29}) = -190 \mp 17\sqrt{145}$

2) $x_1 = 2 - \sqrt{5}$, $x_3 = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$, $x_2 = 2 + \sqrt{5}$, $x_4 = \frac{5-\sqrt{29}}{2}$

$(g(x_1))^3 \cdot f(x_3) + (g(x_2))^3 \cdot f(x_4) = -x_1^3 \cdot x_3 - x_2^3 \cdot x_4 = -\frac{(2-\sqrt{5})^3(5+\sqrt{29}) + (2+\sqrt{5})^3(5-\sqrt{29})}{2} =$

$= -\frac{(38-17\sqrt{5})(5+\sqrt{29}) + (38+17\sqrt{5})(5-\sqrt{29})}{2} = -\frac{38\cdot 5 - 17\sqrt{5}\cdot\sqrt{29} - 17\cdot 5\sqrt{5} + 17\sqrt{145} + 38\cdot 5 - 17\cdot 5\sqrt{5} - 38\sqrt{29} + 17\sqrt{145}}{2}$

$= -(38\cdot 5 - 17\sqrt{5}\cdot\sqrt{29}) = -190 + 17\sqrt{145}$

3) $x_1 = 2 + \sqrt{5}$, $x_3 = \frac{5-\sqrt{29}}{2}$, $x_2 = 2 - \sqrt{5}$, $x_4 = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$

$(g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 \cdot f(x_4) = -x_1^3 \cdot x_3 - x_2^3 \cdot x_4 = -\frac{(2+\sqrt{5})^3(5-\sqrt{29}) + (2-\sqrt{5})^3(5+\sqrt{29})}{2} =$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	8	1	2	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

	1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Шифр вносится только по окончании работы, после сдачи в архив скрыва

Продолжение №1

$$= -\frac{(38+17\sqrt{5})^{\frac{1}{2}}(5-\sqrt{29})+(38-17\sqrt{5})^{\frac{1}{2}}(5+\sqrt{29})}{2} =$$

$$= -\frac{38\cdot 5+17\cdot 5\cdot\sqrt{5}-38\sqrt{29}-17\sqrt{5}\sqrt{29}+5\cdot 38-17\cdot 5\sqrt{5}+38\sqrt{29}-17\sqrt{5}\cdot\sqrt{29}}{2} =$$

$$= -(38\cdot 5-17\sqrt{5}\cdot\sqrt{29}) = -190+17\sqrt{145}$$

4) $x_1 = 2+\sqrt{5}$ $x_3 = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$

$x_2 = 2-\sqrt{5}$ $x_4 = \frac{5-\sqrt{29}}{2}$

$$(g(x_1))^3 f(x_3)+(g(x_2))^3\cdot f(x_4) = -x_1^3\cdot x_3 - x_2^3\cdot x_4 = -\frac{(2+\sqrt{5})^3(5+\sqrt{29})+(2-\sqrt{5})^3(5-\sqrt{29})}{2} =$$

$= -180-17\sqrt{145}$ (Аналогично (1))

Ответ: $-180-17\sqrt{145}$; $-190+17\sqrt{145}$

№ 4

I - точка пересечения биссектрис треугольника KLM ⇒

$\angle KLI = \angle ILM$

Пусть $\angle KLI = \alpha$, тогда

$\angle KLM = 2\alpha$

$\angle KPM = \angle KLM = 2\alpha$ (опираются на одну хорду)

QIPM - вписанный четырёхугольник ⇒

$\angle IQM + \angle IPM = 180 \Rightarrow \angle IQM = 180-2\alpha$

Т.к. сумма углов треугольника равна 180° ⇒

в $\triangle LQM$ $\angle LMQ = 180-(180-2\alpha+\alpha) = \alpha \Rightarrow$

$\angle LMQ = \angle QLM \Rightarrow \triangle LQM$ - р/б $\Rightarrow LQ = QM$ ч.т.д.

№ 3

Рассмотрим случай когда два числа равны

$a_1 = a_2$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 1 | 2 | 9 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа и рядом справа

Продолжение № 3

a_1	a_2	a_3	a_4	
1	1	1	1002	} всего 501
1	1	2	1001	
1	1	3	1000	
		...		
1	1	501	502	

a_1	a_2	a_3	a_4	
2	2	1	1000	} всего 500
2	2	2	999	
2	2	3	998	
		...		
2	2	500	501	

a_1	a_2	a_3	a_4	
3	3	1	998	} всего 499
3	3	2	997	
3	3	3	996	
		...		
3	3	499	500	

и так далее и последний случай

a_1	a_2	a_3	a_4	
501	501	1	2	- всего 1 =>

$501 + 500 + 499 + \ldots + 1 = \frac{501+1}{2} \cdot 501 =$

$= 251 \cdot 501 = 125751$ (в наборе)

Случай когда при делении одинаковых входит в рассмотренные случаи, а ~~остаток~~ частное равны быть не могут ($\frac{1005}{4} = 251\frac{1}{4}$)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	8	1	2	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Работа пишется только на одной стороне листа и только синими чернилами

Продолжение №3

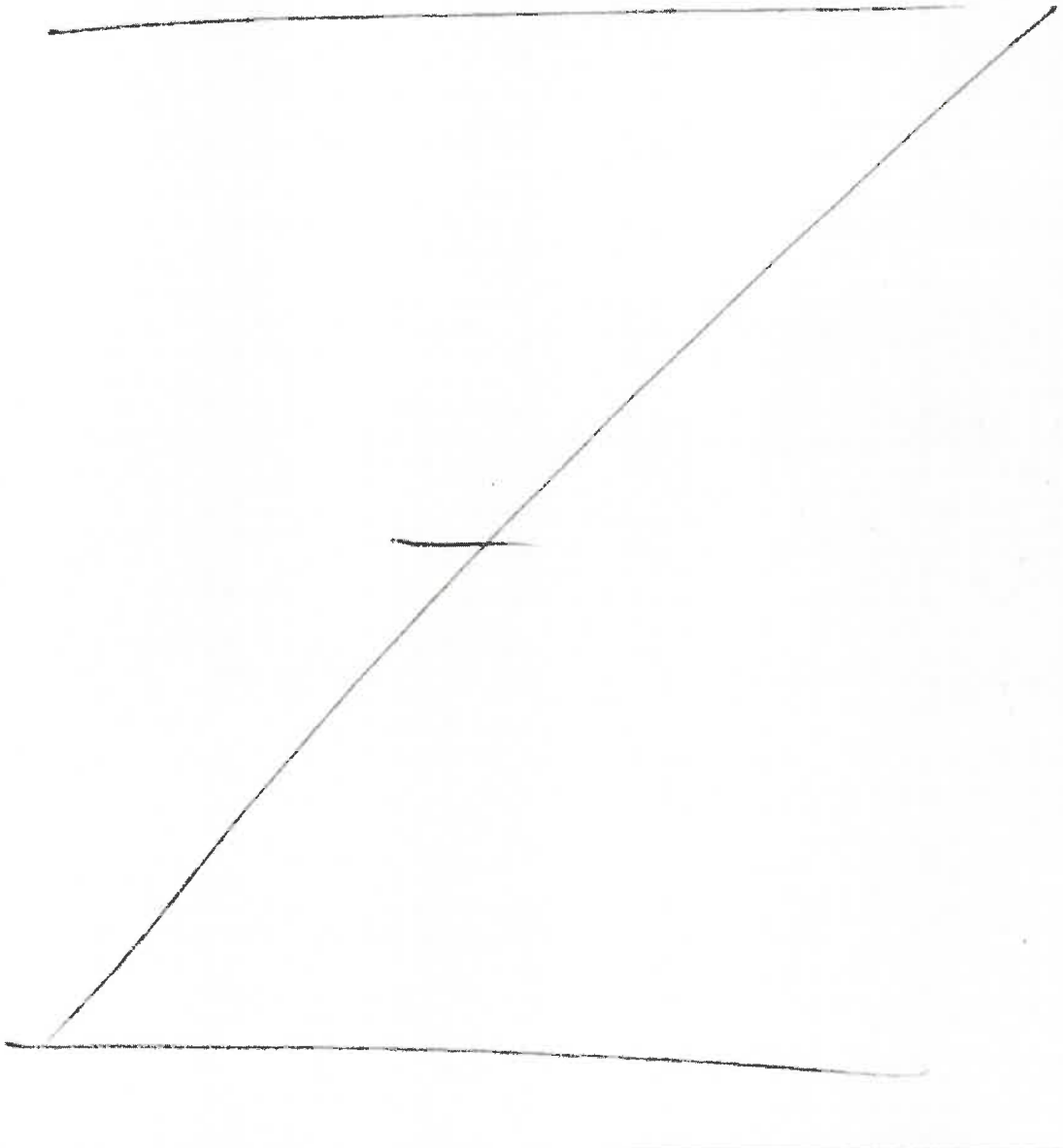
Ответ 125751

№5

$a^3 - b^3 = (abc - 1)^2$

т.к. $(abc-1)^2 \geq 0 \Rightarrow$

а $\geq$ в $\quad a^3 - b^3 \geq 0 \Rightarrow \quad a \geq b$



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	0	8	7	4	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Пронумеруйте листы, что написано с этой стороны листа в правом верхнем углу

Затов С.В. – математика – 1

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	X	0	//	60

Данная таблица заполнятся жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

✓1

III. к т. C лежит на гиперболе $y=\frac{1}{x}$, где абсцисса т. $C=-2$.

Значит $x_c=-2$ и $y_c=-\frac{1}{2}$

Найдем ур-я прямых проходящих чз т. C:

1. $y+\frac{1}{2}=2(x+2)$

2. $y+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x+2)$

Найдем координаты точек A и B:

$y=\frac{1}{x}$, $y+\frac{1}{2}=2(x+2) \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{2}=2(x+2) \mid 2x \Rightarrow$

$4x^2+7x\cdot 2=0$

$D=49+4\cdot 4\cdot 2=9^2$

$\begin{cases} x_1=\frac{-7-9}{8} \\ x_2=\frac{-7+9}{8} \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=\frac{1}{4} \end{cases}$

Получаем $A=\frac{1}{4};4$

Ак-но $y=\frac{1}{x}$, $y+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x+2) \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x+2) \mid \cdot 2x$

x^2+x-2

$D=1-4(-2)=9^2$

$\begin{cases} x_1=\frac{-1-3}{2} \\ x_2=-\frac{1+3}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=1 \end{cases}$

Получаем: $B=1;1$

Найдем центр описанной окр-ти. Центр опис. окр-ти у тр-ка является т. пересечения серединных перпендикуляров. Найдем их.

Серед. перп. от $C=\left(\frac{\frac{1}{4}-2}{2};\frac{4-\frac{1}{2}}{2}\right)=\left(-\frac{7}{8};\frac{7}{4}\right)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	0	8	7	4	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке синим

Зотов С.В. — математика — 2

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

✓ 1 (продолжение)

т.к $\overline{AC}\left\{-\frac{9}{4};-2\right\}$, тогда сер. перп. к AC: $y-\frac{7}{4}=-\frac{1}{2}\left(x+\frac{7}{8}\right)$

сер. перп. к BA $=\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{2};\frac{1\cdot 4}{2}\right)=\left(\frac{5}{8};\frac{5}{2}\right)$

III. к $\overline{BA}=\left\{-\frac{3}{4};3\right\}\Rightarrow$ сер. перп. к BA: $y-\frac{5}{2}=-\frac{-\frac{3}{4}}{3}\left(x-\frac{5}{8}\right)$

Найдем т. Пересеч сер. перп:

$$\begin{cases} y-\frac{7}{4}=-\frac{1}{2}\left(x+\frac{7}{8}\right) \\ y-\frac{5}{2}=\frac{1}{4}\left(x-\frac{5}{8}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+\frac{21}{16} \\ y=\frac{1}{4}x+\frac{75}{32} \end{cases}$$

$$\frac{21}{16}-\frac{1}{2}x=\frac{5}{2}+\frac{1}{4}\left(x-\frac{5}{8}\right)$$

$$\frac{21}{16}-\frac{1}{2}x=\frac{75}{32}+\frac{1}{4}x$$

$$-24x=33$$

$$x=-\frac{11}{8}$$

$$y=2$$

Ответ: $\left(-\frac{11}{8};2\right)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	0	8	7	4	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Затов С.В. математика 3

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполнятся жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

✓2

$X_n = n^2 + 300$

$y_n = НОД(X_n, X_{n+1})$

y_n max - ?

Приведем пример: Пусть $n = 600 \Rightarrow НОД(X_n, X_{n+1}) =$

$= НОД(600^2 + 300; 600^2 + 2 \cdot 600 + 301) = НОД(360300; 1201) = 1201$

Проведем оценку:

$X_n = n^2 + 300$

$X_{n+1} = (n+1)^2 + 300 = n^2 + 2n + 301 \Rightarrow X_{n+1} - X_n = 2n + 1$

$y_n = НОД(X_n; X_{n+1}) = НОД(n^2 + 300; n^2 + 2n + 301) \xrightarrow{\text{св-во НОД}} НОД(n^2 + 300; 2n + 1)$

Пусть $t = y_n \Rightarrow t$ делит $2n+1$ и t делит $n^2 + 300$

По св-ву делимости: $2(n^2 + 300) - n(2n + 1)$ делится на t

Тогда 600 - n кратно t

Однако $2n + 1 + 2(600 - n)$ делится на t, отсюда следует, что t делит $1201 \Rightarrow t \leq 1201$, 1201 - простое число

Ответ: 1201

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	1	0	8	7	4	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

Затов С.В. – математика – 4

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

~~Обозначим кол-во орехов у Васи за В~~

Всего орехов – 1001

Найдем сначала кол-во всех способов поделить орехи:

$C^{3-1}_{1001-1} = C^2_{1000} = \frac{1000 \cdot 999}{2}$

Т.к во всех способах у кого-то могут быть одинаковое кол-во орехов, что противоречит условию задачи, учтем их.

$2a + b = 1001$, тогда любой $1 \le a \le 500$ в одном способе.

500 совпадений, т.к у нас три вар. совпадений:

кол-во ор. у Бори = кол-во ор. у Пети, кол-во ор. у Васи = кол-во ор. у Пети

У всех одинаковое кол-во орехов быть не может т.к 1001 не кратно 3.

Т.к у Бори должно быть больше всех орехов и кол-во способов разделить орехи между Белчатами, которые мы посчитали выше не учитывает симметрию. Пример: любая тройка уд. чисел (1 орех) считается 6 раз, но нам нужны только две из них (каждая третья тройка).

Всего способов: $\frac{500 \cdot 999 - 500 \cdot 3}{3} = 500 \cdot 332 = 166000$

$$\begin{array}{r} 332 \\ \times\ 500 \\ \hline 166\,000 \end{array}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

M	A	0	0	0	1	0	8	7	4	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ: Проверяется только то, что записано с этой стороны листа

в рамке справа

№ 5

$\frac{3^m+2}{3^n+2}$, $m>n$

$3^m+2 \vdots 3^n+2 \Rightarrow 3^m+2 = k(3^n+2)$

Если $m>n^2$, то

$3^m+2 > 3^{n^2}+2$

$k(3^n+2) > 3^{n^2}+2$ (1)

При любом n, есть такое k удовлетворяющее

равенство кор-ву (1) $\Rightarrow m>n^2$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

M	A	0	0	0	1	0	6	3	7	2	5

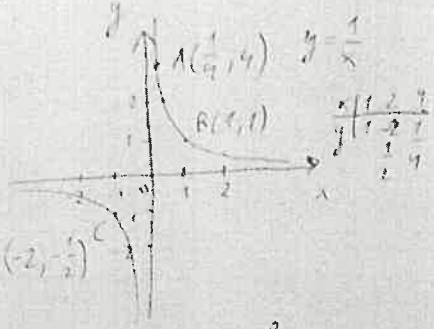
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамках справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	0	20	20	X	///	60

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1



Прямые $y_1 = 2x + b_1$, $y_2 = \frac{1}{2}x + b_2$ пересекаются с $y = \frac{1}{x}$ и проходят через т. $C \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} = 2(-2) + b_1 = \frac{1}{2}(-2) + b_2 \Rightarrow$ $b_1 = -\frac{1}{2} + 4 = 3{,}5 = \frac{7}{2}$, $b_2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} y_1 = 2x + \frac{7}{2} = \frac{1}{x} \quad | \cdot 2 \quad (1) \\ y_2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{x} \quad | \cdot 2 \quad (2) \end{cases}$$

(1) $4x + 7 = \frac{2}{x} \quad | \cdot x \neq 0$

$4x^2 + 7x - 2 = 0$

$D = 49 + 4 \cdot 4 \cdot 2 = 81$

$x = \frac{-7 \pm 9}{8} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -2 \leftarrow \text{коорд т. C} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A\left(\frac{1}{4}; 4\right)$

(2) $x + 1 = \frac{2}{x}$

$x^2 + x - 2 = 0$

$D = 1 + 4 \cdot 2 = 9$

$x = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \leftarrow \text{коорд т. C} \end{bmatrix}$

$B(1; 1)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	0	6	3	7	2	5

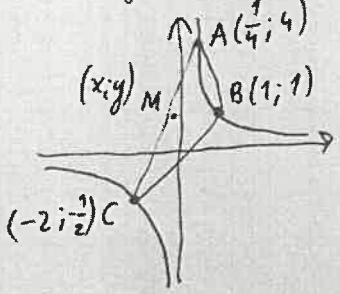
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1 (продолж.)



Пусть $M(x;y)$ – центр опис. окр $\triangle ABC$

тогда $AM = BM = CM = R$

Напишем в координатах:

$$\begin{cases} (x-\frac{1}{4})^2+(y-4)^2=R^2 \ (a) \\ (x+2)^2+(y+\frac{1}{2})^2=R^2 \ (б) \\ (x-1)^2+(y-1)^2=R^2 \ (в) \end{cases} \quad \begin{array}{l} x^2+y^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}-8y+16=R^2 \\ x^2+y^2+4x+4+y+\frac{1}{4}=R^2 \\ x^2+y^2-2x+1-2y+1=R^2 \end{array}$$

$(а)=(б)$: $-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}-8y+16=4x+4+y+\frac{1}{4}$

$\Rightarrow x+2y=\frac{21}{8}$

$(б)=(в)$: $4x+4+y+\frac{1}{4}=-2x+1-2y+1$

$\Rightarrow 2x+y=-\frac{3}{4}$

$$\begin{cases} x+2y=\frac{21}{8} \\ 2x+y=-\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow x+y=\frac{5}{8} \Rightarrow \begin{array}{l} x=-\frac{11}{8} \\ y=\frac{16}{8}=2 \end{array}$$

$M(-\frac{11}{8};2)$ ✓

Ответ: $(-\frac{11}{8};2)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	0	6	3	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Привяжется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$\sqrt{3}$

1001 орех: ..|-..-|-.. (a | b | c)

a, b, c – сколько достанется каждому бельчонку, причем $a > b$ и $a > c$

Всего способов распределить эти орехи (= кол-во способов расставить 2 перегородки на 1000 мест):

$$C_{1000}^{2} = \frac{1000!}{998!\,2!} = 999 \cdot 500$$

Посчитаны также случаи, когда $a = b$, $b = c$ или $a = c$.

Всего способов выбрать такую "равную" пару: $500 \cdot 3$

(1 ... 500) – возможные зн-я; 3 – кол-во способов переставить a, b, c пару

$a = b = c$ невозможно, т.к. $1001 \vdots 3$

Найдено количество способов выбрать различные a, b, c

Среди них нужно выбрать только те, которые $\begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases}$

Чтобы получить такие тройки, нужно разделить результат на 3

$$\frac{999 \cdot 500 - 3 \cdot 500}{3} = 500 \cdot 332 = 166000$$

Ответ: 166 000

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 6 | 3 | 7 | 2 | 5 |

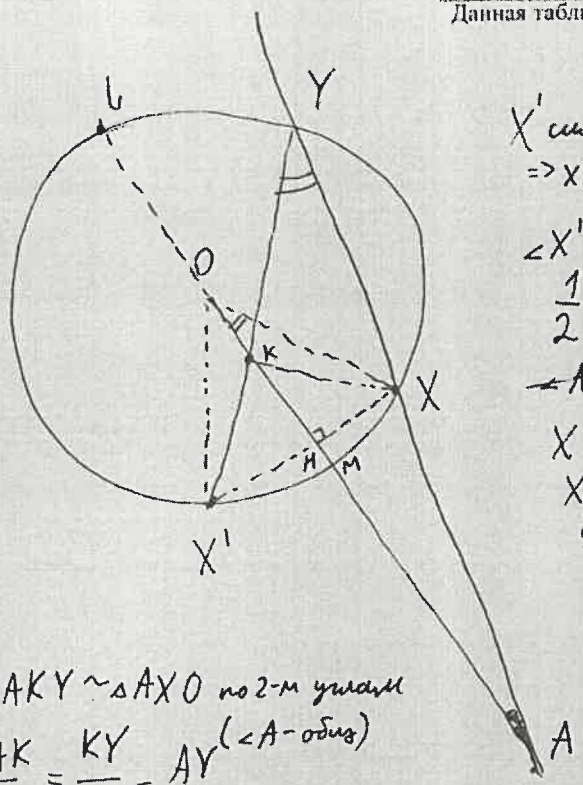
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяться только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4



X' симм. X отн-но AO
$\Rightarrow XH = HX'$, $XX' \perp AO$

$\angle X'YX$ – впис., опир. равен
$\frac{1}{2} \cup XX'$

$\angle AOX$ – центр. угол

$X'O = OX = R \Rightarrow \triangle XX'O$ – р/б$\triangle$
$X'H = HX \Rightarrow OH$ – мед, выс, биссект
$\Rightarrow \angle XOH = \angle XOM$
равен $\cup XM$, $\frac{1}{2} \cup XX'$
$\Rightarrow \angle XOM = \angle X'YX$

$\triangle AKY \sim \triangle AXO$ по 2-м углам

$$\frac{AK}{AX} = \frac{KY}{OX} = \frac{AY}{AO} \quad (\angle A \text{ – общ.})$$

$\Rightarrow AK \cdot AO = AY \cdot AX$

Если провести касательную AZ к этой окр-ти, то по т. о квадрате кас-ной: $AZ^2 = AX \cdot AY = AM \cdot AL$

$AM \cdot AL = const$, т.к. положение т. A не изменяется, меняется только положение X,

$\Rightarrow AX \cdot AY = const$ и $AK \cdot AO = const$ AO также не изм.

$\Rightarrow AK$ имеет постоянную длину. но т.к. $K \in AO \Rightarrow$ т. K определяется однозначно, независимо от выбора секущей.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	0	6	3	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2.

$x_n = n^2 + 300,\ n \in \mathbb{N}$

Нужно найти max. $НОД_n(x_n; x_{n+1}) = y_n$

$x_{n+1} = (n+1)^2 + 300 = x_n + 2n + 1$

x_n не может быть делителем x_{n+1}:

$(n^2+300)k = (n+1)^2 + 300 \Rightarrow k = \frac{(n+1)^2+300}{n^2+300} = 1 + \frac{2n+1}{n^2+300}$,

$k \in \mathbb{N} \Rightarrow 2n+1 \geq n^2+300$ $n^2 - 2n + 299 \leq 0$ $D < 0$ ∨

$\Rightarrow x_n$ – не делитель x_{n+1}, т.к. нет такого k, чтобы $x_n k = x_{n+1}$

Также $НОД_n$ не может быть кратен $\{2,3,5\}$

Т.к. 300 кратно 2,3,5 и тогда n также кр.д.б. кратно 2,3,5,

но $n = 2k$ $n^2 = 4k^2$

$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = 4k^2 + 4k + 1 \not\vdots 2$

аналогично, $(n+1)^2 \not\vdots 3$ и $\not\vdots 5$ если n соотв. равен $3k$ и $5k$

Для любых $n \in \mathbb{N}$ верно, что n^2 и $(n+1)^2$ не имеют общих делителей, отличных от 1

$\Rightarrow НОД_n(x_n; x_{n+1})$ не может превышать 300

(это утверждение верно и для смежных пар последовательности x_n (сдвиг на +300): 301, 304, 309, 316, 325, 336, 349, 364, 381, 400, 441

$\Rightarrow$ max $y_n = 1$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 9 | 8 | 0 | 2 | 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	×	×	111	60

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Перенесите данные из чистовика в листы ответов. Чистовик сдавать не нужно. Оформление листов ответов обязательно.

1.

$C(-2; -1/2)$ – координаты т. C так как центр на $y = 7/x$

прямая AC:

$y = 2x + d$

$-1/2 = -4 + d$

$d = 3,5$

прямая BC:

$y = \frac{1}{2}x + b$

$-1/2 = -1 + b$

$b = 0,5$.

координаты т. A:

$\begin{cases} y = 2x + 3,5 \\ y = 7/x \end{cases}$, $2x + 3,5 = 7/x$

$x_1 = -2$

$x_2 = 1/4$

$\frac{4x^2 + 7x - 2}{x} = 0$

$\frac{4(x+2)(x-1/4)}{x} = 0$

т.к. -2 – абсцисса т. C, то $x = 1/4$ – абсцисса т. A, тогда, подставив её, т. $A(1/4; 4)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 9 | 8 | 0 | 2 | 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Линия таблицы заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Координаты т. В.

$\begin{cases} y = 0{,}5x + 0{,}5 \\ y = 1/x \end{cases}$ — $\begin{cases} \frac{1}{x} = 0{,}5x + 0{,}5 \end{cases}$

так же, как и с т. А, у нас $\frac{x^2 + x - 1}{2x} = 0$

появляется общий $\frac{(x+2)(x-1)}{2x} = 0$

-2, но она уже $\in C \Rightarrow$ абсцисса т. $B = 1$,

тогда $B(1; 1)$.

O — центр. опис. окр. : $O(x; y)$, тогда

$OA = OB = OC$ — радиусы $\Rightarrow OA^2 = OB^2 = OC^2$

$OA^2 = (x - 9/4)^2 + (y - 4)^2$

$OB^2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2$

$OC^2 = (x + 2)^2 + (y + 1/2)^2$

$\begin{cases} (x - 9/4)^2 + (y - 4)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 \\ (x+2)^2 + (y + 1/2)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 \end{cases}$

$\begin{cases} 1{,}5x - 6y = -19\frac{1}{16} \\ 6x + 3y = -2\frac{1}{4} \end{cases}$

$\begin{cases} 3x - 12y = -\frac{225}{8} \\ 24x + 12y = -9 \end{cases}$; $\begin{cases} 27x = \frac{-225 - 72}{8} \\ 12y = -9 - 24x \end{cases}$; $\begin{cases} 27x = -\frac{297}{8} \\ 12y = -9 - 24x \end{cases}$

$\begin{cases} x = -\frac{11}{8} \\ y = 2 \end{cases}$

Ответ: $x = -\frac{11}{8}$, $y = 2$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 9 | 8 | 0 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано в этой области листа

2.

$x_n = n^2 + 300$

$y_n = НОД(x_n; x_{n+1})$

$y_n \Rightarrow max$

$x_{n+1} = (n+1)^2 + 300$

$НОД(x_n; x_{n+1}) = ((n^2+300); (n^2+2n+1+300))$

по св-ву алг. Евклида: $2n+1$ - нечёт, а значит НОД - нечёт $\Rightarrow (4n^2+1200; 2n+1) =$

$= (-2n+1200; 2n+1) = (1201; 2n+1)$ т.к. 1201 - простое число, то НОД = 1 или 1201

1201 достигается при $n = 600$

Ответ: 1201.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 9 | 8 | 0 | 2 | 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Линия таблицы заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяться только те задания, которые записаны в этом черновике

3.

У нас 1001 орех, нужно разделить так, чтобы у трёх белочек было разное количество орехов, при этом у них не должно быть с орехов. Разделим орехи на три кучки и разделим их двумя перегородками, тогда у нас $C_{1003}^{2} = 499500$ способов выбора перегородок.

Надо убрать случаи равенства, допустим, что у двух белочек x, а у одной y, тогда справедливо условие: $2x + y = 1001$, $x \in [1; 500]$, каждый x даёт автоматически 1 значение y, он не равен x, т.к. 1001 не кратно 3, и y не равен x. Итого: 500 способов с двумя равными кучками.

Лист 4 из 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 9 | 8 | 0 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Осталось разделить только на 5, т.к. из 6-ти возможных комбинаций удовлетворяет только две, в которых Ян наиб. (комбинации БЧЧ и БПВ) В итоге:

$$\frac{500 \cdot 999 - 500 \cdot 3}{3} = 500 \cdot 333 - 500 =$$

$$= 500 \cdot 332 = 166000$$

Ответ: 166000

Лист 5 из 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

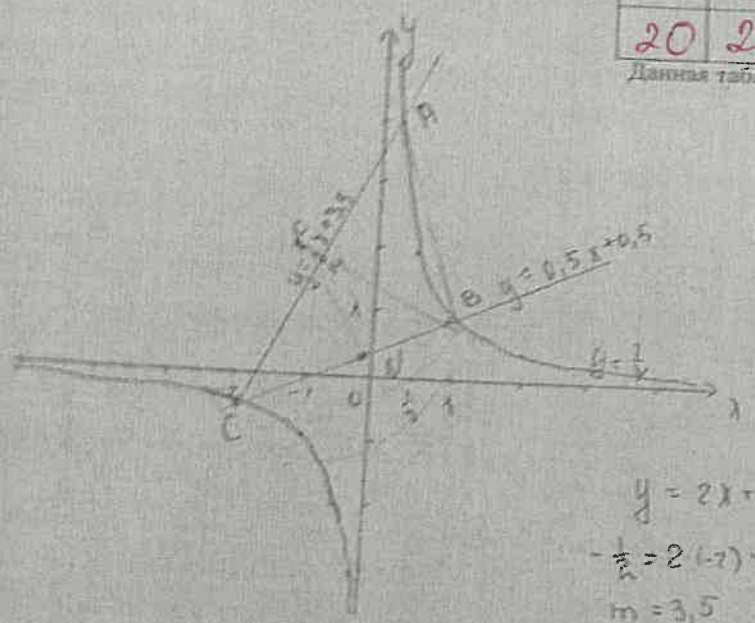
Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 2 | 6 | 3 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	X	X	///	60

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1



C(-2; y) ∈ $y=\frac{1}{x}$, т.е.

$y=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$ $C(-2,-\frac{1}{2})$

Через C - проведены 2 прямые с коэфф. 2 и $\frac{1}{2}$, т.е

$y=2x+m$ $\quad -\frac{1}{2}=2(-2)+m$ $\quad m=3,5$ $\quad y=2x+3,5$

$y=\frac{1}{2}x+m$ $\quad -\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(-2)+m$ $\quad m=\frac{1}{2}$ $\quad y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

Прямые пересекают двухсторонюю гиперболу, найдем эти точки пересеч.

$2x+3,5=\frac{1}{x} \Rightarrow x=\frac{1}{4}$ $y=4$ $A(\frac{1}{4};4)$

$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=\frac{1}{x} \Rightarrow x=1$ $y=1$ $B(1;1)$

$M \perp AC$ т.к. $k_1=2$ то $k_2=-\frac{1}{2}$ и M - середина $M(-\frac{7}{8};\frac{7}{4})$

подставим в $y=\frac{1}{2}x+m \Rightarrow m=\frac{21}{16}$ $AC=-\frac{1}{2}x+\frac{21}{16}$

$N \perp BC$ т.к. $k_1=\frac{1}{2}$ $k_2=-2 \Rightarrow m=\frac{21}{16}-\frac{3}{4}$ $BC=\frac{1}{2}x+\frac{21}{16}$ $BC=-2x-0,75$

приравняем обе части $-\frac{1}{2}x+\frac{21}{16}=-2x-0,75 \mid \cdot 4$

$x=-\frac{11}{8}$ $\quad y=-2(-\frac{11}{8})-\frac{1}{4}=2$

т.е центр описанной окружности $O(-\frac{11}{8};2)$

№2. $n \in N$ $\quad x_n=n^2+300$

$y_n=НОД(x_n, x_{n+1}) \Rightarrow НОД(n^2+300, (n+1)^2+300)$

$НОД(n^2+300,\ n^2+2n+1+300)$

по свойству НОД мы можем из большего вычесть меньшее, т.е.

$(n+1)^2+300-(n^2+300)$ $\quad НОД(n^2+300,\ 2n+1)=НОД(n^2+300\ (n+1)^2+$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 2 | 6 | 3 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа

Также мы можем большее число заменить на остаток от деления меньшего на меньшее

$$\frac{n^2+300}{2n+1} = \left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{4}\right)(2n+1) + \frac{1201}{4}$$

Получается, что задача сводится к нахождению такого n, при котором $\frac{n^2+300}{2n+1}$ ~~равняется~~ обнулит остаток, это получается при n=600

Остаток от деления зависит от четности, т.е. остаток может быть $1201 \pm \frac{2n+1}{4}$

$НОД(n^2+300, 2n+1) = НОД(2n+1, 1201 \pm \frac{2n+1}{4})$ 2n+1 заведомо нечет.

$НОД(2n+1; 1201 \pm \frac{2n+1}{4}) = НОД(2n+1; 1201 \pm 2n+1)$

~~НОД(...; 120~~ $1201 \pm 2n+1 \pm \underbrace{2n}_{\text{первое число}}+1 \Rightarrow 1201$, т.е. $НОД(2n+1; 1201)$

Из определения НОД следует что $НОД \leq 1201$

Ответ: $y_n = 1201$ при $n = 600$

N3 Всего 1001 орех

Сначала найдем кол-во исходов, когда у всех есть хотя бы 1 орех, методом шаров и перегородок.

$$C^2_{1000} = \frac{1000!}{998!\,2!} = \frac{1000 \cdot 999}{2}$$

Теперь нужно исключить одинаковое число орехов. У троих одинаковое кол-во не может быть, т.к. 1001 не делится нацело на 3. У двоих одинаковое кол-во орехов в 500 случаев, т.е. от (1;1) до (500;500), но одинаковое кол-во орехов может быть у разных людей, получаем $500 \cdot 3$ случаев. Вычтем

$$\frac{1000 \cdot 999}{2} - 500 \cdot 3 = 500 \cdot 999 - 500 \cdot 3$$

Теперь выберем, чтобы у Бори всегда было больше всех орехов всегда, т.е.

$$2 \cdot \frac{500 \cdot 999 - 500 \cdot 3}{6} = 2 \cdot \frac{500 \cdot 3 \cdot (333-1)}{6} = 250 \cdot 332 = 83000 \cdot 2 = 166000$$

Ответ: ~~83000~~ ~~166000~~ 166000

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	4	2	2	5	2	5

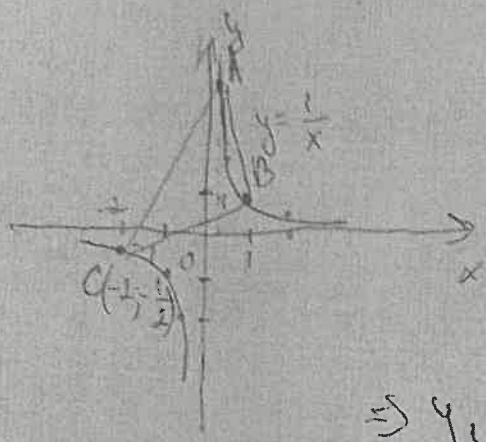
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
18	X	20	20	2	//	60

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1



1) $C\left(-2; \frac{1}{2}\right)$

прямые, проведенные через точку C имеют вид: $y_1 = k_1x + b_1$; $y_2 = k_2x + b_2$

$k_1 = 2$, $k_2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow y_1 = 2x + b_1$; $y_2 = \frac{1}{2}x + b_2$

2) т.к. точка C $\in y_1$ и y_2, то

а) $-\frac{1}{2} = -2 \cdot 2 + b_1$

$b_1 = 3{,}5$

$y_1 = 2x + 3{,}5$

б) $-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot (-2) + b_2$

$b_2 = 0{,}5$

$y_2 = \frac{1}{2}x + 0{,}5$

3) Найдем координаты точки пересечения этих прямых с графиком $y = \frac{1}{x}$

а) $2x + 3{,}5 = \frac{1}{x}$

$2x^2 + 3{,}5x - 1 = 0$

$4x^2 + 7x - 2 = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = -2 \text{ - точка C} \\ x = \frac{1}{4} \text{ - точка A} \Rightarrow \text{координаты} \end{array}\right.$

т. $A\left(\frac{1}{4}; 4\right)$

б) $\frac{1}{2}x + 0{,}5 = \frac{1}{x}$

$x^2 + x - 2 = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ - точка B}(1; 1) \\ x = -2 \text{ - точка C} \end{array}\right.$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 2 | 2 | 5 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Нумеруется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

№1 (продолжение)

4) Пусть $O(x;y)$ - центр описанной окружности $\triangle ABC$, R - радиус этой окружности

тогда $OA = OB = OC = R$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{4}-x\right)^2 + (4-y)^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2 \\ (1-x)^2 + (1-y)^2 = (-2-x)^2 + \left(-\frac{1}{2}-y\right)^2 \end{cases}$$

Решим эту систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{16} - \frac{1}{2}x + 16 - 8y = 1 - 2x + 1 - 2y \\ 1 - 2x + 1 - 2y = 4 + 4x + \frac{1}{4} + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1{,}5x - 6y = -14 - \frac{1}{16} \\ 2x - 3y = 2 + \frac{1}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} 1{,}5x - 4x + 4{,}5 = -14\frac{1}{16} \\ 3y = 2x - 2\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2{,}5x = 4{,}5 + 14\frac{1}{16} \\ y = \frac{2}{3}x - \frac{3}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{9}{5} + \frac{28}{5} + \frac{1}{140} \\ y = \frac{2}{3}\cdot\frac{297}{40} - \frac{9}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{297}{40} \\ y = \frac{504}{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7\frac{27}{40} \\ y = \frac{126}{30} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 7\frac{27}{40} \\ y = 4\frac{21}{5} \end{cases}$$

Ответ: $\left(7\frac{27}{40};\ 4{,}2\right)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 2 | 2 | 5 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 3

Кол-во орехов

№ белки / № варианта	Боря	Вова	Петя	кол-во орехов
1	998	2 или 1	1 или 2	2
2	997	3 или 1	1 или 3	2
3	996	2/3/4/1	3/2/1/4	4
4	995	2/3/5/1	3/2/1/5	4
5	994	3/4/6/1/2/5	4/3/1/5/5/2	6
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
499	500	...	...	498
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
664	335	332/334/...	...	...

→ с этого момента кол-во орехов у белки начинает убывать

⇒ всего вариантов $\frac{1}{3} \cdot 498000 = 166000$

Ответ: 166000

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 2 | 2 | 5 | 2 | 5 |

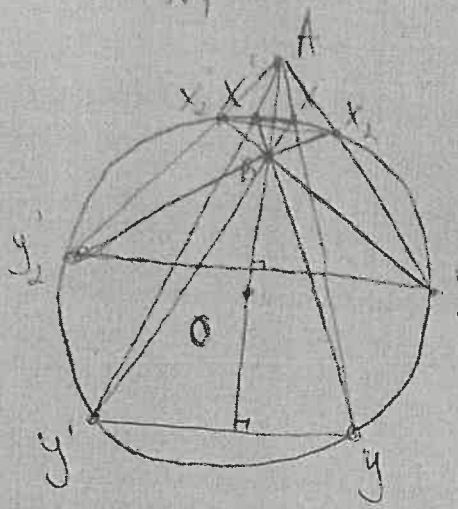
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Пронумеруйся только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

№4



1) Пусть AX и окружность в т. y'
AX' и окружность в т. y'_2
$AO \cap XY = B$

2) Докажем, что точка пересечения диагоналей всех трапеций, боковые стороны которых пересекаются в т. A, и вписанных в данную окружность, совпадает

3) Т.к. точки X и X' и y и y' симметричны относительно AO, то $y'_2X_2'X_2y_2$ и $y'X'Xy$ - равнобокие трапеции (т.к. вписаны в окружность)
По замечательному св-ву трапеции: точка пересечения диагоналей, точка пересеч боковых сторон лежат на одной прямой. Но наши трапеции еще и равнобокие $\Rightarrow$ все эти точки лежат на серединном перпендикуляре к основаниям трапеции $\Rightarrow$ точка пересечения диагоналей совпадает $\Rightarrow$ Ч.Т.Д. $\Rightarrow$ точка B не зависит от выбора секущей

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 2 | 2 | 5 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

$\frac{3^m+2}{3^n+2} = k,\ k \in \mathbb{Z};\ m > n;\ m, n \in \mathbb{N}$

Док-ть: $m > n^2$

$(3^m+2) \overset{3}{\equiv} 2$

$(3^n+2) \overset{3}{\equiv} 2$ $\Rightarrow \left(\frac{3^m+2}{3^n+2}\right) \overset{3}{\equiv} 1$

Пусть $k=4$ $\left(4 \overset{3}{\equiv} 1\right)$

$\frac{3^m+2}{3^n+2} = 4$

$3^m - 4 \cdot 3^n = 6 > 0$

$\Rightarrow 3^m > 4 \cdot 3^n = (3+1)3^n = 3^{n+1} + 3^n$

$m > n+1$ $\log_3 4 + n$

Таким образом, $m > n^2$

Пусть $k=7$ $\left(7 \overset{3}{\equiv} 1\right)$

$3^m - 7 \cdot 3^n = 12 > 0$

$\Rightarrow 3^m > 7 \cdot 3^n = (3+3+1)3^n$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	1	2	5	0	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
~~6~~	20	12	20	2	///	60

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Th Виета для $f(x)$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \ (1) \\ x_1 \cdot x_2 = -1 \ (2) \end{cases}$ из (2) $\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{x_2}$ подставим это в (1)

имеем $x_2 - \frac{1}{x_2} = 3 \mid \cdot x_2 \Rightarrow \underbrace{x_2^2 - 1 - 3x_2 = 0}_{m}$.

Th Виета для $g(x)$

$\begin{cases} x_3 + x_4 = 4 \ (3) \\ x_3 \cdot x_4 = -1 \ (4) \end{cases} \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{x_4} \to$ в (3) $\Rightarrow x_4 - \frac{1}{x_4} = 4 \mid \cdot x_4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{x_4^2 - 4x_4 - 1}_{n} = 0.$

$(g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 (f(x_4)) = \underbrace{(x_1^2 - 4x_1 - 1)}_{\beta'}{}^3 \underbrace{(x_3^2 - 3x_3 - 1)}_{\alpha'} +$

$+ \underbrace{(x_2^2 - 4x_2 - 1)}_{\beta}{}^3 \underbrace{(x_4^2 - 3x_4 - 1)}_{\alpha}$

тогда: $\alpha = \underbrace{x_4^2 - 4x_4 - 1}_{n} + x_4 = n + x_4 = x_4.$

$\beta = \underbrace{x_2^2 - 3x_2 - 1}_{f(x_2)=0} - x_2 = 0 - x_2 = -x_2 \Rightarrow \beta^3 = -x_2^3$

$\alpha' = \underbrace{x_3^2 - 4x_3 - 1}_{g(x_3)=0} + x_3 = x_3$

$\beta' = \underbrace{x_1^2 - 3x_1 - 1}_{f(x_1)=0} - x_1 = -x_1 \Rightarrow \beta'^3 = -x_1^3$

$\Rightarrow$ искомое ж-с: $-x_1^3 \cdot x_3 - x_2^3 \cdot x_4$

Ответ: $-x_1^3 x_3 - x_2^3 \cdot x_4 = (g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	1	2	5	0	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2.

$X_1 = 2$ $X_2 = 3$

$X_3 > 3 \cdot 2 - 2 = 5 \Rightarrow$ min сост $= 6 \Rightarrow$

$X_3 = 6$ $X_4 > 6 \cdot 2 - 3 = 9 \Rightarrow$ min сост $= 10$.

min: $2X_{i-1} - X_{i-2} + 1$ т.к $\frac{2X_{n-1} - X_{n-2}}{R} < X_n$

$\Rightarrow R + 1$ это мин. X_n.

тогда d между X_i и X_{i-1} и d' между X_{i-1} и X_{i-2} отлич. min на 1.

$(X_i - X_{i-1}) - (X_{i-1} - X_{i-2}) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow X_i - 2X_{i-1} + X_{i-2} = 1 \Rightarrow X_i = 1 + 2X_{i-1} - X_{i-2}$.

тогда X_1 $\overset{d}{\smile}$ X_2 $\overset{d+1}{\smile}$ $X_3 \ldots X_i \Rightarrow X_i = 1 + 2 + \ldots i =$

$= \frac{1+i}{2} \cdot i$; пусть в этом ряду есть хотя 1 простое число (кроме 2), тогда

$\frac{1+i}{2} \cdot i = P$ 1) $i =$ нечет $\Rightarrow \frac{1+\text{нечет}}{2} \cdot \text{нечет} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + \text{нечет} = \text{чет} \Rightarrow$ чет $: 2 \Rightarrow$ неуд.

2) $i =$ чет $\Rightarrow i : 2 \Rightarrow$ не простое $\Rightarrow$ неуд

тогда: $X_i = \frac{1+i}{2} \cdot i \Rightarrow$ ~~$X_{99} = \frac{1+99}{2} \cdot 99 = 4950$~~

min $= 2 \cdot X_{i-1} - X_{i-2} + 1 = 1 + 2 + \ldots i \Rightarrow X_{99} = \frac{1+99}{2} \cdot 99 =$

$= 4950$

Ответ: $4950 = X_{99}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	1	2	5	0	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3.

$a; b; c; d \in N$

б) 001) $a = b \neq c \neq d$.

$\Rightarrow 2a + c + d = 1003$

2) $a = b = c \neq d$

$3a + d = 1003$

3) $a = b = c = d$

$4a = 1003$

$:2 \quad \not:2$

Невозможно

4) $a = b \neq c = d$.

$2a + 2c = 1003 \Rightarrow 2(a+c) = 1003$

$:2 \quad \not:2$

Невозможно

Рассмотрим 2ой случай:

$3a + d = 1003$ подберем корни пусть $a = 1$

$d = 1000$

тогда $3a + d = 1000 \cdot 1 + 3 \cdot 1$ (Лин. Диофантовое ур-е)

$3a - 3 \cdot 1 = 1000 \cdot 1 - d$.

$3(a-1) = 1(1000-d)$

$:3 \quad \underbrace{\qquad}_{3R}$

$a-1 = R \Rightarrow a = R+1$ где $R \in N$ и $R = 0$.

$1000 - d = 3R \Rightarrow d = 1000 - 3R$

$R_{max} = 333$ т.к если $R = 334 \Rightarrow 1000 - 3 \cdot 334 = -2 \Rightarrow$ не N $d \Rightarrow$

$\Rightarrow$ не подх.

$R = 333 \Rightarrow a = 334 \Rightarrow 334 \cdot 3 + 1 = 1003$.

$d = 1$

$\Rightarrow$ имеем 334 случая. 334 ш от $a = 1$ до 334

1) случай: $a \neq b \neq c \neq$ $2a + c + d = 1003$.

Тогда представим 1003 как 2 единицы:

$\underbrace{1+1+\ldots+1}_{1003 \text{ ед.}}$, тогда чтобы разделить $2a$ / c и d.

надо между этими единицами поставить 2 перегородки пр: $\underbrace{1+1}_{2a} \mid \underbrace{1+1+\ldots+1}_{c} \mid \underbrace{1+1}_{d}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	2	5	0	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3 продолжение.

при чем 1ая перегородка отделяющая 1а стоит после чётного кол-ва единиц, это нужно чтоб их Σ поделить на 2 и получить $a = b$.

=> кол-во способов пост. такую перегородку:

500 т.е |_1м_|_2м_|_3м_| ... |_1000м_|_1001м_|_1002м_|

можно ставить на 2; 4 ... 1000 т.к если пост на 1002 то под $c \neq d$ ост только 1

=> нельзя выбрать c и d; если на 1000ом месте, то 1а = 1000 и $c \neq d$ $c=1$ или $d=2$ / $d=2$ или $c=1$ (варианты под c и d счит 2 раза)

всего 500 мест под 1а

если 1а на 1ом месте => из 1000 мест ост выбр 1 под перегородку №2 => 1000 вар.

если 1а на 4ом => из 998 нужно выбр 1 => 998 вар и т.д если а → 500 из 2 мест берем 1 и все случаи будут счит. по 2 раза т.к перегородки будут одинак. сначала чисто с потом d и будет один. число d, а потом c => все случаи деления на 2:

$\Sigma_{вих} = 1000 + \dots + 4 + 2 \Rightarrow S = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n =$ (a_{1000}, a_1)

$= \frac{2 \cdot 2 + 2(500-1)}{2} \cdot 500 = 250\,500 \Rightarrow \frac{250\,500}{2}$ (т.к а1 кратно 2ум) => 125250 вариантов и ⊕ перв 1ая случай => всего 125250 + 33 = 125 283

Ответ: у 125 283 наборов есть одинак. числа

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	2	5	0	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

$a^3+b^3=(abc+1)^2$

$(a+b)((a+b)^2-3ab)=(abc+1)^2$

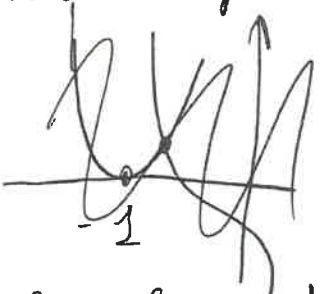
$(a;b)=1$ иначе л.ч : НОД, а п.ч $\not\vdots$ => => равенства быть не может.

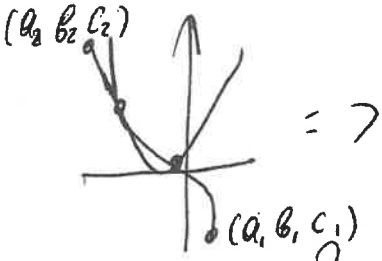
$a^3+b^3=(abc)^2+2abc+1$.

$abc=t \Rightarrow t^2+2t+1=0 \Rightarrow t=-1$.

a^3+b^3 по перемен. a ↗ и п.ч. ↗ => max ИЛ будет 2.

по теореме о пром. значениях.





=> из $(a;b)=1$

a и b = 1 и 2. тогда $c=1$ =>

имеем ответ: $(1;2;1)$ и $(2;1;1)$

т.к все числа $\in N$.

возможны 2 случая т.к при N малых и л.ч и п.ч не меняют монотонность => с увеличением переменной а будет увел и знач обеих частей => => max 2 корня

Ответ: $\begin{cases} a=1 \; b=2 \; c=1 \\ a=2 \; b=1 \; c=1. \end{cases}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	2	5	0	3	2	5

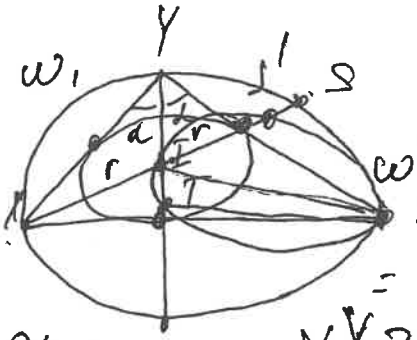
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4.



XI - луч вокруг $\triangle XYZ$ ω2. пад в точку $S \Rightarrow XY \overset{?}{=} SZ$

2 хорды на 1 окр $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Чт Четырехугольник вписан в окр. $\Rightarrow \angle XYZ = \angle XSZ$ (опир на 1 ∪) а именно на дугу стоящую хордой XZ.

тогда $\angle XYI = \angle \alpha = \angle IYZ$ т.к YI $\Rightarrow$ бис-са $\triangle XYZ$ ч.т.

$\angle XYZ = \angle ZYI = \angle IYZ$

тогда $\angle XSZ = 2\alpha$ т.к $= \angle XYZ$ по т $= 2\alpha$. т.к YI ∩ ~~окр = ∠ISZ =~~ ~~$= \angle XSZ$~~ ~~$\angle ZSX$~~ ~~$\angle ISX = \angle ZSX$~~ ~~$= SX = S'Z$~~

$\angle ISZ = \angle ZSX = 2\alpha \Rightarrow$ (дуги SZ и S'Z равны) тогда $\angle ITZ = 180° - ISZ$ (18) $= 180° - 2\alpha$ ~~$\angle TYZ = \angle TZY$~~

$\begin{cases} \angle TYZ = \alpha \\ \angle TZY = \alpha \end{cases} \Rightarrow \triangle TYZ$ — равнобедренный

$\Rightarrow TZ = YT$ что и требовалось доказать.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 9 | 6 | 4 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	12	6	2	111	60

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задание № 1.

$C(-2; y_0)$ принадлежит $y = \frac{1}{x}$

Существует 2 прямые $y = 2x + b$ и $y = \frac{1}{2}x + g$, которые проходят через ~~$y=\frac{1}{x}$~~ т. C и образуют точки A и B, но $y = \frac{1}{x}$

R_{abc} - ?

Решение

1) Найдем координаты т. C.

$y = \frac{10}{-2} = -0{,}5 \Rightarrow C(-2; -0{,}5)$

2) Составим ур-ия прямых и получим координаты точек A и B:

~~$\begin{cases} y = 2x+b \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow 2x+b = \frac{1}{x} \mid \cdot x \neq 0$~~

$\begin{cases} y = 2x+b \\ C(-2; -0{,}5) \end{cases} \Rightarrow -0{,}5 = -4 + b \Rightarrow b = 3{,}5$, значит ур-ие прямой выглядит так: $y = 2x + 3{,}5$

$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + g \\ C(-2; -0{,}5) \end{cases} \Rightarrow -0{,}5 = -1 + g$, отсюда $g = 0{,}5$, значит

$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

3. ~~A~~ получена путем пересечения $y = 2x + 3{,}5$ и $y = \frac{1}{x} \Rightarrow$

$\begin{cases} y = 2x + 3{,}5 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow 2x + 3{,}5 = \frac{1}{x} \mid \cdot 2x \neq 0$

$4x^2 + 7x - 2 = 0$

$D = 81$

$x_1 = \frac{-7+9}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}$ - координата т. A

$x_2 = \frac{-7-9}{8} = -2 \Rightarrow x_2 = -2$ - координата т. C

Лист 2 из 8

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 9 | 6 | 4 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задание 1 (продолжение)

подставим значение $x = \frac{1}{4}$, получаем $y = 4$

$A\left(\frac{1}{4}; 4\right)$

Аналогично получаем координаты т. B

$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \mid \cdot 2x \neq 0$

$x^2 + x - 2 = 0$

$x_1 = 1$ - соотв т. B

$x_2 = -2$ - соотв т. C

$x_1 = 1 \Rightarrow y = 1$

$B(1; 1)$

(расстояние)

Т.к. ΔABC вписан в окр, то O от центра до точек $A, B, C = R$

Составим систему, где O - центр окр.

$$\begin{cases} \rho(O;C) = \rho(O;B) \\ \rho(O;B) = \rho(OA) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(x_2+2)^2 + (y_2+0{,}5)^2} = \sqrt{(x_2-1)^2 + (y_2-1)^2} \\ \sqrt{(x_2-1)^2 + (y_2-1)^2} = \sqrt{\left(x_2-\frac{1}{4}\right)^2 + (y_2-4)^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x_2+2)^2 + (y_2+0{,}5)^2 = (x_2-1)^2 + (y_2-1)^2 \\ (x_2-1)^2 + (y_2-1)^2 = \left(x_2-\frac{1}{4}\right)^2 + (y_2-4)^2 \end{cases}$$

Из первого ур-ия системы выразим x_2:

$x_2 = \frac{-2{,}25-3y}{6}$, подставим во второе

$\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{-2{,}25-3y}{6}\right) - 6y_2 + 14 + \frac{1}{16} = 0 \Rightarrow y_2 = 2$

$x_2 = \frac{-2{,}25-3\cdot 2}{6} = \frac{-2{,}75}{2} \Rightarrow R\left(\frac{-2{,}75}{2}; 2\right)$. Ответ: $R\left(\frac{-2{,}75}{2}; 2\right)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 9 | 6 | 4 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задание № 2

$n \in \mathbb{N}$, $x_n = n^2 + 300$

$y_n = НОД(x_n, x_{n+1})$

$\max y_n$ - ?

Решение:

$x_n = n^2 + 300$

$x_{n+1} = n^2 + 2n + 301$

$y_n = НОД(n^2 + 300; n^2 + 2n + 301) =$

$= НОД(n^2 + 300; n^2 + 2n + 301 - (n^2 + 300))$

$y_n = НОД(n^2 + 300, 2n + 1)$

Пусть $d = НОД(n^2 + 300, 2n + 1)$, тогда

$2n + 1 \equiv 0 \pmod d \Rightarrow n \equiv -\frac{1}{2} \pmod d$

подставим $n \equiv -\frac{1}{2} \pmod d$ в $n^2 + 300 \equiv 0 \pmod d$.

$(-\frac{1}{2})^2 + 300 \equiv 0 \pmod d \Rightarrow \frac{1}{4} + 300 \equiv 0 \pmod d$.

Умножим на 4, получаем $1201 \equiv 0 \pmod d \Rightarrow$

$d : 1201$

Заметим, что 1201 - простое число

~~Число не делится~~

$2n + 1 \equiv 0 \pmod{1201} \Rightarrow n \equiv -\frac{1}{2} \pmod{1201}$

$n \equiv -1 \cdot 601 \pmod{1201} \Rightarrow n \equiv 600 \pmod{1201}$

при $n = 600$:

$x_{600} = 600^2 + 300 = 1201 \cdot 300$

$2 \cdot 600 + 1 = 1201 \Rightarrow НОД(1201 \cdot 300, 1201) = 1201$

Ответ: 1201

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 9 | 6 | 4 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

Обозначим

x_1 – кол-во у Вдиго

x_2 – кол-во у Васи

y_3 – кол-во у Пети

$x_1 + x_2 + x_3 = 1001$, $x_1 > x_2 > x_3 > 0$

Заменим

$y_1 = x_1 - 2$

$y_2 = x_2 - 1$, где $y_1, y_2, y_3 \geq 0$

$y_3 = x_3$

получаем:

$x_1 = y_1 + 2$

$x_2 = y_2 + 1 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 998$

$x_3 = y_3$

Без порядка посчитаем способы:

$\binom{n+k-1}{k-1}$, где $n = 998$, $k = 3 \Rightarrow 499500$ сп.

Разделим

Т.К. у нас есть такая правило, что $y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq 0$, то

$P_3(998) = 83176$ с учетом перестановок

Ответ: 83176

Лист 4 из

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 9 | 6 | 4 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5 (продолжение)

случай при ~~n=2~~ $n \geq 2$:

$m \geqslant 2n$, $n \geqslant 2$

$m \geqslant 2n \geqslant n^2$ при $n \geqslant 2$

для $n = 2$ $m \geqslant 4$, где $4 > 2^2$ неверно

случай при $n \geqslant 3$:

$3^m \geqslant 3^{2n-1} \Rightarrow m \geqslant 2n-1$ для $n \geqslant 3$

$2n-1 \geqslant n^2$ не всегда выполняется

$3^m \geqslant 3^{2n-1} + 3^n + 2 \cdot 3^{0-1} \Rightarrow 3^m \geqslant 3^{2n-1} + 3^n$

при $n \geqslant 3$

$3^{2n-1} + 3^n \geqslant 3^{2n-1} + 3^n > 3^{2n-1}$ тогда

$m \geqslant 2n$, $n \geqslant 3$

$2n \geqslant n^2$ неверно при $n = 3$ т.к. $6 > 9$.

~~6 ≥ 9~~

$n = 2$:

$K = \frac{3^m + 2}{11}$

$3^m + 2 : 11$

$3^m \equiv 9 \mod 11$

$3^m \equiv 2 \mod 5$

тогда $m \geq 2 \Rightarrow m = 7$ $7 > 2^2$

Для всех $n \geq 1$, $m > n^2$ ч.т.д

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ___ Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ): МА 000 1696425

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 4.

Т.к. X' симметрична X относительно OA, то $XX' \perp OA$ и середина XX' лежит на OA

Введем систему координат, где $O(0;0)$ и $A(a;0)$

Ур-ие окружности:

$$x^2+y^2=R^2$$

Секущая: $y=k(x-a)$

$$x^2+|k(x-a)|^2=R^2$$

$$(1+k)^2x^2-2ak^2x+(k^2a^2-R^2)=0$$

Два корня: x_1 и x_2

$$X(x_1; k(x_1-a)),\ Y(x_2, k(x_2-a))$$

X' симметрична точка X относительно $OA \Rightarrow X$ и X' имеют одинаковую абсциссу. Ордината равна по модулю, но противоположна по знаку.

YX': $y=mx+b$, где $m=\dfrac{k(x_1+x_2-2a)}{x_2-x_1}$

$$y+k(x_1-a)=\frac{k(x_1+x_2-2a)}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)$$

Т.к. $X'Y$ и OA пересекаются в $y=0$, то подставим $y=0$:

$$0+k(x_1-a)=\frac{k(x_1+x_2-2a)}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)$$

$$k(x_1-a)(x_2-x_1)=k(x_1+x_2-2a)\cdot(x-x_1)\ |:k\neq 0$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	6	9	6	4	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 4 (продолжение)

$$(x_1 - a)(x_2 - x_1) = (x_1 + x_2 - 2a)(x - x_1)$$

Выразим x:

$$x = \frac{x_1 x_2 - x_1^2 - a x_2 + a x_1 + x_1(x_1 + x_2 - 2a)}{x_1 + x_2 - 2a}$$

x - не зависит от значения $k = 7$

не зависит от секущей т. Р.

Лист 8 из 8

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	0	1	5	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	×	×	111	60

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

Пусть у Бори n орехов, а у Васи a орехов тогда у Пети b орехов. Пусть $a \geq b$, тогда $a+b=1001-n \Rightarrow a=1001-n-b$ $|n-1 \geq a \geq b+1$; $n-1 \geq 1001-n-b \geq b+1 \Rightarrow 1002-2n \leq b \leq 500-\frac{n}{2}$

Тогда рассмотрим случаи. Способов поделить $1001-n$ орехов между В и П, чтобы у В было больше чем у П, но меньше чем у Б:

- при $n \leq 335$ – 0
- при $335 \leq n \leq 500$ → если n чётное, то $500-\frac{n}{2}-1002+2n+1 = \frac{3n}{2}-501$

если n нечет, то $500-\frac{n+1}{2}-1002+2n+1 = \frac{3n}{2}-501,5$

- при $501 \leq n \leq 998$ аналогично при n чёт будет $500-\frac{n}{2}$, а при n нечёт будет $500-\frac{n+1}{2}$
- при $n > 998$ 0 вариантов

Также, если убрать условие, что у Васи орехов больше, чем у П, то вариантов в 2 раза больше.

Тогда давайте посчитаем сумму:

$$\sum_{\substack{n \text{ нечет} \\ n=335}}^{499} (3n-1003) = \frac{((335+199)\cdot 3-2006)\cdot 83}{2} = 20584$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 5 | 1 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\sum_{чет\ n=336}^{500} (2n-1002) = 20916$ вар

$\sum_{нечет\ n=501}^{997} (999-n) = 62250$ вар

$\sum_{чет\ n=502}^{998} (1000-n) = 62250$ вар $= \frac{(498+2)(249)}{2}$

$\Rightarrow$ всего вариантов 166 000 (20916 + 2·62250 + 20584)

№ 2

Ж: $НОД(n^2+300, (n+1)^2+300) = НОД(n^2+300; n^2+2n+301)$. Пусть $n^2+300 = ka$, $2n+1 = kb$, где $k = НОД(4n^2+300; 2n+1)$. $n = \frac{kb-1}{2}$. Тогда запишем

$\Rightarrow n^2 = \frac{k^2b^2-2kb+1}{4}$

$\frac{k^2b^2-2kb+1}{4} + 300 = ka \quad |\cdot 4$

$\Leftrightarrow k^2b^2 - 2kb + 1 + 1200 = 4ka$

$\Leftrightarrow k^2b^2 - 2kb - 4ka = -1201$

$\Leftrightarrow k(kb^2 - 2b - 4a) = -1201$

ВНИМАНИЕ! Пишется только на этом листе

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1201 - пробное число, т.к $k-1$ или 1201

Таким образом ответ не более 1201.

Пусть $n=600$. Тогда $n^2+300=360300 \vdots 1201$

$(n+1)^2+300=361501 \vdots 1201$, что подходит под наше условие $\Rightarrow$ 1201 подходит, т.к приведен пример.

№1

У нас есть гипербола и 2 прямые ($y=\frac{1}{x}$ - гип)

$(-2;-\frac{1}{2})$ - координаты точки. $y=2x+b_1$

и $y=\frac{1}{2}x+b_2$ наши прямые. Тогда $b_1=\frac{3}{2}$

и $b_2=\frac{1}{2}$ находим из подставления $x=-2$.

Те прямые $y=2x+\frac{7}{2}$, $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

A: $2x+3{,}5=\frac{1}{x} \Rightarrow$ координаты $A(\frac{1}{4};4)$ из кв.ур

B: $(1;1)$ - координаты точки. Те мы имеем координаты всех вершин треугольника просто из приравнивания прямых и гиперболы. Таким образом окружность проходит через эти точки.

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ - её формула

$$\begin{cases} (\frac{1}{4}-x_0)^2+(4-y_0)^2=R^2 \\ (1-x_0)^2+(1-y_0)^2=R^2 \\ (-2\frac{1}{2}-x_0)^2+(-\frac{1}{2}-y_0)^2=R^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{16}-\frac{1}{2}x_0+16-8y_0+y_0^2=$$

$$=1-2x_0-x_0^2+1-2y_0+y_0^2$$

$$15x_0+14\frac{1}{16}=6y_0 \Rightarrow$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	0	1	5	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$\Rightarrow y_0 = \frac{1}{4}x_0 + \frac{75}{32}$ Тогда во 2:

$(1-x_0)^2 + (1-y_0)^2 =$

$= (2+x_0)^2 + \left(\frac{1}{2}+y_0\right)^2$

$\Leftrightarrow 1 - 2x_0 + 1 - 2y_0 > 4 + 4x_0 + \frac{1}{4}y_0$

$\Leftrightarrow -3y_0 = 6x_0 + \frac{2^{11}}{4} \Rightarrow y_0 = -2x_0 - \frac{3}{4}$ Тогда из 1000:

$\frac{1}{4}x_0 + \frac{75}{32} = -2x_0 - \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{9}{4}x_0 = -\frac{99}{32}$

$\Rightarrow x_0 = -\frac{11}{8} \Rightarrow y_0 = 2$ Тогда наш центр $O\left(-\frac{11}{8}; 2\right)$

№

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	4	9	8	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	6	12	20	1	11	59

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

$f(x)=x^2-2x-1$ x_1 и x_2

$x_1+x_2=2$ $D=1+1=2$

$x_1 \cdot x_2=-1$ $x_1=1+\sqrt{2}$

$x_2=1-\sqrt{2}$

$g(x)=x^2-3x-1$ x_3 и x_4

$x_3+x_4=3$ $D=9+4=13$

$x_3 \cdot x_4=-1$ $x_3=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$

$x_4=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$

$g(x_2)=(1-\sqrt{2})^2-3(1-\sqrt{2})-1=$

$=1-2\sqrt{2}+2-3+3\sqrt{2}-1=-1+\sqrt{2}$

$g(x_2)^3=(1-2\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-1)=$

$=\sqrt{2}-1-4+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}-2=5\sqrt{2}-7$

$f(x_3)=\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^2-2\cdot\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)-1=\frac{9+13+6\sqrt{13}}{4}-3-\sqrt{13}-1=$

$=\frac{22+6\sqrt{13}}{4}-4-\sqrt{13}=\frac{6+2\sqrt{13}}{4}=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$

$f(x_3)^3=\frac{1}{8}(3+\sqrt{13})^3=\frac{1}{8}(3+\sqrt{13})^2(3+\sqrt{13})=\frac{1}{8}(9+6\sqrt{13}+13)(3+\sqrt{13})=$

$=\frac{1}{8}(22+6\sqrt{13})(3+\sqrt{13})=\frac{66+22\sqrt{13}+18\sqrt{13}+6\cdot 13}{8}=\frac{144+40\sqrt{13}}{8}=$

$=18+5\sqrt{13}$

$f(x_4)=\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^2-\frac{3-\sqrt{13}}{2}-1=\frac{9+13-6\sqrt{13}}{4}-3+\sqrt{13}-1=$

$=\frac{22-6\sqrt{13}}{4}-4+\sqrt{13}=\frac{6-2\sqrt{13}}{4}=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$

$(g(x_1))^3 f(x_3)+(g(x_2))^3 f(x_4)=(-7-5\sqrt{2})\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)+(5\sqrt{2}-7)\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)=$

$=\frac{-21-7\sqrt{13}-15\sqrt{2}-5\sqrt{26}+15\sqrt{2}-5\sqrt{26}-21+7\sqrt{13}}{2}=\frac{-42-10\sqrt{26}}{2}=$

$=-21-5\sqrt{26}$

$(g(x_1))^3 f(x_3)+(g(x_2))^3 f(x_4)$

$g(x_1)=(1+\sqrt{2})^2-3(1+\sqrt{2})-1=$

$=1+2\sqrt{2}+2-3-3\sqrt{2}-1=$

$=-1-\sqrt{2}$

$g(x_1)^3=(-1-\sqrt{2})^3=(-1-\sqrt{2})^2(-1-\sqrt{2})=$

$=(1+2\sqrt{2}+2)(-1-\sqrt{2})=$

$=-(3+2\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=-(3+3\sqrt{2}+2\sqrt{2}+4)=$

$=-7-5\sqrt{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	4	9	8	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

теперь если x_1, это x_2 и x_3 это x_4

$\left(5\sqrt{2}-7\right)\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)+\left(-7-5\sqrt{2}\right)\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)=$

$=-21-5\sqrt{26}$

если x_1, это x_2, x_3 и x_4 на своих прежних местах

$\left(5\sqrt{2}-7\right)\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)+\left(-7-5\sqrt{2}\right)\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)=\frac{15\sqrt{2}+5\sqrt{26}-21-7\sqrt{13}}{2}+\frac{-21+7\sqrt{13}-15\sqrt{2}+5\sqrt{26}}{2}=$

$=-21+5\sqrt{26}$

Ответ: $-21-5\sqrt{26}$ или $-21+5\sqrt{26}$

4; 6; 10; 15; 21; 28 ... 7 8 9 10

x_1 x_2 4 5 6 7 x_3 x_4 x_5 x_6

$x_3 > 12-4=8$ сост число подходит $x_3=10$

$x_4 > 20-6=14$

$x_5 > 30-10=20$

$x_6 > 42-15=27$

$\begin{array}{r} 42 \\ -15 \\ \hline 27 \end{array}$

можно заметить, что разность соседних чисел с каждым новым числом возрастает на 1

после третьего числа $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} + 1$

Док-во:

пусть $x_k - x_{k-1} = \Delta + 1$

$x_{k-1} - x_{k-2} = \Delta$

$x_k - x_{k-2} = 2\Delta + 1$

$x_{k+1} - x_k = 2x_k - 2x_{k-1} - (x_{k-1} - x_{k-2})$

$x_{k+1} - x_k = 2x_k - 2x_{k-1} - \Delta$

$x_{k+1} - x_k = 2\Delta + 2 - \Delta$

$x_{k+1} - x_k = 2 + \Delta$

Это доказательство того, что разность с каждым расчетом на один

$S = \frac{a_1 + a(n-1)}{2} \cdot n$

$S = \frac{4+1\cdot(98)}{2} \cdot 99 = \frac{4+98}{2} \cdot 99 =$

$= \frac{102}{2} \cdot 99 = 51 \cdot 99 = 5049$

Ответ: 5049

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 9 | 8 | 9 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

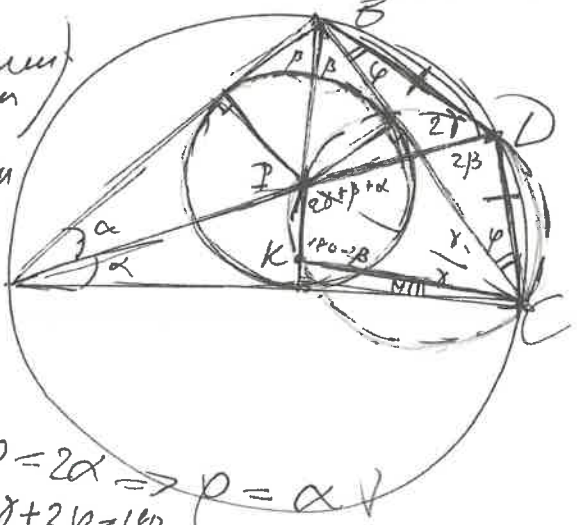
1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

1) Центр впис окр на пересеч биссек $\Rightarrow \angle BAD = \angle CAD \Rightarrow$
$\Rightarrow BD = DC$ (хорды с одинаковыми вписанными углами)
$\Rightarrow \triangle BDC$ – р/б



ABDC и DCKI четырёхугольники вписанные в окр $\Rightarrow$

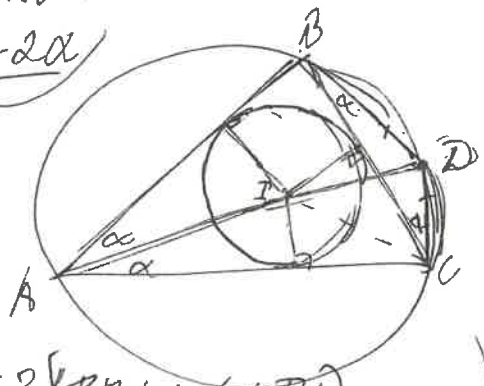
$\angle BDC = 180 - 2\alpha$
$\angle ABD = 180 - \angle ACD$
$\angle KID = 180 - \angle KCD$
$\angle IKC = 180 - \angle CDI$

$2\varphi + 180 - 2\alpha = 180 \Rightarrow 2\varphi = 2\alpha \Rightarrow \varphi = \alpha$ ✓

$2\beta + \varphi = 180 - 2\gamma - \varphi \Rightarrow 2\beta + 2\gamma + 2\varphi = 180$

$\angle ADC = 180 - \alpha - 2\gamma - \alpha = 180 - 2\gamma - 2\alpha$

$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180$



$\angle ADC = 2\beta$ ✓

аналогично $\angle ADB = 2\gamma$ ✓

~~$\triangle BKC \Rightarrow 180 - 2\beta$~~

~~$\angle BID = 180 - 2\gamma - \beta - \alpha$~~ $\Rightarrow \angle KID = 2\gamma + \beta + \alpha$ ($\triangle BID$ и смежн $\angle DIK$)

~~$\angle KCD = 180 - 2\gamma - \beta - \alpha = 2\gamma + \alpha$~~ ②

~~$180 = 4\gamma + 2\alpha + \beta - \textcircled{2} \Rightarrow \textcircled{2} = 180 - 4\gamma - 2\alpha - \beta$~~

~~$\angle KCB = 2\gamma$ ($180 + 4\gamma + 2\alpha - \beta$)~~ ~~$= 2\gamma + 180 + 4\gamma + 2\alpha + \beta =$~~

~~$\angle KCD = 180 - 2\gamma - \angle KCB$~~

$BID = 180 - 2\gamma - \beta - \alpha \Rightarrow KCD = 2\gamma + \alpha + \beta$

$2\gamma + \alpha - \textcircled{2} = 180 - 2\gamma - \alpha - \beta \Rightarrow \textcircled{2} = 4\gamma + 2\alpha + \beta - 180$

(приравняли к $\triangle KCD$ $\frac{1}{2}$ 180 – $\angle KID$)

$\angle KCB = 2\gamma - 4\gamma - 2\alpha - \beta + 180 \Rightarrow 180 - 2\gamma - 2\alpha - \beta =$

$= \beta$ (из суммы $\angle$ $\triangle ABC$)

$\triangle BKC$, $\angle CBK = \angle KCB = \beta \Rightarrow \triangle BKC$ – р/б $\Rightarrow$ **BK = KC**

если рассматривать случай пересечения выше центра то доказательство такое же)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	4	9	8	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$180-2\delta-\beta-\alpha \Rightarrow \angle DKD = 2\beta+\alpha+\beta$

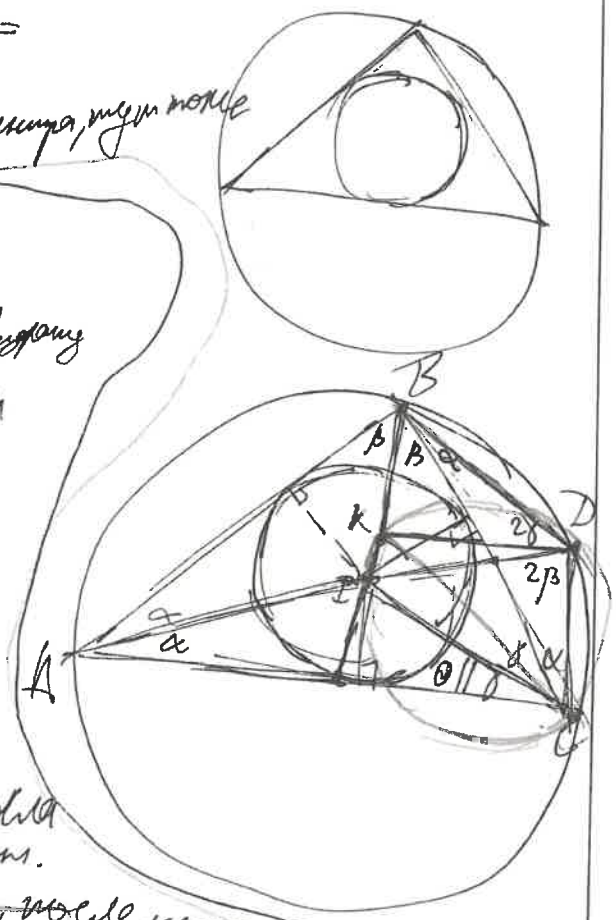
$2\delta+\alpha-\Theta = 180-2\gamma-\alpha-\beta$

$\Theta = 4\gamma+2\alpha+\beta-180$

$\angle KCB = 2\gamma - 4\gamma - 2\alpha - \beta + 180 =$

$= 180 - 2\gamma - 2\alpha - \beta = \beta$

это для случаев, если K выше центра, тут тоже $\triangle BKC \sim \triangle BDC$



$a^3+b^3 = (abc-1)^2$ №5

$(a+b)(a^2-ab+b^2) = (abc-1)^2$

$a^3+b^3 > 0$ т.к. произведение и квадрату

$abc-1 > 0$ т.к. ~~произведение не натуральные~~ числа все натуральные

$a+b>0$

$a^2-ab+b^2>0$ т.к. произведение двух чисел >0

$a^2b^2c^2-2abc+1$

$a=2, b=1, c=2$

$8+1=(2\cdot1\cdot2-1)^2$

a^3+b^3 – квадрат натурального числа потому что двучлен не умножается.

а это не может быть квадратом, после которого идёт простое число, т.к. его нельзя получить умножением чисел

~~$a=\beta, b=1, c=\beta$~~

$a \cdot b < \sqrt{a^3+b^3}$

$2^2=4$ $2^3=8$
$3^2=9$ $3^3=27$
$4^2=16$ $4^3=64$
$5^2=25$ $5^3=125$
$6^2=36$

№3

$1000 = 2^3\cdot5^3+1$

$x_1+x_2+x_3+x_4 = 1001$

$250+250+250+251$ ← до этого момента

$499+499+1+2$ ~~вторые два числа нужно~~ (эти будут ↑)

эти ↓ они будут одинаковыми

а эта компенсировать одинаковость

~~нужно~~ нехватающие

от нижнего до верхнего 249 четвёрок $(499-250=249)$ это если больше одинаковые, но ещё надо учесть, что много ~~способов~~ вариантов компенсирующих чисел. их сумма ~~249~~ всего нечётн, то есть одно чётн, которое нет

тогда способов их пар = $\frac{\text{сумма}-1}{2} = \frac{x_3+x_4-1}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	4	9	8	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

сумма меньшего чем 1 от 3 до 501

$\frac{3+501}{2} \cdot 498 = \frac{504}{2} \cdot 498$ способов переставить x_3 и x_4

если x_1 и x_2 одинаковые

имеет 249 $+249 \cdot 504 = 249 \cdot (505)$

если одинаковые x_3 и x_4 имеет меньше числа

~~1 1 2~~ от 1 до 250 = 249

кратно умножаем на 2

Ответ: $2 \cdot 249 \cdot 505 = 1010 \cdot 249 = 249000 +$

$2490 =$

249000 $\quad$ 249000

$+ 2490$ $\quad$ $\times 2490$

Ответ: 251490

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	7	3	2	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамках справа

1	2	3	4	5	6	Σ
X	20	12	20	6	///	58

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

1 2 3 4

4 6 9 14

Посчитаем еще два числа по формуле, получим, что третье это 9, а 4-ое - 14, докажем, что все числа после 14, получаемые по формуле $2x_{n-1} - x_{n-2} + 1$ не простые это эквивалентно тому, что любое число $n > 4$ равно $2x_{n-1} - x_{n-2} + 1$

Дано: По индукции

База: при $n = 5$ верно $x_5 = 28 - 9 + 1 = 20$ - не простое

Предположение: пусть верно для $n = k-1$, докажем для $n = k$:

Заметим, что если это верно для $n = k-1$, то $x_5 = 14 + 6$

$x_6 = 14 + 6 + 4$, $x_4 = 14 + 6 + 4 - 8$, т.е $x_i = 14 + \frac{(i+1)(i+2)}{2} - \frac{5 \cdot 6}{2}$

$\frac{(i+2)(i+1)}{2} - 1$

Докажем, что это составное при любом $i > 4$

1) Пусть $i+1 \vdots 2$, т.е $i+1 = 2t$, тогда $x_i = t(2t+1) - 1$

Заметим, что $t \underset{t+1}{\equiv} -1$

$2t+1 \underset{t+1}{\equiv} -1 \Rightarrow t(2t+1) \underset{t+1}{\equiv} 1$

Значит $x_i \underset{t+1}{\equiv} 0$, но $x_i > t+1$

x_i - составное

2) Пусть $i+2 \vdots 2$, т.е $i+2 = 2g$, тогда

$x_i = 2g(2g-1) - 1$

$g \underset{g-1}{\equiv} 1 \quad 2g-1 \underset{g-1}{\equiv} 1$

$x_i \underset{g-1}{\equiv} 0$, но $x_i > g-1 \Rightarrow x_i$ - составное

□

→ см Лист 2

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	7	3	2	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Приведется только то, что написано в этой синей линии в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

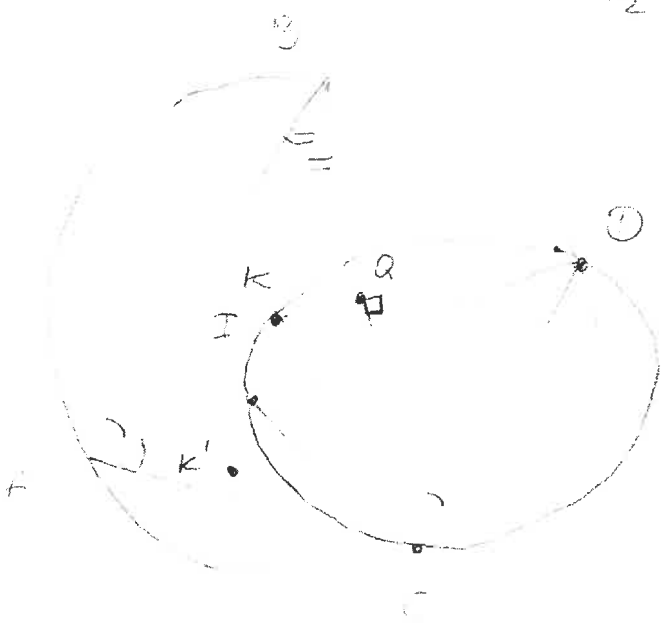
(№2) (продолжение)

Значит все x_n, $n>4$ в точности равны $2x_{n-1} - x_{n-2} + 1$

Тогда $x_{100} = 14 + 6 + 4 + \dots + 101 + 1$

$$= 14 + \frac{101 \cdot 102}{2} - 15 = \frac{101 \cdot 102}{2} - 1 = 101 \cdot 51 - 1$$

(№4)



I случай, если K лежит на отрезке BI, т.е. между B и I.

Тогда. Пусть $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$, тогда $\angle BIC = 180 - B - \gamma = 90 + \alpha$ ($2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180$)

Заметим, что K, I, D, C лежат на одной окр-ти по усл. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KDC + \angle KIC = 180^\circ \Rightarrow \angle KDC = 90 - \alpha$. Также

$\angle BCD = \alpha$ (90 + α), т.к. он опирается на дугу BD окр-ти (ABC) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DQC = 90$

см. Лист 3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 3 | 2 | 6 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Пишется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

(№4) (продолжение)

В $\triangle ADC$, $\angle DAC = \alpha$, $\angle ACD = 2\beta + \alpha \Rightarrow \angle ADC = 180 - 2\beta - 2\alpha$

2β

Значит $\angle KDA = \angle KDC - \angle ADC = 90 - \alpha - 2\beta$

$\angle KCI$ (опираются на одну дугу)

Заметим, что $\angle IKD = \beta + 90°$ (внешний)

$\angle ICD = 180 - \beta - 90 = 90 - \beta$

Значит $\angle KCQ = \angle ICD - \angle KCI - \angle QCD = 90 - \beta - 90 + \alpha + 2\beta - \alpha$

β

$KC = KB$ □

II случай: K по продолжении EI за точку I, тогда

$\angle KID + \angle KCD = 180$, но $\angle KID = 90 - \alpha - \beta = 90 + \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KCD = 90 - \delta$ и также как в первом случае

$\angle BCD = \alpha \Rightarrow \angle KCB = 90 - \delta - \alpha = \beta$ □

$KC = KB$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	7	3	2	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа и ранее сдано

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3)

1) 2 числа в наборе равны (и больше), тогда их сумма (двух равных) чётная, т.е сумма остальных двух должна быть нечётной и <1001, т.е сумма этих двух чисел $\in [3; 999]$

$3 = 2+1$ — в виде 1 суммы представляется

$5 = 1+4 = 2+3$ в виде 2* сумм

$7 = 1+6 = 2+5 = 3+4$ в виде 3* сумм

⋮

$999 = 1+998 = \ldots$ в виде 499 сумм

Заметим, что если у нас есть число $2i+1$ и числа a_i, b_i удовлетворяющие условию, что $a_i + b_i = 2i+1$, то такая пара чисел (a_i, b_i) встретится в точности 1 раз в этом ряде

Всего таких сумм $1+2+\ldots+499 = \frac{499 \cdot 500}{2} = 499\,250$ и каждая пара чисел в сумме уникальна $\Rightarrow$ если мы возьмем одну из этих пар, то два равных числа из самого начала восстановятся однозначно, при этом может получиться, что одно из чисел в паре равно одному из начальной пары равных, тогда будут равны 3 числа, т.е мы посчитали все возможные варианты наборов

Ответ: 499 250

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____

M	A	0	0	0	1	7	3	2	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

Пусть $a^3 \underset{4}{\equiv} b^3$, тогда

$2a^3 = (a^2c - 1)^2$

$2a^3 = a^4c^2 - 2a^2c + 1$

a^3	mod 4	x^2	mod 4
1	1	1	1
2^3	0	2^2	0
3^3	3	3^2	1
4^3	0	4^2	0

либо $a^3 \underset{4}{\equiv} 1$, $a^3 \underset{4}{\equiv} 3$

$a^3 \underset{4}{\equiv} 0$

если $a^3 \underset{4}{\equiv} 1 / 3$ то равенство просто не верно по модулю 4 $\Rightarrow$

$a^3 \underset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow (\underbrace{ab}_{\equiv 4} c - 1)^2 \Rightarrow \underset{4}{\equiv} 1$ - не верно значит a чих только

не равно b.

Пусть $a > b$ (не умаляя общности), тогда

$a^3 + b^3 = a^2b^2c^2 - 2abc + 1$

$a^3 - 1 + \underbrace{b^3 - a^2b^2c^2 + 2abc}_{b} = 0$

$a^3 - 1 \vdots b$ аналогично $b^3 - 1 \vdots a$

$\begin{cases} a^3 \underset{b}{\equiv} 1 \\ b^3 \underset{a}{\equiv} 1 \end{cases}$ $b < a$, докажем, что $\exists$ только одно число $< a$, такое, что оно в кубе $\underset{a}{\equiv} 1$ > 0

Пусть таких чисел несколько: k_1 и $k_2 < a$, тогда $k_1 > k_2$

$k_1^3 \underset{a}{\equiv} 1$

$k_2^3 \underset{a}{\equiv} 1$ $\Rightarrow k_1^3 - k_2^3 \underset{a}{\equiv} 0$

$(k_1 - k_2)(k_1^2 + k_1k_2 + k_2^2) \underset{a}{\equiv} 0 \Rightarrow k_1^2 + k_1k_2 + k_2^2 \underset{a}{\equiv} 0$

$\neq a$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____

M	A	0	0	0	1	7	3	2	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

(№5) (продолжение)

$k_1^2 + k_1k_2 + k_2^2 \underset{a}{\equiv} 0$

$\vdots k_2$

$k_1^2 \vdots k_2$, аналогично $k_2^2 \vdots k$. Пусть $k_1 = k_2 \cdot k$, тогда

$k_2^2 k^2 + k_2^2 \cdot k + k_2^2 \underset{a}{\equiv} 0$

$k_2^2(k^2 + k + 1) \underset{a}{\equiv} 0$

$\not\vdots a$

$k_2^2 \vdots a \Rightarrow k_2^2 \underset{a}{\equiv} 0$, но если $k_2 \underset{a}{\not\equiv} 0$, то $k_2^2 \cdot k_2 \underset{a}{\equiv} 0$, а по усл. $k_2^3 \underset{a}{\equiv} 1$ - противоречие $\Rightarrow$ такой остаток 1 $\Rightarrow b^3 \underset{a}{\equiv} 0$, зн. $(b=1)$

$a^3 + 1 = (abc - 1)^2$

$a^3 + 1 = (ac - 1)^2$ если смотреть mod 4, то $a^3 \underset{4}{\equiv} 0$ $\Rightarrow$ с также любое подходит единственная пара: $(a, b, c) = (2, 1, 2)$

$a^3 + 1 = a^2c^2 - 2ac + 1$

$a(a^2 - ac^2 + 2c) = 0$

$\not\vdots a$

$a^2 - ac^2 + 2c = 0$

$a^2 + 2c = ac^2$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	0	2	8	2	2	5

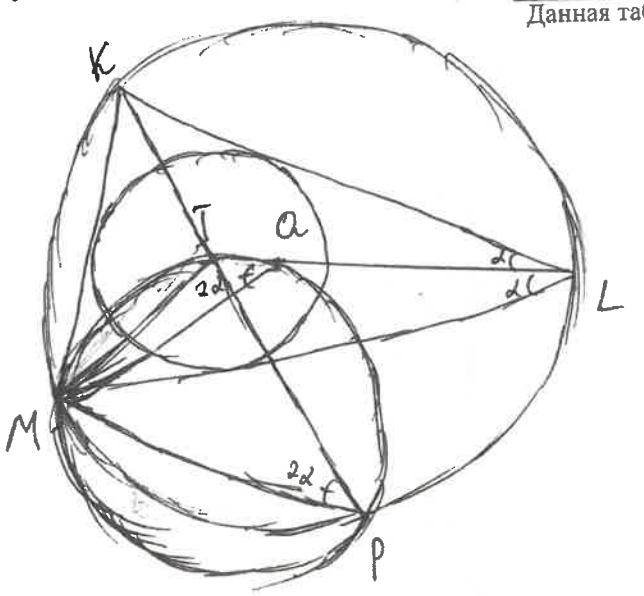
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
16	0	20	20	2	111	58

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 4.



Дано:

I - центр вписанной окр-сти (KLM)

P - точка пересеч. описанной окр-сти KIM и луча KI

Q - точка пересеч. опис. окр-сти MIP и луча LI..

док-ть: LQ = MQ.

Решение:

Как мы знаем точка пересечения биссектрис это центр вписанного треугольника.

(LI - биссектриса)

Обозначим углы ∠KLI и ∠ILM через α.

(∠KLM = 2α)

Заметим что углы ∠KLM и ∠KPM равны т-к у них общая дуга(KM) ∠KLM = ∠KPM = 2α.

А также и у углов ∠IPM(KPM) и ∠IQM общая дуга MI у опис. окр-сти △MIP ∠IPM = ∠IQM = 2α

Тогда ∠MQL = 180° - ∠IQM = 180° - 2α

∠QML = 180° - (180° - 2α) - α = α ⇒ △MQL - равнобед. треуг.

⇓

MQ = QL

Доказано

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	0	2	8	2	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 1.

$f(x) = x^2 - 4x - 1$ x_1 и x_2 – корни

$g(x) = x^2 - 5x - 1$ x_3 и x_4 – корни

Найти все знач. выражения:

$$(g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4)$$

Решение:

Найдем x_1 и x_2.

$D = 16 + 4 = 20$ $\quad x_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$

Найдем x_3 и x_4.

$D = 25 + 9 = 29$ $\quad x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}$

1. $(g(2+\sqrt{5}))^3 f\left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right) + (g(2-\sqrt{5}))^3 f\left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right)$
2. $(g(2-\sqrt{5}))^3 f\left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right) + (g(2+\sqrt{5}))^3 f\left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right)$

} все возм. вар.

$g(2+\sqrt{5}) = (2+\sqrt{5})^2 - 5(2+\sqrt{5}) - 1 = -(2+\sqrt{5})$

$g(2-\sqrt{5}) = (2-\sqrt{5})^2 - 5(2-\sqrt{5}) - 1 = -(2-\sqrt{5})$

$f\left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right) = \left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right) - 1 = 2 + \frac{\sqrt{29}}{2}$

$f\left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right) = \left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right) - 1 = 2 - \frac{\sqrt{29}}{2}$

$g^3(2+\sqrt{5}) = -(38+17\sqrt{5})$ $\quad g^3(2-\sqrt{5}) = -(38-17\sqrt{5})$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	0	2	8	2	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Продолжение зад. 1.

Подставим к нашим выражениям значения, которые нашли.

1. $(g(2+\sqrt{5}))^3 f\left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right) + (g(2-\sqrt{5}))^3 f\left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right)$.

$-(38+17\sqrt{5})$ $\quad 2+\frac{\sqrt{29}}{2}$ $\quad -(38-17\sqrt{5})$ $\quad 2-\frac{\sqrt{29}}{2}$

$-(38+17\sqrt{5})\left(2+\frac{\sqrt{29}}{2}\right) + -(-38-17\sqrt{5})\left(2-\frac{\sqrt{29}}{2}\right) =$

$= -\left(76+\cancel{34\sqrt{5}}+\cancel{17\sqrt{29}}+\frac{17\sqrt{145}}{2}+76-\cancel{34\sqrt{5}}-\cancel{17\sqrt{29}}+\frac{17\sqrt{145}}{2}\right) =$

$= -(152+17\sqrt{145})$

2. $(g(2-\sqrt{5}))^3 f\left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right) + (g(2+\sqrt{5}))^3 f\left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right)$

$-(38-17\sqrt{5})$ $\quad 2+\frac{\sqrt{29}}{2}$ $\quad -(38+17\sqrt{5})$ $\quad 2-\frac{\sqrt{29}}{2}$

$-(38-17\sqrt{5})\left(2+\frac{\sqrt{29}}{2}\right) + -(38+17\sqrt{5})\left(2-\frac{\sqrt{29}}{2}\right) =$

$= -\left(76+\cancel{17\sqrt{29}}-\cancel{34\sqrt{5}}+\frac{17\sqrt{145}}{2}+76+\cancel{34\sqrt{5}}-\cancel{17\sqrt{29}}-\frac{17}{2}\sqrt{145}\right) =$

$= -(152-17\sqrt{145})$

Все возможные значения выражения: $-(152+17\sqrt{145})$, $17\sqrt{145}-152$

Ответ

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	0	2	8	2	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задание 3

Сколько наборов из 4 натур-ых чисел с суммой 1005 сред чисел есть равные?

Решение:

a, b, c, d – 4 нат-ых числа

$a+b+c+d = 1005$.

Разделим числа на 2 группы:

a и b, c и d. $\Rightarrow a+b = x \quad c+d = y$

Допустим $a=b$ и посчитаем кол-во всех наборов при которых выполняется усл-вие суммы.

$x = a+b = 2a \Rightarrow x = 2, 4, 6 \dots 1002$

Всего знач. x – 501. (прим. $x \neq 1004$ т.к. $y \geq 2$ $y \neq 1005-1004$)

Начнем считать кол-во возм. наборов:

$y = c+d = 3$ при $x = 1002$

$1+2 = 3 \quad (1;2)$

$y = c+d = 5$ при $x = 1000$

$1+4 = 5 \quad (1;4)$

$2+3 = 5 \quad (2;3)$ Всего 2 набора.

. . . . . .

$y = c+d = 1003$ при $x = 2$

Всего 1 набор.

(прим. Если набор в виде: (1; 1; 501; 502) и есть набор вида (1; 501; 1; 502), то это один и тот же набор чисел, а не два разных набора)

$1+1002 = 1003, \quad 2+1001 = 1003 \dots$

$501+502 = 1003$ – 501 набор

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	0	2	8	2	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Продолжение зад. 3.

Мы видим арифм. прогрессию чисел:

1 набор: $a, b \geq 501$; 2 набора: $a, b \geq 500$; ... 500 наборов: $a, b \geq 2$; 501 набор: $a, b \geq 1$

То есть общее кол-во наборов равно:

$$\frac{1+501}{2} \cdot 501 = \frac{502}{2} \cdot 501 = 125751 \text{ набор}$$

Ответ: У 125751 набора есть равные числа.

Задание 5.

a, b, c – натур-ые числа ($a, b, c \geq 1$)

$a^3 - b^3 = (abc-1)^2$

$a = b = c = 1$ (!)

Решение:

$(abc-1)^2 > 0 \Rightarrow a^3 - b^3 > 0 \quad a > b$

$(a-b)(a^2+ab+b^2) = (abc-1)^2$

$a^2+ab+b^2 = \frac{(abc)^2 + 2abc + 1}{a-b}$

Целое ↑ ; $\frac{}{a-b}$ ↑ Целое при $a-b = 1$ (либо $a = b$.)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	0	2	8	2	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Продолжение Задания 6.

Рассмотрим варианты где $a-b=1$ $(a=b+1)$:

$$a^2+ab+b^2=(abc)^2-2abc+1$$

$(a=b+1)$

$$b^2+2b+1+b^2+b+b^2=3b^2+3b+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3b^2+3b=(abc)^2-2abc$$

$$3b(b+1)=(abc)^2-2abc$$

$$3ab=(abc)^2-2abc=abc(abc-2)$$

$ab \geq 2$, а при $c \geq 2$ $abc \geq 4$

Подставим наим. знач.

$3 \cdot 2 = 6$ $\quad 4(4-2)=8$ $\quad 6 \neq 8 \Rightarrow$ с не больше 1.

$c=1$.

$$3ab=(ab)^2-2ab=ab(ab-2)$$

$$ab(3-(ab-2))=ab(5-ab)=0 \quad ab \neq 0$$

$$5=ab=b(b+1)$$

Но это не возможно! (5 – простое число)

$a \neq b+1$ $\quad \underline{a=b}$

$$a^3-b^3=0 \quad (abc-1)^2=0$$

$$\Downarrow$$

$$abc=1$$

$$a=b=c=1$$

(Но это возможно только тогда если все числа равны 1 (Т-х натур-ие))

Доказано.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	0	2	8	2	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 2.

$X_1 = 5$

$X_2 = 7$

$X_n > 2X_{n-1} - X_{n-2}$

$X_{98} = ?$

$X_3 = 7 + 2 + 1 = 10$

$X_4 = 10 + 3 + 1 = 14$

$X_{98} = \ldots$

Ответ: 9848

Решение:

$X_n > X_{n-1} + (X_{n-1} - X_{n-2})$

$X_n = 2X_{n-1} - X_{n-2} + 1$ Разность между прогр-ями.

$2 + 4 + 5 + \ldots 98$

96

$\frac{3 + 93}{2} \cdot 96 = 48 \cdot 101 =$

$= 4848$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	5	6	6	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	12	X	6	///	58

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1.

$f(x) = x^2 - 2x - 1$ x_1, x_2

$g(x) = x^2 - 3x - 1$ x_3, x_4

По Th Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = -1 \\ x_3 + x_4 = 3 \\ x_3 \cdot x_4 = -1 \end{cases}$$

~~$(g(x_1))^3 f(x_3) +$~~

Ещё

$f(x) = x^2 - 2x - 1$

$x^2 - 2x - 1 = 0$

$D = 4 + 4 = 8$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$

$x_1 = 1 + \sqrt{2}$ или $x_2 = 1 - \sqrt{2}$

$g(x) = x^2 - 3x - 1$

$x^2 - 3x - 1 = 0$

$D = 9 + 4 = 13$

$x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

Тогда:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + \sqrt{2} \\ x_2 = 1 - \sqrt{2} \\ x_3 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \\ x_4 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1 = 1 + \sqrt{2} \\ x_2 = 1 - \sqrt{2} \\ x_3 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \\ x_4 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \sqrt{2} \\ x_2 = 1 + \sqrt{2} \\ x_3 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \\ x_4 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \sqrt{2} \\ x_2 = 1 + \sqrt{2} \\ x_3 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \\ x_4 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

4 варианта (всего)

Рассмотрим их.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	5	6	6	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Варианты:

① $x_1 = 1+\sqrt{2}$, $x_2 = 1-\sqrt{2}$, $x_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$, $x_4 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$

$g(x_1) = (\sqrt{2}+1)^2 - 3(\sqrt{2}+1) - 1 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 - 3\sqrt{2} - 3 - 1 = -\sqrt{2} - 1$

$f(x_3) = \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) - 1 = \frac{9+6\sqrt{13}+13}{4} - 3 - \sqrt{13} - 1 = \frac{22+6\sqrt{13}-16-4\sqrt{13}}{4} = \frac{6+2\sqrt{13}}{4} = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

$g(x_2) = (1-\sqrt{2})^2 - 3(1-\sqrt{2}) - 1 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 - 3 + 3\sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} - 1$

$f(x_4) = \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) - 1 = \frac{9-6\sqrt{13}+13}{4} - 3 + \sqrt{13} - 1 = \frac{9-6\sqrt{13}+13-16+4\sqrt{13}}{4} = \frac{6-2\sqrt{13}}{4} = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$

Тогда:

$(g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4) =$

$= \left((\sqrt{2}+1)^2 - 3(\sqrt{2}+1) - 1\right)^3 \cdot \left(\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) - 1\right) +$

$+ \left((1-\sqrt{2})^2 - 3(1-\sqrt{2}) - 1\right)^3 \cdot \left(\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) - 1\right) =$

$= (-\sqrt{2}-1)^3 \cdot \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) + (\sqrt{2}-1)^3 \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) =$

$= \frac{(-5\sqrt{2}-7)(3+\sqrt{13})}{2} + \frac{(5\sqrt{2}-7)(3-\sqrt{13})}{2} =$

$= \frac{-15\sqrt{2} - 5\sqrt{26} - 21 - 7\sqrt{13} + 15\sqrt{2} - 5\sqrt{26} - 21 + 7\sqrt{13}}{2} =$

$= \frac{-10\sqrt{26} - 42}{2} = -5\sqrt{26} - 21$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	5	6	6	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

(2) $\begin{cases} x_1 = 1-\sqrt{2} \\ x_2 = 1+\sqrt{2} \\ x_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ x_4 = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$

$g(x_1) = (1-\sqrt{2})^2 - 3(1-\sqrt{2}) - 1 =$

$= 1 - 2\sqrt{2} + 2 - 3 + 3\sqrt{2} - 1 =$

$= \sqrt{2} - 1$

$g(x_2) =$ (уже считал в прошлом варианте)

$= -\sqrt{2} - 1$

$f(x_3) = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

$f(x_4) = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$

$\Rightarrow (g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4) = (\sqrt{2}-1)^3\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) + (-\sqrt{2}-1)^3\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) = (5\sqrt{2}-7)\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) + (-5\sqrt{2}-7)\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) = \frac{15\sqrt{2}+5\sqrt{26}-21-7\sqrt{13}}{2} + \frac{-15\sqrt{2}+5\sqrt{26}-21+7\sqrt{13}}{2} = 5\sqrt{26}-21$

(3) $\begin{cases} x_1 = 1+\sqrt{2} \\ x_2 = 1-\sqrt{2} \\ x_3 = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \\ x_4 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} g(x_1) = -\sqrt{2}-1 \\ g(x_2) = \sqrt{2}-1 \\ f(x_3) = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \\ f(x_4) = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$

$(g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4) =$

$= (-\sqrt{2}-1)^3\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) + (\sqrt{2}-1)^3\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) =$

$= 5\sqrt{26} - 21$ (совпадает с предыдущим и ответ такой же)

(4) $\begin{cases} x_1 = 1-\sqrt{2} \\ x_2 = 1+\sqrt{2} \\ x_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ x_4 = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(x_1) = \sqrt{2}-1 \\ g(x_2) = -\sqrt{2}-1 \\ f(x_3) = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \\ f(x_4) = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow (g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4) =$

$= (\sqrt{2}-1)^3\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) + (-\sqrt{2}-1)^3\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) =$

$= -5\sqrt{26} - 21.$ (совпадает с первым и ответ такой же)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	5	6	6	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Тогда всего есть 2 возможных значения выражения

$(g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4)$:

$-5\sqrt{26}-21$ и $5\sqrt{26}-21$

Ответ: $-5\sqrt{26}-21$

$5\sqrt{26}-21$.

№2

$a^3+b^3=(abc-1)^2$

$a^3+b^3=(abc)^2-2abc+1$

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=(abc)^2-2abc+1$

№3

Пусть эти 4 числа – это a_1, a_2, a_3, a_4.

Пусть a_1 – число, которое равно какому-то другому из четверки. Т. е. $a_1=a_2$, $a_1=a_3$, $a_1=a_4$.

Тогда:

$a_1+a_1 \vdots 2$ $2a_1+2<1001 \Rightarrow 2a_1<999 \Rightarrow a_1 \leq 499$

Что и требовалось доказать.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	5	6	6	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Пусть a_1, a_2, a_3, a_4 – эти четыре числа, причём $a_1 = a_2$. ~~Тогда $a_1 + a_2 > 2$~~

Тогда сколько возможных вариантов значений a_3 и a_4? $a_3 \in [1, 1001 - a_1 - a_2 - 1]$, a_4 задаётся однозначно* При этом чтобы $a_3, a_4 \in N$ нам существовать нужно, чтобы $a_1 + a_2 \leq 999 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a_1 \leq 999 \Rightarrow$ $a_1 \leq 499$

Заметим, что для $a_1 = 1$ у a_3 есть 998 вариантов значений, для $a_1 = 2$ у a_3 есть 996 вариантов значений, для $a_1 = 3$ — 994 варианта и т.д. для $a_1 = 499$ есть 2 варианта. (* a_2 и a_4 задаются однозначно, так $a_2 = a_1$, $a_4 = 1001 - a_1 - a_2 - a_3$)

Тогда общее кол-во вариантов значений чисел a_3, a_4 – это сумма арифметической прогрессии:

$998 + 996 + 994 + \ldots + 2 = \left(\frac{998+2}{2}\right) 499 = 500 \cdot 499 =$

$= 249500.$

499 × 500 = 249500

~~Ответ: 249500 наборов~~

Ответ: 249500 наборов

№2

Пусть $X_{n-1} = a + X_{n-2}$

Тогда $2X_{n-1} - X_{n-2} = a + X_{n-2} + X_{n-1} - X_{n-2} =$

$= a + X_{n-1}$.

То есть если между числами X_{n-1} и X_{n-2}

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	5	6	6	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

разница d то
следующее число X_n
будет равно $X_{n-1}+d+1$,
если $X_{n-1}+d+1$ - составное (иначе $X_n = X_{n-1}+d+2$).
Тогда очень легко высчитать X_n, зная X_{n-1} и X_{n-2}

Например:

$X_1 = 4$
$X_2 = 6$ $\Rightarrow$ $X_3 = 9$ (+3), $X_4 = 14$ (+5), $X_5 = 20$ (+6), $X_6 = 27$ (+7) и т.д.

(цифры сверху демонстрируют, на сколько изменилось отличается это число от предыдущего (разность между ними)).

Продолжим этот ряд: (все проверки чисел на простоту сделаны либо на черновике, либо в уме).

4, 6 (+3), 9 (+5), 14 (+6), 20 (+7), 27 (+8), 35 (+9), 44 (+10), 54 (+11), 65 (+12), 77 (+13), 90 (+14), 104 (+15), 119 (+16), 135 (+17), 152 (+18), 170 (+19), 189 (+20), 209 (+21), 230 (+22), 252 (+23), 275 (+24), 299 (+25), 324 (+26), 350 (+27), 377 (+28), 405 (+29), 434 (+30), 464 (+31), 495 (+32), 527 (+33), 560 (+34), 594 (+35), 629 (+36), 665 (+37), 702 (+38), 740 (+39), 779 (+40), 819 (+41), 860 (+42), 902 (+43), 945 (+44), 989 (+45), 1034 (+46), 1080 (+47), 1127 (+48), 1175 (+49), 1224 (+50), 1274 (+51), 1325 (+52), 1377 (+53), 1430 (+54), 1484 (+55), 1539 (+56), 1595 (+57), 1652 (+58), 1710 (+59), 1769 (+60), 1829 (+61), 1890 (+62), 1952 (+63), ...

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	5	6	6	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2015 2079 2144 2210 2277 2345 2414 2484 2555 2627 2700 2774 2849 2925 3002 3080 3159 3239 3320 3402 3485 3569 3654 3740 3827 3915 4004 4094 4185 4277 4370 4464 4559 4655 4752 4850 4949 5049 5150

100-е число

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3485 \\ +\quad 84 \\ \hline 3569 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 3569 \\ +\quad 85 \\ \hline 3654 \end{array}$$

Ответ: 5049

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	5	6	6	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

$a^3+b^3=(abc-1)^2$

пусть $a=b$.

Тогда:

$a^3+b^3=(abc-1)^2$

$2a^3=(a^2c-1)^2$

$(a^2c-1)^2 \vdots 2$

$(a^2c-1)\vdots 2 \Rightarrow a^2c \not\vdots 2$

$(a^2c-1)^2 \vdots 4$

$2a^3 \vdots 4$

$a^3 \vdots 2$

$a \vdots 2 \Rightarrow$ a - чётное

$a^3 \vdots 8$

a - нечетное

c - нечётное

$a \neq b$

Если $a^3+b^3 \vdots k$, то $(abc-1)^2 \vdots k$

$abc-1 \vdots k$

$abc \not\vdots k$ $\quad (abc-1)^2 \vdots k^2$

$(a \not\vdots k, b \not\vdots k, c \not\vdots k)$

пусть $a \neq b$.

Если a - нечётное и b - нечётное, то a^3+b^3 - чётное $\Rightarrow (abc-1)^2$ - чётное $\Rightarrow abc-1$ - чётное $\Rightarrow abc$ - нечётное

$\Downarrow$

c - нечётное

Заметим, что

$a=1, b=2, c=2$ — подходящая тройка.

$a^3+b^3=(abc)^2-2abc+1$

$(abc)^2-2abc+1-a^3-b^3=0$

$D=4(a^3+b^3)(ab)^2$

$D=(2ab)^2-4(-a^3-b^3+1)(ab)^2$

$D=4a^2b^2+4(ab)^2(a^3+b^3-1)$

$D=4a^2b^2(a^3+b^3-1+1)$

$D=4a^2b^2(a^3+b^3)$

$c=\frac{2ab \pm 2ab\sqrt{a^3+b^3}}{2a^2b^2}$

$c=\frac{1+\sqrt{a^3+b^3}}{2ab}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	5	6	6	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Тогда a^3+b^3 и abc – взаимно простые. (то есть $НОД(a^3+b^3; abc)=1$)

Тогда если $a:k$ и $b:k \Rightarrow a^3+b^3:k$

$\Downarrow$

$abc:k \Rightarrow$ ✗ $\Rightarrow$ a и b – взаимно простые.

$НОД(a,b)=1$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

По Th при $a>2$, $b>2$, $d>2$ $\quad a^3+b^3 \neq d^{\geq 2}$

$\Downarrow$

Если решения есть, то

$a \leq 2$
$b \leq 2$ – перебор всевозможных значений.

Ответ: $a=1\ b=2\ c=2$

$a=2\ b=1\ c=2$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	2	6	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	12	X	~~16~~	11	58

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

$X_1; X_2; \dots X_k \dots; X_{100}$

$X_n \geq 2X_{n-1} - X_{n-2}$ (X_n - составное).

4; 6 $\Rightarrow$ $X_3 = 12 - 4 + 1 = 9$ (сост.); $9 - 6 = 3 \Rightarrow d_1 = 3$

$X_4 = 18 - 6_{+1} = 13$ (простое) $\Rightarrow X_4 = 14$ (сост.); ~~$13 - 6 = 7 \Rightarrow$~~ $14 - 9 = 5 \Rightarrow d_2 = 5$

$X_5 = 28 - 9 + 1 = 20$ (сост.) ~~$\Rightarrow$~~; ~~$X_5 = 20 - 14 = 6 \Rightarrow$~~ $d_3 = 6$.

По аналогии, используя сравнение, данное в условии, составим ряд из нескольких таких чисел:

4 (2) 6 (3) 9 (5) 14 (6) 20 (7) 27 (8) 35 (9) ~~44~~ 44 (10) 54 (11) 65 (12) 77 (13) 90 (14) 104

X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 X_6 X_7 X_8 X_9 X_{10} X_{11} X_{12} X_{13}

Разность между двумя последующими числами этой прогрессии увеличивается на 1.

Наименьший X_n будет в случае, когда число, большее на 1 числа $2X_{n-1} - X_{n-2}$ будет составным: $X_n = 2X_{n-1} - X_{n-2} + 1$

$X_4 = 2X_3 - X_2 + 2 = 18 - 6 + 2 = 14$ (т.к. 13 - простое)

Рассмотрим случаи, когда X_n может быть не минимальным, если d (разность между числами X_{K+1} и X_K) нечётна. X_K и X_K нечётен, значит X_{K+1} будет минимален (так как X_K нечётен, значит X_{K+1} будет составным числом).

$X_K + 1$ будет чётным (то есть X_{K+1} - составное число). Если X_K - чётное и d - чётное, то X_{K+1} также будет составным. Значит, разница между X_{99} и X_{100} будет 101.

~~$\frac{5+101}{2} \cdot 97$ (X_3 и X_{100}) $= 49 \cdot 106 = 5194$ (X_{100} больше, чем X_3).~~

~~$X_{100} = 5194 + X_3 = 5194 + 9 = 5203$~~ $\Rightarrow$ ~~Ответ: 5203.~~

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	2	6	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамках справа

Следующие после x_3 члены прогрессии (x_n) будут минимальные, то есть $2x_{n-1} - x_{n-2} + 1$. ~~Значит~~

Найдём сумму всех ~~чисел~~ между x_3 и x_{100} : всего 97 ~~чисел~~.

Арифм. прогрессия с разностью 1: $\frac{5+101}{2} \cdot 97 = 53 \cdot 97 =$

$= 5141$ (разность между x_{100} и x_3) $\Rightarrow x_{100} = x_3 +$

$+ 5141 = 5141 + 9 =$ (5150) - составное число.

Ответ: 5150.

(№3)

$a+b+c+d = 1001$; при $a; b; c; d \in \mathbb{N}$.

Так как a, b, c и d натуральные, значит никто из них не может принимать значение > 999.

$a; b; c; d \leq 998$, вот минимальная сумма, которую могут давать 3 числа равна 3. Мы ищем равные числа, значит какое число не может быть больше $(1001-2)/2 =$ (499). Чтобы числа неупорядоченные, значит нужно искать все неповторяющиеся варианты. Будет брать случаи, когда $a = b$.

Чтобы найти кол-во решений уравнения $x+y=z$, где x и $y \in \mathbb{N}$, при которых $x \neq y$, нужно $z/2$

Пример: $x+y=300 \Rightarrow$ x: 299 ... 151; y: 1 ... 149 $\Rightarrow$ 151 ... 299 $\Rightarrow$ 149 вар.

$x+y=301 \Rightarrow$ x: 300 ... 151; y: 1 ... 150 $\Rightarrow$ 151 ... 300 $\Rightarrow$ 150 вар.

Если сумма чёт., то $z/2 - 1$ вариантов, если нечёт., то $z(z-1)/2$ вариантов. a и b принимают от 499 до 1 $\Rightarrow$ $c+d$ принимают от 3 до 999

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	2	6	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~Для нечётных c+d~~

В промежутке от 3 до 999 499 нечётных чисел и 498 чётных.

Для нечётных c+d ($(c+d-1)/2$ – кол-во вариантов)

S_1 = Сумма для нечёт. $= \frac{1+499}{2} \cdot 499 = 250 \cdot 499 = 124\,750$

Для чётных c+d ($(c+d)/2 - 1$ вар.)

S_2 = сумма для чётных $\frac{1+498}{2} \cdot 498 = 249 \cdot 499 = 124\,251$

$S_0 = S_1 + S_2 = 124750 + 124251 = $ ~~248~~ 249001.

Так как a+b ~~чётно~~ a=b удовлетворяет от 499 до 1, а c+d удовлетворяет соответственно от 1001-998 до 1001-2 = от 3 до 999. Ответ: 249001.

№1

$f(x) = x^2 - 2x - 1$; $D = 4+4 = 8 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$g(x) = x^2 - 3x - 1$; $D = 9 + 4 = 13 \Rightarrow x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

~~f(x₃)~~ Найти: $g(x_1)^3 \cdot f(x_3) + g(x_2)^3 \cdot f(x_4)$

~~Вариант: Нужен корень $1+\sqrt{2}$ и $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$~~ Рассмотрим:

$f(g(x_1)) = (1+\sqrt{2})^2 - 3(1+\sqrt{2}) - 1 = 3 + 2\sqrt{2} - 3 - 3\sqrt{2} - 1 = -\sqrt{2} - 1$

$g(x_2) = (1-\sqrt{2})^2 - 3(1-\sqrt{2}) - 1 = 3 - 2\sqrt{2} - 3 + 3\sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} - 1$

$f(x_3) = \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) - 1 = \frac{11+3\sqrt{13}}{2} - 3 - \sqrt{13} - 1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

$f(x_4) = \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) - 1 = \frac{11-3\sqrt{13}}{2} - 3 + \sqrt{13} - 1 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$

Нужное значение $\sqrt{2}-1$ и $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ (+), а $-\sqrt{2}-1$ и $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ (−)

Варианты: $\oplus^3 \cdot \ominus + \ominus^3 \cdot \oplus$ ⇒ 2 случая (остальные случаи будут повторяться).

$\oplus^3 \cdot \oplus + \ominus^3 \cdot \ominus$

① $(\sqrt{2}-1)^3 \cdot \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) + (-\sqrt{2}-1)^3 \cdot \left(\frac{-3-\sqrt{13}}{2}\right) = \left((\sqrt{2})^3 - 7 + 3\sqrt{2}\right) \cdot \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) +$

$+ \left(-(\sqrt{2})^3 - 7 - 3\sqrt{2}\right)\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) = \frac{(\sqrt{2}^3 - 7 + 3\sqrt{2})(3+\sqrt{13})}{2} - \frac{(\sqrt{2}^3 + 7 + 3\sqrt{2})(3-\sqrt{13})}{2} =$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	2	6	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Производится только то, что написано с этой стороны листа в рамках строки

2 $\frac{3\sqrt{2}^3-21+3\sqrt{2}+\sqrt{13}\sqrt{2}^3-7\sqrt{13}+3\sqrt{26}}{2}$ =

$= \frac{3\sqrt{2}^3+21+3\sqrt{2}-\sqrt{13}\cdot\sqrt{2}^3-7\sqrt{13}-3\sqrt{26}}{2} =$

$= \frac{3\sqrt{2}^3-21+3\sqrt{2}+\sqrt{13}\sqrt{2}^3-7\sqrt{13}+3\sqrt{26}-3\sqrt{2}^3-21-3\sqrt{2}+\sqrt{13}\sqrt{2}^3+7\sqrt{13}+3\sqrt{26}}{2} =$

$= \frac{2\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{13}+6\sqrt{26}-42}{2} = \frac{4\sqrt{26}+6\sqrt{26}-42}{2} = 5\sqrt{26}-21$

(2) $(\sqrt{2}-1)^3\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^{2k}+(-\sqrt{2}-1)^3\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^{2k} =$

$= (\sqrt{8}-7+3\sqrt{2})\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^{2k}-(\sqrt{8}+7+3\sqrt{2})\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^{2k} =$

$= \frac{3\sqrt{8}+\sqrt{13}\cdot\sqrt{8}+21+7\sqrt{13}+3\sqrt{2}+3\sqrt{26}}{2} - \frac{3\sqrt{8}+\sqrt{13}\cdot\sqrt{8}+21+7\sqrt{13}+3\sqrt{2}+3\sqrt{26}}{2} =$

$= \frac{3\sqrt{8}-21+3\sqrt{2}-\sqrt{13}\cdot\sqrt{8}+7\sqrt{13}-3\sqrt{26}}{2} - \frac{3\sqrt{8}+\sqrt{13}\cdot\sqrt{8}+21+7\sqrt{13}+3\sqrt{2}+3\sqrt{26}}{2} =$

$= \frac{-2\sqrt{13}\cdot\sqrt{8}-6\sqrt{26}-42}{2} = -5\sqrt{26}-21$

Ответ: $5\sqrt{26}-21$; $-5\sqrt{26}-21$.

(№5)

$a^3+b^3=(abc-1)^2$, $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(abc-1)^2$

Пусть $a^2-ab+b^2=abc-1$, тогда $a^2+b^2+1=abc+ab=ab(c+1)$:2)

$c=\frac{a^2+b^2+1}{ab}-1$ $(a;b;c\in N)$. ~~Если ab - чёт. (т.е. a и b либо оба чётны либо разной чёт.), то a^2+b^2+1 нечёт. (если a и b - чёт.) или a^2+b^2+1 чёт (если a и b разной чёт.)~~ $\frac{a^2+b^2-2ab+2ab+1}{ab}-1$:2

$= \frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{2ab+1}{ab}-1 \Rightarrow ab=1$ или $ab=2$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	2	6	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамках справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

~~Значит при $a=1$ и $b=1$;~~

~~$c=2$ $\Rightarrow$ $(1;1;2)$ $(1;1;1)$~~

При $a=1$ и $b=2$ $c=2$

$a=2$ и $b=1$ $c=2$ $\Rightarrow$ $(1;2;2)$ и $(2;1;2)$.

~~Т.к. уравнение симметрично относительно a и b $\Rightarrow$~~

~~пусть $a=b$.~~ Проверка: Т.к. $a^2-ab+b^2=(abc-1)^2 \Rightarrow$

$a+b=(abc-1)^2$ - условие

~~$(1;1;1)$~~; $(1;2;2)$ и $(2;1;2)$ - удовл. условию.

Т.к. ур-ие ~~одна~~ симметрично относит. a и b $\Rightarrow$ ~~пусть $a=b$~~. ~~$2a^3=(a^2c-1)^2$~~ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x+x=a+b \\ y=ab \end{cases}$

~~Рассм случаи: $2a^3=(a^2c-1)(a^2c-1)$.~~

~~а если $2=a^2c-1$ и $a^3=a^2c-1$, то $a \notin \mathbb{N}$, т.к. a^3~~

~~если $2a=(a^2c-1)$ и $a^2=a^2c-1$ $\Rightarrow$~~

$a^2(c-1)=1 \Rightarrow a=1$; $c=2$ и $b=2$. ~~$2a=a^2c-1$~~

т.к. $a^3+b^3=(abc-1)^2$; ~~x^2-3y~~ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=$

$=(a+b)(a^2+b^2+2ab-3ab)=(a+b)((a+b)^2-3ab)=x(x^2-3y)$;

$(abc-1)^2=(yc-1)^2$; ~~$x(x^2-3y)=(yc-1)^2$~~ $x(x^2-3y)=(yc-1)^2$

$x=yc-1$ и $x^2-3y=yc-1 \Rightarrow x^2-3y=x$

$c=\frac{x}{y}+1$; $c=\frac{x^2-3y}{y}+1 \Rightarrow$ $a+b \vdots ab$ и $(1;1;1)$ - не подходит

$(a+b)^2-3ab \vdots ab$

~~от $a+b=x$; $ab=y$ $\Rightarrow$ $a=2$; $b=2$; $c=2$~~

Если a и b будут чётными, значит a^3+b^3 - чётное, значит $(abc-1)^2$ - чётное, значит $abc-1$ - чётное, значит abc - нечётное; ~~а т.к.~~ а т.к. a и b - чётное, значит abc должно быть чётным $\Rightarrow$ противоречие. ~~Если~~ Тогда $a+b$ не может нацело делиться на ab.

Ответ: $(1;2;2)$ и $(2;1;2)$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____

М	А	0	0	0	1	8	7	5	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	0	16	20	2	//	58

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Координаты точки $C\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$.

Очевидно, что прямые, пересекающие гиперболу $y = \frac{1}{x}$ имеют вид: $\begin{cases} y_1 = 2x + b_1 \ (1) \\ y_2 = \frac{1}{2}x + b_2 \ (2) \end{cases}$

Посчитаем точки A и B:

(1) $\begin{cases} y_1 = 2x + b_1 \\ C\left(-2; -\frac{1}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2} = 2(-2) + b_1 \Rightarrow \boxed{b_1 = 3{,}5}$

$\Rightarrow \underline{y_1 = 2x + 3{,}5}$

(2) $\begin{cases} y_2 = \frac{1}{2}x + b_2 \\ C\left(-2; -\frac{1}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot(-2) + b_2 \Rightarrow \boxed{b_2 = \frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \underline{y_2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$

$A = \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y_1 = 2x + 3{,}5 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{1}{x} = 2x + \frac{7}{2} \ / \ x \neq 0$

$2 = 2x^2 + \frac{7}{2}x$

$4x^2 + 7x - 2 = 0$

$D = 81 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-7+9}{8} = \frac{1}{4} \\ x_2 = \frac{-7-9}{8} = -2 \text{ - не подходит} \end{cases}$

$y = \frac{1}{1/4} = 4$

$\Rightarrow \boxed{A\left(\frac{1}{4}; 4\right)}$

$B = \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y_2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$

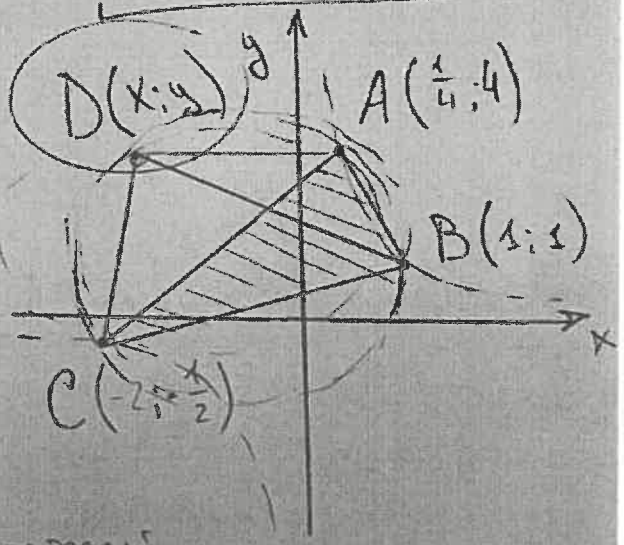
$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \ / \cdot 2x \neq 0$

$x^2 + x - 2 = 0$

$x_1 x_2 = -2$

$x_1 + x_2 = -1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \text{ - не подходит} \end{cases}$

$\Rightarrow \underline{\boxed{B(1; 1)}}$



центр ~

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ___

М	А	0	0	0	1	8	7	5	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Продолжается только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№7 – продолжение

По условию около $\triangle ABC$ описана ок-ть. Пусть т. $D(x;y)$ – центр этой ок-ти.

Очевидно, что расстояния между $AD : BD : DC = R$

Составим систему:

$$\begin{cases} R^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2 \\ R^2 = \left(\frac{1}{4}-x\right)^2 + (4-y)^2 \\ R^2 = (2+x)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 \end{cases}$$

Расстояние между двумя точками: $A(x_1;y_1)$; $B(x_2;y_2)$

$$AB^2 = (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R^2 = \frac{257}{16} - \frac{1}{2}x + x^2 - 8y + y^2 \\ R^2 = 2 - 2x + x^2 - 2y + y^2 \\ R^2 = \frac{17}{4} + 4x + x^2 + y + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R^2 = \frac{257}{16} - \frac{1}{2}x + x^2 - 8y + y^2 \\ 6y - \frac{3}{2}x - \frac{225}{16} = 0 \\ R^2 = \frac{17}{4} + 4x + x^2 + y + y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R^2 = \frac{257}{16} - \frac{1}{2}x + x^2 - 8y + y^2 \\ 6y - \frac{3}{2}x - \frac{225}{16} = 0 \\ 9y + \frac{9}{2}x - \frac{189}{16} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y - \frac{3}{2}x - \frac{225}{16} = 0 \\ 9y + \frac{9}{2}x - \frac{189}{16} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 24x - 96y = -225 \\ -72x - 144y = -189 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -\frac{11}{8} \end{cases} \Rightarrow D\left(-\frac{11}{8}; 2\right).$$

Ответ: $D\left(-\frac{11}{8}; 2\right)$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____

М	А	0	0	0	1	8	7	5	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

Дано:

x - кол-во орехов у Бори
y - кол-во орехов у Васи
z - кол-во орехов у Пети

$x = \max(x; y; z)$

$x + y + z = 1001$

Чтобы разделить все 1001 ореха на троих белчат нужно два разделения: (3 группы) [....][...][...] $x+y+z=n$

$\Rightarrow C^2_{n-1}$

$C^n_k = \frac{k!}{n!(k-n)!}$ ← формула сочетаний

После разделения имеем группы I; II; III

Заметим, что из C^2_{n-1} способов разделения орехов одинаковое кол-во, при которых каждая из групп имеет макс. кол-во орехов.

Очевидно, что искомое кол-во способов разделения орехов с учётом условия макс кол-ва орехов у Бори считается, как $\frac{C^2_{n-1}}{3}$.

Рассмотрим случай, когда Вася и Петя имеют одинаковое кол-во орехов. $\Leftrightarrow y = z$ Имеем варианты:

(1) $y = z = 333 \Rightarrow x = 335$ (мин. кол-во) | 333 способа |

$y = z = 332 \Rightarrow x = 337$

и т.д $y_n = z_n = y_{n-1} + 1$ ....

конечный: $y = z = 1$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____ | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 7 | 5 | 9 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано в этой стороне листа

№3 ← продолжение

II) $X = 334 \Rightarrow \begin{cases} y = 334 \\ z = 334 \end{cases}$

тогда у оставшегося $(z; y)$ будет 331 ... нод

$\Rightarrow 116 \cdot 2 =$ **332 способа**

Посчитаем искомое кол-во способов:

$$\frac{C_{1001-1}^{2}}{3} - 333 - 332 = \frac{1000!}{2!\,998!} \cdot 3 - 333 - 332 =$$

$$= \frac{1000 \cdot 999}{3 \cdot 2} - 333 - 332 = 500 \cdot 333 - 333 - 332 = 165\,835.$$

Ответ: 165 835 способов.

№2 $n \in \mathbb{N}$

$X_n = n^2 + 300$

$y_n = НОД(X_n; X_{n+1})$ ← максимизировать.

$\Leftrightarrow X_{n+1} = (n+1)^2 + 300$

$y_n = НОД(n^2 + 300; (n+1)^2 + 300) =$

$= НОД(n^2 + 300; n^2 + 2n + 301)$

По алгоритму Евклида:

$НОД(n^2 + 2n + 301; n^2 + 300) = НОД(n^2 + 300; n^2 + 2n + 301 - n^2 -$

$= НОД(n^2 + 300; 2n + 1)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____

М	А	0	0	0	1	8	7	5	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа

⇒

№2) - продолжение

Заметим, что выражение $2n+1$ при $n \in \mathbb{N}$ меняет чётность: n - чет $\Rightarrow 2n+1$ - нечёт; n^2+300 - чёт

$$НОД(n^2+300; 2n+1) = НОД(2n^2+600; 2n+1) = НОД(601; 2n+1)$$

$2n^2+600 \mid 2n+1$

$2n^2+2n \mid n-1$

$-2n+600$

$-2n-1$

601 !

Заметим, что 601 - простое число!

$2n+1 = 601$

$\Rightarrow 2n = 600$

$n = 300$

$НОД(601; 2n+1) = 601$

Проверим $n = 300$:

$НОД(300^2+300, (301)^2+300) = НОД(90300; 90901) = 1$

Заметим, что 90901 - простое! почему?

$\Rightarrow$ Очевидно, что $НОД(n^2+300; (n+1)^2+300) = 1$.

Ответ: 1.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____

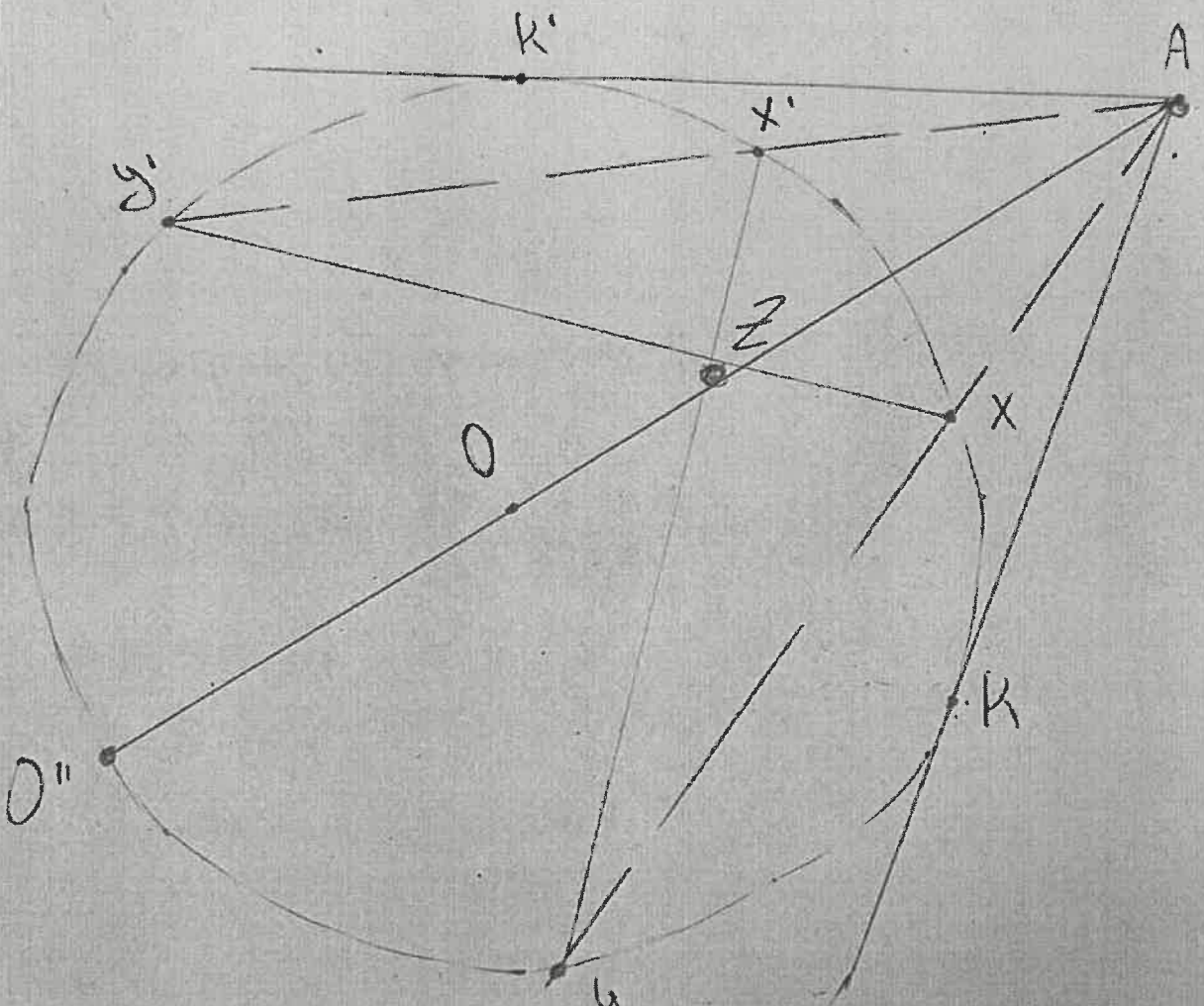
M	A	0	0	0	1	8	7	5	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяться только то, что записано в этой строке листа



Требуется доказать, что расстояние AZ = const при любой прямой, проходящей через точку A.

Очевидно, что R - радиус ок-ти; AO - расстояние и AK - касательная - имеют одинаковые значения. ?

Лист 6 из

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяться только то, что записано в этой столбце листа. В рамке справа

Пусть K' - симметрична точка отн. AO.

Рассмотрим $\triangle AYY'$.

По т. Менелая: $\frac{AX}{XY} \cdot \frac{YZ}{ZX'} \cdot \frac{Y'X'}{AY'} = 1$

В силу симметрии, AO делит отр-ть на 2 равные части. $AX' = AX$; $AY' = AY$.

Также $X'Y = Y'X$. $\Rightarrow$ $\frac{AX \cdot YZ \cdot YX}{XY \cdot ZX \cdot AY} = 1$

Проведём касательные AK и AK'. $\triangle AOK$.

Проведём OK в $OK \perp AK$ по св-ву. $OK^2 + AK^2 = AO^2$.

Вспомним св-во касательной и секущей:

$AK^2 = AX \cdot AY$ $\left[\frac{AX}{AY} = \frac{ZX'}{YZ}\right]$

Также т. Менелая $\frac{YX}{AX} \cdot \frac{AZ}{ZO'} \cdot \frac{O'Y'}{YY'} = 1$ $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{Y'Z}{ZX} = 2 \cdot \frac{ZO'}{AZ}$

$\frac{AX}{AY} = \frac{1}{2} \frac{AZ}{ZO'}$.

$AZ(AO - AZ + R) = const$

$AZ(const - X + const) = const$.

$\Rightarrow$ AZ - const при любой прямой через точку A.

$\rightarrow$?.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____

M	A	0	0	0	1	8	7	5	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в данной строке

№6 $\exists n: m > n$ при $A \in \mathbb{Z}$

$\frac{3^m+2}{3^n+2} = A$

Преобразуем выражение:

$3^m + 2 = A \cdot 3^n + 2A$

$3^m - A \cdot 3^n = 2A - 2$

$3^n(3^{m-n} - A) = 2(A-1)$

$\Rightarrow 2(A-1) \vdots 3 \Rightarrow (A-1) \vdots 3$

$A : \mathrm{mod}\ 1 \quad A = 4; 7; 10; 13; 16; 19 \ldots$

Рассмотрим $A = 4$:

$\frac{3^m+2}{3^n+2} = 4$

$3^m + 2 = 4 \cdot 3^n + 8$

$3^m - 4 \cdot 3^n = 6$

$3^n(3^{m-n} - 4) = 6$

Справа чётное; а слева - нечет. - противоречие !!!

$\frac{3^m+2}{3^n+2} = 7 + 3k$; k - целое.

$3^m + 2 = (7+3k)(3^n+2)$

$3^m + 2 = 7 \cdot 3^n + 14 + 3^n \cdot 3k + 6k$

$3^m - 7 \cdot 3^n - 3^n \cdot 3k = 12 + 6k$

$3^{n-1}(3^{m-n} - 7 - 3k) = 4 + 2k$

слева - чётное, а справа нечёт $\Rightarrow$ противоречие !!.

тогда $n - 1 = 0 \Rightarrow n = 1$ - единственное *

$n = 1 \Rightarrow 3^{m-n} = 4 + 2k + 7 + 3k \quad 3^{m-n} = 11 + 5k$

Проверим, могут ли в правой части степени 3.

пусть $4 + 2k = 3^p$

$2k = 3^p - 4$

ПЖ Посмотрим, когда $11 + 5k$ - степень 3

остатки по 5: 3; 4; 2; 1

$11 + 5k = 81$

$k = 14 \Rightarrow 3^{m-n} = 3^4$

$m = 5 \Rightarrow m^2 > n$

ТТ. 9.

Лист 8 из 8

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	1	5	4	2	2	5

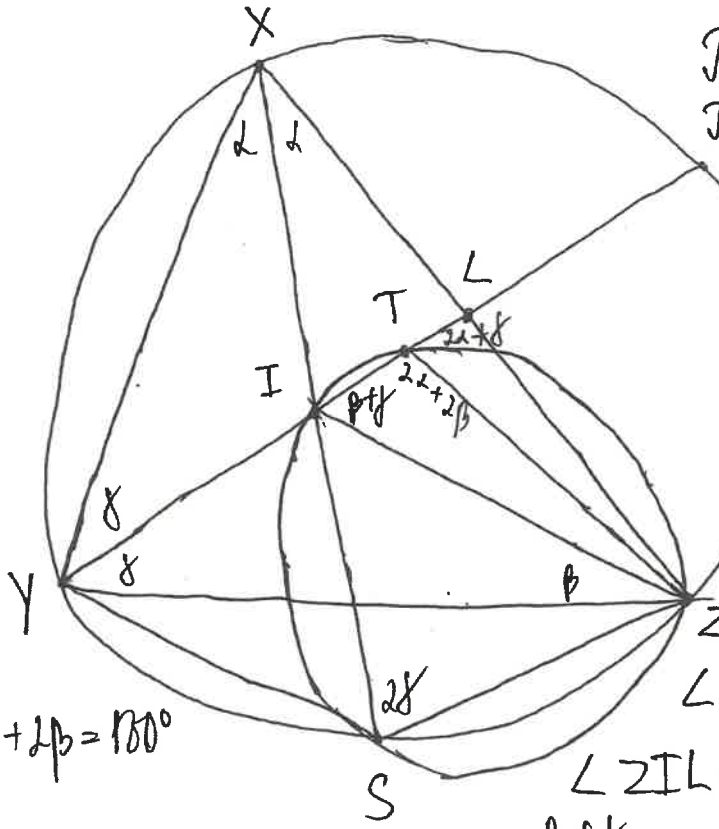
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
10	14	12	20	2	//	58

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4



Пусть $YT \cap XZ = L$

Пусть $\angle YXZ = 2\alpha$, $\angle ZYX = 2\gamma$, $\angle XZY = 2\beta$,

тогда $\angle YXS = \angle ZXS = \alpha$,

$\angle XYL = \angle ZYL = \gamma$,

$\angle YZI = \angle XZI = \alpha$,

т.к. XI, YI, ZI - биссектрисы

$\angle YLZ = 180° - \angle YZX - \angle LYZ = 2\alpha + \gamma$

$2\alpha + 2\gamma + 2\beta = 180°$

$\angle ZIL = 180° - \angle YLZ - \angle IZL = \beta + \gamma$

$\angle XSZ = \angle XYZ$ как вписанный

$\angle ITZ = 180° - \angle ISZ = 2\alpha + 2\beta$

$\angle IZT = 180° - \angle TIZ - \angle ITZ = \gamma - \beta$

$\angle YZT = \angle YZI + \angle IZT = \gamma \Rightarrow \angle YZT = \angle TYZ \Rightarrow YT = ZT$, что и требовалось доказать

~~Если T находится на отрезке YI, то $\beta > \gamma$~~

Рассмотрим второй случай, когда T лежит на отрезке YI, тогда $\beta + \beta > \gamma$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	1	5	4	2	2	5

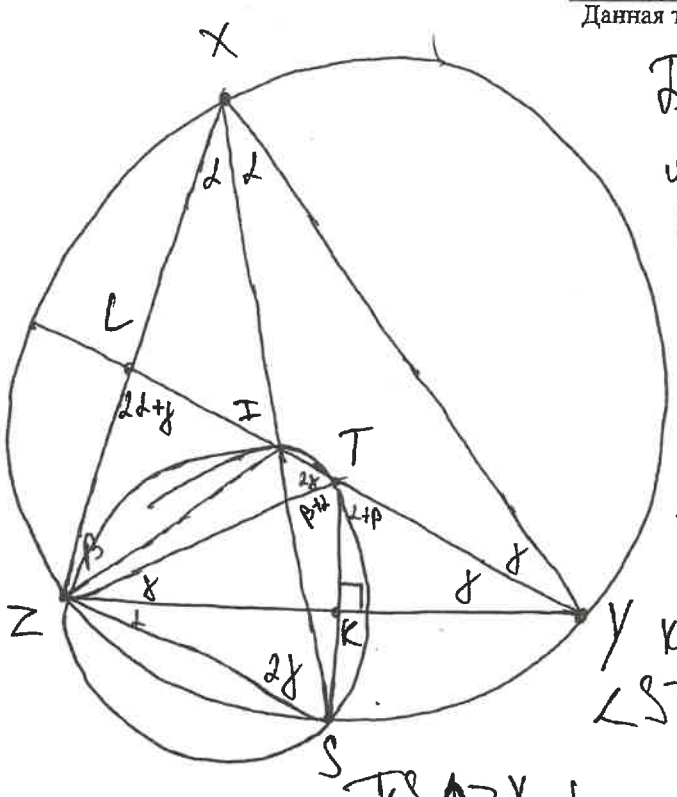
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4 продолжение



Будем использовать, что мы уже нашли из 1 первого случая

$\angle XIZ = 180° - \angle ZXI - \angle IZX = \beta + \alpha + 2\gamma$

$\angle ZIS = 180° - \angle ZIX = \beta + \alpha$

$\angle ZTS = \angle ZIS$ как вписанный

$\angle ZSI = \angle ZTI = 2\gamma$

Y как вписанный

$\angle STY = 180° - \angle ZTI - \angle ZTS = \alpha + \beta$

$TS \cap ZY = K$

$\angle TKY = 180° - \angle KTY - \angle KYT = \alpha + \beta + \gamma - 90°$

$\angle TZY = 180° - \alpha - \angle ZKT - \angle ZTK = \gamma \Rightarrow \angle TZY = \angle ZYT = \gamma$

$\Rightarrow ZT = TY$, что и требовалось

№3

Заметим, что может быть только два случая: когда одна пара равных и одна тройка равных. Если все четыре равны, то $4a = 1003$, что невозможно, а если две пары, то $2a + 2b = 1003$, что тоже невозможно. Тогда воспользуемся методом шаров и перегородок.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	1	5	4	2	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3 продолжение

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Пусть шары – единицы цифры, а перегородки обозначают разделение для слагаемых, тогда всего шаров 1003, перегородки 3, а мест для перегородок 1002, т.к. ноль быть не может. ~~Пусть~~ Рассмотрим для начала частные случаи:

1) пара 1 и 1: тогда две перегородки заняты, и у нас свободен 1001 шар и 1000 мест. ~~Пусть~~ Рассмотрим эти шары отдельно от пары равных. ~~Пусть, не сразу очевидно, перегородки стоят после 1 и 2 шаров~~ Перегородка после 1-го шара и после 1000-го шара обозначают одно и тоже, т.к. они обр. разделение 1000 и 1 как слагаемых. Тогда порождающих мест для перегородок $\frac{1000}{2}=500$ в силу симметрии

Для 2 и 2 аналогично, после разграничения равных остается 998 для перегородок, но порождает только $\frac{998}{2}=499$ в силу симметрии.

Для остальных аналогично, кол-во порождающих будет уменьшаться на 1. Просуммировав все случаи $500+499+\ldots+2+1=501\cdot250$ таких конфигураций. Заметим, что случай с тройками здесь тоже учтен, т.к. мы не ограничивали выбор 3-ей, а диагент мы могли 3-ье слагаемое подобрать так, чтобы оно было равно двум другим.

Ответ: $501\cdot250$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	1	5	4	2	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

Начнем последовательно выписать все числа по алгоритму

2 → 3 → 5 → 8 → 12 → 18 → 25 → 33 → 42 → 52 → 63 → 75 → 88 → 102 → 117 → 133 → 150 → 168 → 187 → 207 → 228 → 250 → 273 → 297 → 322 → 350 → 377 → 405 → 434 → 464 → 495 → 527 → 550 → 584 → 619

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35

2 → 3 → 6 → 10 → 15 → 21 → 28 → 36 → 45

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Выпишем первые числа по алгоритму. C_n^2

2, 3, 6, 10, 15... Заметим, что это C_n^2

Тогда попробуем по индукции доказать, что

$x_n = 2 \cdot C_{n-1}^2 - C_{n-2}^2 + 1$ - т.к. нам нужно число, большее полученного

База: 2 число - C_3^2, 3 число - C_4^2, тогда $x_5 = 2C_4^2 - C_3^2 + 1$

$= 12 - 3 + 1 = 10 = C_5^2$, подтвердилось

Переход $n-1 \to n$: по ПИ $x_{n-1} = C_{n-1}^2$, $x_{n-2} = C_{n-2}^2$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	1	5	4	2	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2 продолжение

Нужно доказать

$C_n^2 \stackrel{?}{=} 2C_{n-1}^2 - C_{n-2}^2 + 1$

$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{2(n-1)(n-2)}{2} - \frac{(n-2)(n-3)}{2} + 1 \quad | \cdot 2$

$n(n-1) = 2n^2 - 6n + 4 - n^2 + 5n - 6 + 2$

$n^2 - n = n^2 - n$ подтвердилось

Если $x_2 = C_3^2$, тогда $x_{99} = C_{100}^2$ Ответ: C_{100}^2

№1

~~Корни $f(x)$ и $g(x)$ равны~~

Корни $f(x) = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$, $g(x) = 2 \pm \sqrt{5}$

Подставим все возможные значения в качестве x_1, x_2, x_3 и x_4 и найдем значение выражения

~~$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}; \frac{3-\sqrt{13}}{2}; 2+\sqrt{5}; 2-\sqrt{5}\right)$:~~

~~$\left((2+\sqrt{5})^2 - 4(2+\sqrt{5}) + 1\right)^3 \cdot \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) + \left((2-\sqrt{5})^2 -$~~

Найдем чему равняется $g(x_1), g(x_2), f(x_3), f(x_4)$:

$g\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) = \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) + 1 = \frac{9}{4} + 3\sqrt{13} + \frac{13}{2} - 6 - 2\sqrt{13}$

$+ 1 = \frac{15}{4} + \sqrt{13}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	1	5	4	2	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1 продолжение

$$g\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) = \frac{9}{4} - 3\sqrt{13} + \frac{13}{2} - 6 + 2\sqrt{13} + 1 = \frac{15}{4} - \sqrt{13}$$

$$f\left(2+\sqrt{5}\right) = \left(2+\sqrt{5}\right)^2 - 3\left(2+\sqrt{5}\right) + 1 = 4 + 4\sqrt{5} + 5 - 6 - 3\sqrt{5} + 1 = 4 + \sqrt{5}$$

$$f\left(2-\sqrt{5}\right) = 4 - 4\sqrt{5} + 5 - 6 + 3\sqrt{5} + 1 = 4 - \sqrt{5}$$

$$(x_1; x_2; x_3; x_4) = \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}; \frac{3-\sqrt{13}}{2}; 2+\sqrt{5}; 2-\sqrt{5}\right):$$

$$\left(\frac{15}{4}+\sqrt{13}\right)^3 \cdot \left(4+\sqrt{5}\right) + \left(\frac{15}{4}-\sqrt{13}\right)^3 \cdot \left(4-\sqrt{5}\right) = \left(\frac{3375}{64} + \frac{675}{16}\sqrt{13} + \frac{195}{4} + 13\sqrt{13}\right)\left(4+\sqrt{5}\right) + \left(\frac{3375}{64} - \frac{675}{16}\sqrt{13} + \frac{195}{4} - 13\sqrt{13}\right)\left(4-\sqrt{5}\right) =$$

$$= \left(\frac{7820}{64} + \frac{883}{16}\sqrt{13}\right)\left(4+\sqrt{5}\right) + \left(\frac{7820}{64} - \frac{883}{16}\sqrt{13}\right)\left(4-\sqrt{5}\right) = \frac{7820}{16} + \frac{7820}{64}\sqrt{5} + \frac{883}{4}\sqrt{13} + \frac{883}{16}\sqrt{65} + \frac{7820}{16} - \frac{7820}{64}\sqrt{5} - \frac{883}{4}\sqrt{13} + \frac{883}{16}\sqrt{65} = \frac{7820 + 883\sqrt{65}}{8}$$

$$(x_1; x_2; x_3; x_4) = \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}; \frac{3-\sqrt{13}}{2}; 2-\sqrt{5}; 2+\sqrt{5}\right):$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	1	5	4	2	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1 продолжение

$$\left(\frac{15}{4}+\sqrt{13}\right)^3\left(4-\sqrt{5}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{13}}{4}\right)^3\left(4+\sqrt{5}\right)=\left(\frac{3375}{64}+\frac{675}{16}\sqrt{13}+\frac{585}{4}+13\sqrt{13}\right)\left(4-\sqrt{5}\right)+\left(\frac{3375}{64}-\frac{675}{16}\sqrt{13}+\frac{585}{4}-\sqrt{13}\cdot 13\right)\left(4+\sqrt{5}\right)=$$

$$=\frac{12735}{16}-\frac{6495}{64}\sqrt{5}+\frac{883}{16}\sqrt{13}-\frac{883}{16}\sqrt{65}+\frac{12735}{16}+\frac{6495}{64}\sqrt{5}-\frac{883}{16}\sqrt{13}-\frac{883}{16}\sqrt{65}=\frac{12735-883\sqrt{65}}{8}$$

Два остальных случая расположения корней можно не рассматривать, т.к. они симметричны

Ответ: $\frac{12735+883\sqrt{65}}{8}$; $\frac{12735-883\sqrt{65}}{8}$

№5

a^3+b^3 может быть квадратом тогда, когда это a и b 1 и 2, т.к. $1^3+2^3+3^3+\dots n^3=(1+2+3+\dots n)^2$

Тогда нам подходят тройки $(a,b,c)=(1,2,1)$, $(2;1;1)$ Ответ: $(1;2;1)$ и $(2;1;1)$

Можно было подойти $a=2, b=2$, но тогда $abc\geq 5$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	1	5	4	2	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

$a^3+b^3=(abc)^2+2abc+1$

$a^3+(b^3-1)-(abc)^2-2abc=0 \quad \vdots a$

$\vdots a \quad \vdots a \quad \vdots a \quad \vdots a$

$a^3+(b-1)(b^2+b+1)-(abc)^2-2abc=0$

$\vdots a$ либо $\vdots a$

Аналогичное рассуждение можно провести и в обратную сторону

$b \underset{a}{\equiv} 1$

$0+1=1^2$

$b^2+b+1 \underset{a}{\equiv} 0 \qquad (b^2+1)^2 \underset{a}{\equiv} b$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	0	9	6	6	7	2	5

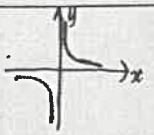
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	16	0	2	111	58

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1) $y = \frac{1}{x}$



$x_c = -2 \Rightarrow y_c = \frac{1}{x_c} = -\frac{1}{2}$

Прямая с ср.геом: 2, проходящая через C, это $2x + \frac{7}{2}$.

Прямая с ср.геом $\frac{1}{2}$, проходящая через C, это $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Пересечение первой прямой и гиперболы - это точка A:

$2x + \frac{7}{2} = \frac{1}{x} \Rightarrow A\left(\frac{1}{4}; 4\right)$

Пересечение второй прямой и гиперболы - это точка B:

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{x} \Rightarrow B(1; 1)$.

Обозначим за c ср. пер. к AC, за d ср. пер. к BC.

Середина AC - $\left(\frac{x_c + x_a}{2}; \frac{y_c + y_a}{2}\right) = \left(-\frac{7}{8}; \frac{7}{4}\right)$.

Середина BC - $\left(\frac{x_b + x_c}{2}; \frac{y_b + y_c}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

Тогда прямая c: $-\frac{1}{2}x + \frac{21}{16}$; прямая d: $-2x - \frac{3}{4}$.

Пересечение c и d будет центром описанной окружности, т.к. центр описанной окружности находится на пересечении серединных перпендикуляров:

$-\frac{1}{2}x + \frac{21}{16} = -2x - \frac{3}{4} \Rightarrow x_0 = -\frac{11}{8}$; $y_0 = 2 \Rightarrow$ центр описанной окружности около $\triangle ABC$ имеет координаты $\left(-\frac{11}{8}; 2\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{11}{8}; 2\right)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	0	9	6	6	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2) $n \in \mathbb{N}$

$x_n = n^2 + 300$

$d_n = НОД(x_n; x_{n+1})$

$d_{max} = ?$

По алгоритму Евклида $НОД(x_n; x_{n+1}) = НОД(n^2+300; (n+1)^2+300) =$

$= НОД(n^2+300; n^2+2n+301) = НОД(n^2+300; n^2+2n+301-n^2-300) =$

$= НОД(n^2+300; 2n+300)$.

Если n кратно 2, то $n = 2k \Rightarrow НОД(n^2+300; 2n+1) = НОД(4k^2+300; 4k+1) =$

$= НОД(300-k; 4k+1) = НОД(300-k; 1201) \leq 1201$

Если n не кратно 2, то $n = 2k+1 \Rightarrow НОД(n^2+300; 2n+1) = НОД(4k^2+4k+301; 4k+3) =$

$= НОД(k+301; 4k+3) = НОД(k+301; -1201) = НОД(k+301; 1201) \leq 1201$.

То есть $НОД(x_n; x_{n+1}) \leq 1201 \Rightarrow max = 1201$.

При 1201 получается при $n = 600$.

Ответ: 1201.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	0	9	6	6	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3) Пусть Боря, Вася, Петя получили x, y, z орехов.

$x+y+z=1001$ (по условию).

Методом шаров и перегородок получаем, что таких троек C^2_{1000}.

Теперь необходимо исключить все тройки, где есть повторяющиеся значения.

Повторяться может любое число от 1 до 500, при этом строго дважды, ведь 1001 не кратно 3.

Тройку чисел с повторяющимися значениями можно упорядочить тремя способами, т.е. эти тройки были посчитаны $3 \cdot 500 = 1500$ раз.

Из всех оставшихся троек нужно выбрать такие, что $x > y > z$.

Т.к. для фиксированных натуральных различных чисел a, b, c существуют 6 способов их упорядочить, то количество оставшихся троек нужно поделить на 6.

Итого имеем: $\left(\frac{C^2_{1000} - 1500}{6}\right) = \left(\frac{500 \cdot 999 - 1500}{6}\right) = 83.000$ (способов).

Ответ: 83.000.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	0	9	6	6	7	2	5

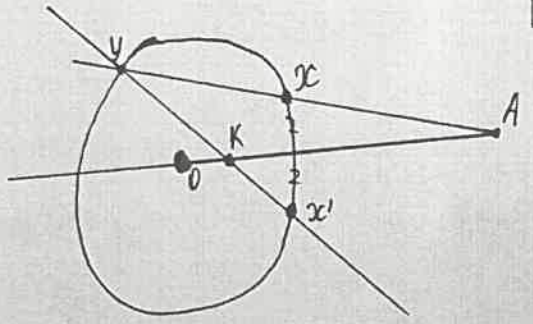
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4



2. т. д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	0	9	6	6	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5) $m > n$

$\left(\frac{3^m+2}{3^n+2}\right) \in Z$

$m > n^2$ – ?

$\frac{3^m+2}{3^n+2} = K$; $K \in Z$.

$m > n \Rightarrow 3^m+2 > 3^n+2 \Rightarrow K > 1$.

$K \cdot 3^n + 2 \underset{3^n}{\equiv} 3^m + 2$

$K \cdot 2 \underset{3^n}{\equiv} 2$

$K \underset{3^n}{\equiv} 1 \Rightarrow K = t \cdot 3^n + 1$; $t \in Z \Rightarrow t \in N$, т.к. $K > 1$.

$(t \cdot 3^n + 1)(3^n + 2) = 3^m + 1$

$3^n(t \cdot 3^n + 2t + 1) = 3^m$

$t \cdot 3^n + 2t + 1 = 3^{m-n} \Rightarrow 3^{m-n} > 3^n \Rightarrow 3^{m-n}$ кратно 3^n, $t \cdot 3^n$ кратно 3^n.

Значит $2t+1$ кратно $3^n \Rightarrow 2t+1 > 3^n \Rightarrow 3t > 3^n \Rightarrow t > 3^{n-1}$.

$K = t \cdot 3^n + 1 > t \cdot 3^n > 3^{n^2-n}$

$3^m + 2 = K \cdot (3^n + 2) > 3^{n^2-n} \cdot (3^n + 2) = 3^{n^2} + 2 \cdot 3^{n^2-n} > 3^{n^2} + 2$

$3^m > 3^{n^2} \Rightarrow m > n^2$.

ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	9	6	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	0	~~16~~	20	0	11	~~56~~

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 2.

Попробуем просто продолжить ряд.

~~4; 6; 8; 10~~ 4; 6; 8; 10

Можно заметить, что каждое следующее число на 4 больше предыдущего, ещё можно заметить, что все члены последовательности можно записать в виде $4n$; где n - порядковый номер числа.

Докажем это по индукции.

Тогда база. приведена выше, начиная со второго члена правило работает.

Пусть правило выполняется для всех чисел до n =>

=> докажем переход от n к $n+1$

Тогда число с порядковым номером n равно $4n$, а число до него - $4(n-1)$

=> следующее число - $2 \cdot 4n - 4(n-1) = 2 \cdot 4n - 4n + 4 = 4n + 4 = 4(n+1)$

=> число с порядковым номером $n+1$ равно $4(n+1)$ =>

=> переход доказан =>

=> число с порядковым номером n равно 2^{2n}

=> ~~чего-то~~

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	9	6	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 2.

Попробуем продолжить ряд по заданному правилу:

4; 6; 8; 10; 12...

Можно заметить, что каждое следующее число на 2 больше предыдущего, а также равно $2(n+1)$, где n - его порядковый номер.

Докажем это по индукции.

База приведена выше.

Докажем переход. (Пусть верно для всех чисел до n)

Пусть n-тое число в ряду равно $2(n+1)$, тогда докажем, что $(n+1)$-ое число - $2\cdot((n+1)+1) = 2(n+2)$

Тогда $(n+1)$ое число вычисляется так:

$$\underbrace{2\cdot(2(n+1))}_{n\text{-ое число}} - \underbrace{2n}_{n-1\text{ число}} = 4n+4-2n = 2n+4 = 2(n+2) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ утверждение действительно верное $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ n-ое число в ряду равно $2(n+1)$

$\Rightarrow$ 100-ое число - $2\cdot(100+1) = 2\cdot 101 = 202$.

Ответ: 202.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	9	6	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 1.

Заметим, что

$g(x) = f(x) - x$, а

$f(x) = g(x) + x$

Тогда $(g(x_1))^3 = (f(x_1) - x_1)^3 = -x_1^3$

$f(x_1) = 0$ (т.к. x_1 – корень $f(x)$)

$f(x_3) = g(x_3) + x_3 = x_3$

$g(x_3) = 0$

$(g(x_2))^3 = (f(x_2) - x_2)^3 = -x_2^3$

$f(x_2) = 0$

$f(x_4) = g(x_4) + x_4 = x_4$

$g(x_4) = 0$

$\Rightarrow$ выражение принимает вид $(-x_1)^3 \cdot x_3 - x_2^3 \cdot x_4$

$x_1; x_2 = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$x_3; x_4 = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

; по т. Виета $x_1 x_2 = -1$, $x_3 x_4 = -1$, $x_1 + x_2 = 2$, $x_3 + x_4 = 3$

$\Rightarrow$ всего 4 варианта: ~~$x_1 = 1+\sqrt{2}$, $x_2 = 1-\sqrt{2}$~~ возможно распределение корней:

1) $x_1 = 1+\sqrt{2}$; $x_2 = 1-\sqrt{2}$; $x_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$; $x_4 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$

$\Rightarrow (1+\sqrt{2})^3 \cdot \frac{3+\sqrt{13}}{2} - (1-\sqrt{2})^3 \cdot \frac{3-\sqrt{13}}{2}$

$\Rightarrow -(1+\sqrt{2})^3 \cdot \frac{3+\sqrt{13}}{2} - (1-\sqrt{2})^3 \cdot \frac{3-\sqrt{13}}{2}$

$= -\left((7+5\sqrt{2}) \cdot \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) + (7-5\sqrt{2}) \cdot \frac{3-\sqrt{13}}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	9	6	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$= -(21+5\sqrt{26})$

2 вариант:

$x_1 = 1-\sqrt{2}$; $x_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

$x_2 = 1+\sqrt{2}$; $x_4 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$

$$\Rightarrow -\left|(7-5\sqrt{2})\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)+(7+5\sqrt{2})\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)\right| = -(21-5\sqrt{26})$$

3 вариант:

$x_1 = 1+\sqrt{2}$; $x_3 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$

$x_2 = 1-\sqrt{2}$; $x_4 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

$$\Rightarrow -\left|(7+5\sqrt{2})\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)+(7-5\sqrt{2})\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\right| = -(21-5\sqrt{26})$$

4 вариант:

$x_1 = 1-\sqrt{2}$; $x_3 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$

$x_2 = 1+\sqrt{2}$; $x_4 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

$$\Rightarrow -(7-5\sqrt{2})\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)+(7+5\sqrt{2})\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) = -(21+5\sqrt{26})$$

$\Rightarrow$ 2 варианта значений этого выражения:

$-21+5\sqrt{26}$ или $-21-5\sqrt{26}$

Ответ $-21 \pm 5\sqrt{26}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	9	6	8	2	5

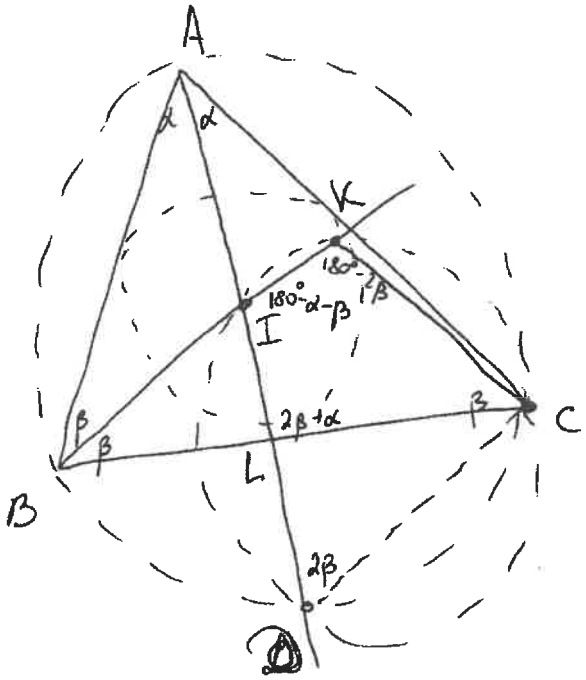
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 4.



Решение:

I Лучи AI и BI проходят через центр вписанной окружности => => биссектрисы.

Обозначим углы, на которые они делят углы CBA и BAC за β и α (на картинке)

II Тогда ∠ADC = 2β (т.к. опирается на дугу AC описанной окружности ΔABC

III Тогда чет-к DIKC - вписан в окружность, проходящую через точки C; I; D (по условию K тоже лежит на этой окружности) => => ∠IKC = 180° - ∠ADC (по св-ву вписанного четырёхугольника.)

IV Посчитаем угол CIK = CLI = 2β + α (как внешний к тр-ку ALB), а угол LIK = 180° - α - β (= ∠AIB как вертикальный)

V Теперь посчитаем угол KCB в чет-ке IKCL:

∠C = 360° - (180° - 2β + 180° - α - β + 2β + α) = β

VI Тогда в Δ BKC ∠KBC = ∠KCB = β => этот треугольник равнобедренный => BK = KC что.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	9	6	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 3.

— — — —

У нас есть 4 места, куда надо разложить 1001 единичку. Не может быть пустых мест => изначально на каждом одна единичка => осталось распределить 997 единиц.

1 1 1 1

Предлагается на первые 2 места прибавлять по одной единичке, смотреть, сколько ~~ва~~ вариантов положить сколько-то единичек на третье место, остальное оставляется на четвёртом

1 1 1 1 => 997+1 вариантов на 3-е место. (от „положить ничего" до „положить всё") => 998 вар.

+ каждый раз из получившегося кол-ва вариантов надо ~~взять~~ делить на 2, т.к. числа у нас не упорядочены => по 2 раза посчитан каждый вариант => $\frac{998}{2}$ вариантов. = 499 в.

2 2 1 1 ~~998 вар~~ 995 ~~и~~ единичек осталось =>

=> 996/2 = 498 вар.

и так далее.

пока (1001 − 2) // 2 = 499 - первые два числа не по 499,

в такой ситуации 2 варианта : 499 499 1 2

499 499 2 1

=> кол-во вариантов - сумма чисел от

2 до 499 = $\frac{499 \cdot 500}{2} - 1 = 250 \cdot 499 - 1 = 124749$ вар.

Задача № ⑤ Подходят тройки (1;2;5) и (2;1;5)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	0	9	4	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	6	12	16	2	111	56

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1.

$f(x) = x^2 - 2x - 1 = (x - x_1)(x - x_2)$

$D = 4 + 4 = 8$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$g(x) = x^2 - 3x - 1 = (x - x_3)(x - x_4)$

$D = 9 + 4 = 13$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

Для опр. знач. для x_1, x_2, x_3, x_4 всего возможно 4 случая:

(1) $\begin{cases} x_1 = 1+\sqrt{2} \\ x_2 = 1-\sqrt{2} \\ x_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ x_4 = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1 = 1-\sqrt{2} \\ x_2 = 1+\sqrt{2} \\ x_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ x_4 = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x_1 = 1+\sqrt{2} \\ x_2 = 1-\sqrt{2} \\ x_3 = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \\ x_4 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x_1 = 1-\sqrt{2} \\ x_2 = 1+\sqrt{2} \\ x_3 = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \\ x_4 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$

Пусть $y = (g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4)$

Теперь пусть x_{mn} – значение корня x_m из n-ого случая, а y_n – знач. y из n-ого случая; причем $m, n \in \{1; 2; 3; 4\}$

Тогда заметим, что:

$\begin{cases} x_{12} = x_{23} \\ x_{22} = x_{13} \\ x_{32} = x_{43} \\ x_{42} = x_{33} \\ x_{11} = x_{24} \\ x_{21} = x_{14} \\ x_{31} = x_{44} \\ x_{41} = x_{34} \end{cases}$

Исходя из этого знач. y:

$y_1 = (g(x_{11}))^3 f(x_{31}) + (g(x_{21}))^3 f(x_{41}) = (g(x_{24}))^3 f(x_{44}) + (g(x_{14}))^3 f(x_{34}) = y_4$

$y_2 = (g(x_{12}))^3 f(x_{32}) + (g(x_{22}))^3 f(x_{42}) = (g(x_{23}))^3 f(x_{43}) + (g(x_{13}))^3 f(x_{33}) = y_3;$

Отсюда выходит, что из 4 случаев 2 повторяются, поэтому рассмотрим лишь случаи 1 и 2:

Для случая (1):

$g(x_1) = (1+\sqrt{2})^2 - 3 - 3\sqrt{2} - 1 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 3 - 3\sqrt{2} - 1 = -1 - \sqrt{2} = -x_1$

$(g(x_1))^3 = -(x_1)^3 = -7 - 5\sqrt{2}$

$f(x_3) = \frac{9 + 6\sqrt{13} + 13}{4} - 4 - \sqrt{13} = \frac{11 + 3\sqrt{13} - 2\sqrt{13} - 8}{2} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} = x_3$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	0	9	4	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$g(x_2) = 1 - 2\sqrt{2} + 2 - 3 + 3\sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} - 1 = -x_2$

$(g(x_2))^3 = -(x_2)^3 = 5\sqrt{2} - 7$

$f(x_4) = \frac{9 - 6\sqrt{13} + 13}{4} - 3 + \sqrt{13} - 1 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} = x_4$

Подставим знач. в y:

$g(x_1)^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4) = \frac{-(7 + 5\sqrt{2})(3 + \sqrt{13})}{2} + \frac{(5\sqrt{2} - 7)(3 - \sqrt{13})}{2} =$

$= \frac{-21 - 7\sqrt{13} - 5\sqrt{26} - 15\sqrt{2} + 15\sqrt{2} - 5\sqrt{26} - 21 + 7\sqrt{13}}{2} = -21 - 5\sqrt{26}$

Для случая (2):

$(g(x_1))^3 = -x_1^3 = 5\sqrt{2} - 7$

$(g(x_2))^3 = -x_2^3 = -7 - 5\sqrt{2}$

$f(x_3) = x_3 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$

$f(x_4) = x_4 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$

$(g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4) = \frac{(5\sqrt{2} - 7)(3 + \sqrt{13})}{2} - \frac{(7 + 5\sqrt{2})(3 - \sqrt{13})}{2} =$

$= \frac{15\sqrt{2} + 5\sqrt{26} - 21 - 7\sqrt{13} - 21 + 7\sqrt{13} - 15\sqrt{2} + 5\sqrt{26}}{2} = 5\sqrt{26} - 21$

Ответ: $\{-21 - 5\sqrt{26};\ 5\sqrt{26} - 21\}$

№2.

Пусть $x_1 = 4$ $x_n \in N$

$x_2 = 6$ $n \in N$

$x_n > 2x_{n-1} - x_{n-2}$

Поскольку x_n наименьшее из тех, что удовл. усл., то:

$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} + 1$, вычтем x_{n-1}:

$x_n - x_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-2} + 1$, отсюда получается, что разность между текущим и предыдущим числом на 1 ед. больше разности между предыдущим и предпредыдущим.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	0	9	4	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Т.к. если для эл. x_2 и x_1 разница равна 2, то для эл. x_3 $x_3 - x_2 = 3$, $x_4 - x_3 = 4$, ..., $x_{100} - x_{99} = 100$

Отсюда можно выразить $x_n = x_{n-1} + n$

Тогда $x_{100} = x_{99} + 100 = x_{98} + 99 + 100 = \ldots = x_1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$

Найдём сумму от 2 до 100 включ. с помощью формулы суммы арифм. прогрессии:

$\frac{(2+100)}{2} \cdot (100 - 2 + 1) = 51 \cdot 99 = 5100 - 51 =$

$= 5049$, тогда $x_{100} = 4 + 5049 = 5053$

$\times \begin{matrix} 51 \\ 99 \end{matrix}$

$\begin{matrix} 459 \\ 459 \\ \hline 5049 \end{matrix}$

Ответ: 5053

№ 3.

Пусть $a + b + c + d = 1001$ где a, b, c, d – натур., не обязательно различ. числа

Заметим, что набор чисел не может сост. из 4 одинаковых чисел или попарно равных, поскольку в таком случае общ. сумма будет чётна, что невозможно, поскольку сумма чисел должна быть равна нечетному числу. Таким образом, рав-во среди чисел из набора возможно только при 2 равн. эл. набора или 3 равных эл. набора. В случае с 3 равн. числами, мин. числом для эл. из тройки равных явл. 1 в соотв. наборе чисел: (1; 1; 1; 998), а макс. числом будет явл. 333 для соотв. набора: (333; 333; 333; 2). Таким образом, эл. из тройки равных могут принять одно из 333 знач. отличных от остальных. Четвертый эл. в этом случае может занять любую из четырех позиций набора при каждом знач. эл. тройки равных чисел.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	0	9	4	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Таким образом, кол-во наборов с 3 равными числами равняется $4 \cdot 333 = 1332$

Для случая с 2 равными эл. и 3 эл., не равные между собой и отличные от пары равн. чисел явл. числа 1 и 2 в наборе чисел $(1; 2; 499; 499)$, а мин. знач. чисел из пары равн. явл. 1

Заметим, что сумма чисел, не принадлеж. паре равн. чисел может быть равна $3, 5, 7, \dots, 999$, а в каждом из этих случаев кол-во определений для каждого числа из суммы равно соотв. $1, 2, 3, \dots, 499$, тогда общ. число возм. комбинаций:

$12 \cdot \frac{(1+499)}{2} \cdot 499 = 12 \cdot 250 \cdot 499 = 3000 \cdot 499 = 1497000$,

где 12 - число возм. перестановок чисел в наборе с учетом повторения

Поскольку равенство 3 эл. явл. частным сл. равенства 2 эл. из набора, ответом на задание будет 1497000

Ответ: 1497000

~~5~~

$a^3 + b^3 = (abc-1)^2$; $a, b, c \in N$

$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = (abc-1)^2$

~~Пусть $a+b = a^2 - ab + b^2$, тогда~~ Отсюда получаем:

$$\begin{cases} a+b = abc-1 \\ a^2 - ab + b^2 = abc-1 \\ a+b = a^2 - ab + b^2 \end{cases}$$

, откуда получаем решения $(1;1;2)$, $(1;2;2)$ и $(2;1;2)$;

В остальных случаях сумма кубов должна быть равна квадрату какого-либо числа, что не явл. возможным для натуральных чисел, за искл. уже указанных трех чисел

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	0	9	4	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

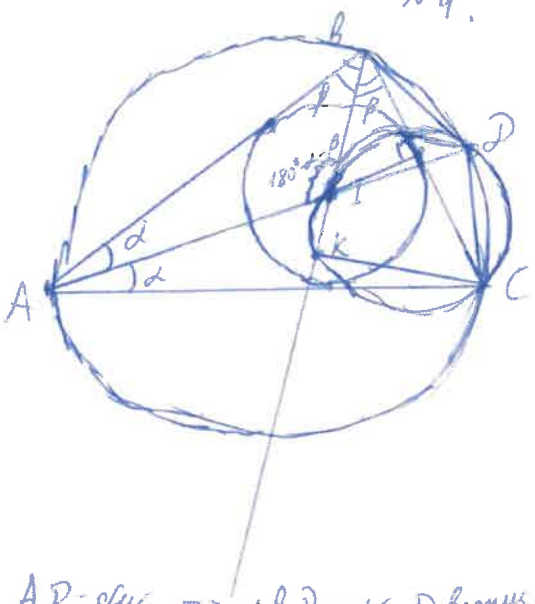
1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Ответ: (1;1;2); (0;1;2); (1;2;2).

№4.



$\triangle ABC$ - неравнобедренный.

Пусть $\angle BAC = 2\alpha$ $\angle ACB = 180° - 2\alpha - 2\beta$

$\angle ABC = 2\beta$

$\angle IAB = \alpha$

$\angle IBA = \beta$

$\angle AIB = 180° - \alpha - \beta$

~~$\angle AIK = 180$~~

$\angle ABD = \angle ABC + \angle DBC = 2\beta + \alpha$

~~AD - бис. $\Rightarrow \cup BD = \cup CD$ в опис. окр. $\angle DBC = \angle BAD = \alpha$ как впис. уг., опир. на равн. дуги.~~

$\angle AID = \angle AIB = 180° - \alpha - \beta$

т. K, I, D, C, лежат на 1 окр. $\Rightarrow KIDC$ впис.

$\angle DBC = \angle BAD = \alpha$ как впис. уг., опир. на равные дуги

$\angle KCD = 180° - \angle KID = \alpha + \beta$

т. A, B, C, D лежат на 1 окр. $\Rightarrow ABCD$ - впис.

$\angle ACD = 180° - \angle ABD = 180° - 2\beta - \alpha$

$\angle ACK = \angle ACD - \angle KCD = 180° - 2\beta - 2\alpha - \beta = 180° - 3\beta - 2\alpha$

$\angle KCB = \angle ACB - \angle ACK = 180° - 2\alpha - 3\beta - 180° + 3\beta + 2\alpha = \beta$

$\triangle KBC$ $\angle KBC = \angle KCB = \beta \Rightarrow \triangle KBC$ - р-б $\Rightarrow BK = KC$

ч. т. д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	0	5	4	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
16	20	20	×	×	///	56

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано в этой строчке и ровно сюда

№1

$f(x) = g(x) + x$

$g(x) = f(x) - x$

$(g(x_1))^3 = (f(x_1) - x_1)^3 = -x_1^3$;

$f(x_3) = g(x_3) + x_3 = x_3$

$(g(x_2))^3 = (f(x_2) - x_2)^3 = -x_2^3$

$f(x_4) = g(x_4) + x_4 = x_4$

Итого $(g(x_1))^3 \cdot f(x_3) + (g(x_2))^3 \cdot f(x_4) = -x_1^3 \cdot x_3 - x_2^3 \cdot x_4$

$x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}$; $-x_1^3 x_3 - x_2^3 x_4 = -\left(x_1^3 \cdot \frac{5+\sqrt{29}}{2} + x_2^3 \cdot \frac{5-\sqrt{29}}{2}\right)$

или $-x_1^3 \cdot x_3 - x_2^3 \cdot x_4 = -\left(x_1^3 \cdot \frac{5-\sqrt{29}}{2} + x_2^3 \cdot \frac{5+\sqrt{29}}{2}\right)$

$-\left(x_1^3 \cdot \frac{5+\sqrt{29}}{2} + x_2^3 \cdot \frac{5-\sqrt{29}}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(5\left(x_1^3 + x_2^3\right) + \sqrt{29}\left(x_1^3 - x_2^3\right)\right)$

$-\left(x_1^3 \cdot \frac{5-\sqrt{29}}{2} + x_2^3 \cdot \frac{5+\sqrt{29}}{2}\right) = \frac{-1}{2}\left(5\left(x_1^3 + x_2^3\right) - \sqrt{29}\left(x_1^3 - x_2^3\right)\right)$

т.е. значение выражения равно $-\frac{1}{2}\left(5\left(x_1^3 + x_2^3\right) \pm \sqrt{29}\left(x_1^3 - x_2^3\right)\right)$;

$x_1 + x_2 = 4$; $x_1 x_2 = -1$ (т. Виета)

$x_1^3 \pm x_2^3 = (x_1 \pm x_2)(x_1^2 + x_2^2 \mp x_1 x_2)$; $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{D}}{2} = 2 \pm \sqrt{D}/2$;

$x_1 - x_2 = \pm\frac{\sqrt{D}}{2} = \pm\sqrt{\frac{20}{2}} = \pm\sqrt{5}$

$(x_1 + x_2)^2 = 16$; $x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 = 17$

$x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 = 19$; $x_1^3 - x_2^3 = \pm\sqrt{5} \cdot 17$

$x_1^3 + x_2^3 = 4 \cdot 19 = 76$; значение выражения:

$-\frac{1}{2}\left(5 \cdot 76 \pm \sqrt{29} \cdot \sqrt{5} \cdot 17\right) = \pm\frac{17}{2}\sqrt{145} - 190$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	0	5	4	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

Выпишем некоторые следующие числа:

$X_1 = 5$, $X_2 = 7$; $X_3 > 14 - 5 = 9 \Rightarrow X_3 = 10$; $X_4 > 20 - 7 = 13 \Rightarrow X_4 = 14$

$X_5 > 28 - 10 \Rightarrow X_5 = 20$. Докажем, что $\forall X_i$ при $i \in \mathbb{N}$, $i > 5$

$X_i = X_{i-1} + i + 1$; База – $X_6 > 40 - 14 = 26 \Rightarrow X_6 = 27 = X_5 + 7$

Пусть $X_m = X_{m-1} + m + 1 = \ldots = X_5 + 7 + \ldots + m + 1$,

$X_{m+1} = X_m - (m+1) = X_5 + 7 + \ldots + m$.

Тогда $X_{m+1} = \cancel{2X_m - X_{m-1}} + m + 2 = X_5 + 7 + \ldots + m + 2 =$

$= 20 + \frac{(m+9)(m-4)}{2} = 20 + \frac{m^2+5m-36}{2}$

Покажем, что это наименьшее составное число (т.е. $2X_m - X_{m-1} + 1$)

$2X_m - X_{m-1} + 1 = 20 + \frac{2(m+8)(m-5) - (m+7)(m-6)}{2} + 1 =$

$= 20 + \frac{2m^2+6m-80-m^2-m+42+2}{2} = 20 + \frac{m^2+5m-36}{2}$

Также заметим, что это число действительно составное при любом m: при четном m число m^2+5m четно, а сумма $m^2+5m-36$ четна

$= \frac{m^2+5m-36+40}{2} = \frac{(m+1)(m+4)}{2}$, при m нечетном: $X_{m+1} = \underset{\in\mathbb{N}}{\left(\frac{m+1}{2}\right)} \cdot (m+4)$ – сост., при четном: $X_{m+1} = \underset{\in\mathbb{N}}{\left(\frac{m+4}{2}\right)}(m+1)$ – сост. Тогда $X_{38} = 20 + 7 + \ldots + 99 = 20 + \frac{106 \cdot 93}{2} =$

$= 20 + 53 \cdot 93 = 20 + 4929 = 4949$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	0	5	4	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Пишется только то, что написано с этой стороны листа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

$a+b+c+d = 1005$

. . . . . (1005)

Количество решений в натуральных числах, условия любого набора, равно C^3_{1004} (кол-во способов расставить 3 перегородки в 1004 места между цифрами; последняя однозначно будет стоять в конце).

Пусть $a = b$ и $\neq a, d \neq a, c \neq d$. Тогда $c+d = 1005 - 2k$, где $k = a = b$, $k \in \{1, 2, \dots, 501\}$.

Тогда $(c+d) \in \{1003; 1001; \dots; 3\}$ (кол-во М)

Кол-во решений ур-я $c+d = p$ $(p \in M)$ равно $\frac{1}{2}C^{p-1}_1 = \frac{p-1}{2}$

Тогда всего кол-во решений ур-я $a+b+c+d = 1005$ с равными числами равно: $\sum(p_i - 1)$ (т.к. могут быть антисимметричные случаи, когда $c = q$, $d = p-q$ и $c = p-q$, $d = q$ — из-за чего нужно разделить на кол-во перестановок)

Тогда всего кол-во решений ур-я $a+b+c+d = 1005$ с равными парами равно $\frac{1}{2}\sum(p_i - 1)$, где p_i - числа из М, кроме для всех чисел из М.

Итого: $\frac{1}{2}(1002 + 1000 + \dots + 2) = \frac{1004 \cdot 501}{4} = \frac{501 \cdot 502}{2} =$

$= 501 \cdot 251 = (500+1)(250+1) = 500 \cdot 250 + 751 =$

$= 125751$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	6	7	8	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	2	12	20	2	///	56

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1. $f(x)=x^2-2x-1$, x_1 и x_2

$g(x)=x^2-3x-1$, x_3 и x_4

$(g(x_1))^3\cdot f(x_3)+(g(x_2))^3\cdot f(x_4)=(x_1^2-3x_1-1)^3\cdot(x_3^2-2x_3-1)$

$+(x_2^2-3x_2-1)^3\cdot(x_4^2-2x_4-1)=?$ заметим, что

$(x_1^2-3x_1-1)^3=((x_1^2-2x_1-1)-x_1)^3$, x^2-2x-1, при $x_1=0\Rightarrow$

$=(-x_1)^3=-x_1^3$

$(x_3^2-2x_3-1)=((x_3^2-3x_3-1)+x_3)$, $x_3^2-3x_3-1=g(x_3)=0\Rightarrow$

$=x_3$

$(x_2^2-3x_2-1)^3=((x_2^2-2x_2-1)-x_2)^3=?$ $x_2^2-2x_2-1=f(x_2)$

$=0=?=(-x_2)^3=-x_2^3$

$(x_4^2-2x_4-1)=(x_4^2-3x_4-1)+x_4$, $x_4^2-3x_4-1=g(x_4)=0$

$=?=x_4$, получается

$-x_1^3\cdot x_3+(-x_2)^3\cdot x_4=-x_1^3\cdot x_3-x_2^3\cdot x_4$

Найдем x_1, x_2

$x^2-2x-1=0$

$D=4+4=8$

$x_{1,2}=\frac{2\pm2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}$

x_3, x_4

$x^2-3x-1=0$

$D=9+4=13$

$x_{3,4}=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

получаются,

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	6	7	8	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

x_4 при $x_1 = 1+\sqrt{2}$, $x_2 = 1-\sqrt{2}$

$x_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$, $x_4 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$

$$-(1+\sqrt{2})^3 \cdot \frac{(3+\sqrt{13})}{2} - (1-\sqrt{2})^3 \cdot \frac{3-\sqrt{13}}{2} = -(1+3\sqrt{2}+6+2\sqrt{2}) \cdot \frac{(3+\sqrt{13})}{2}$$

$$-(1-3\sqrt{2}+6-2\sqrt{2})\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) = -(7+5\sqrt{2}) \cdot \frac{(3+\sqrt{13})}{2} - (7-5\sqrt{2}) \cdot \frac{(3-\sqrt{13})}{2} =$$

$$= \left(\frac{21+7\sqrt{13}}{2} + \frac{15\sqrt{2}+5\sqrt{26}}{2}\right) - \left(\frac{21 \mp 7\sqrt{13}}{2} - \frac{(15\sqrt{2} \mp 5\sqrt{26})}{2}\right)$$

$$= \frac{21+7\sqrt{13}+15\sqrt{2}+5\sqrt{26}-21+7\sqrt{13}}{2}$$

$$= \frac{-21-7\sqrt{13}-15\sqrt{2} \mp 5\sqrt{26}-21+7\sqrt{13}+15\sqrt{2} \mp 5\sqrt{26}}{2}$$

$$= \frac{-42-10\sqrt{26}}{2} = -21-5\sqrt{26}$$

2 случай: $x_1 = 1+\sqrt{2}$ $x_2 = 1-\sqrt{2}$, $x_3 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$, $x_4 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

$$-(1+\sqrt{2})^3 \cdot \frac{(3-\sqrt{13})}{2} - (1-\sqrt{2})^3 \cdot \frac{3+\sqrt{13}}{2} = -(7+5\sqrt{2}) \cdot \frac{(3-\sqrt{13})}{2}$$

$$-(7-5\sqrt{2})\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) = -\left(\frac{21-7\sqrt{13}+15\sqrt{2}-5\sqrt{26}}{2} + \frac{21+7\sqrt{13}-15\sqrt{2}}{2}\right.$$

$$\left.-5\sqrt{26}\right) = \left(\frac{42-10\sqrt{26}}{2}\right) = -\left(21-5\sqrt{26}\right) = 5\sqrt{26}-21 - \text{ответ}.$$

3 случай: $x_1 = 1-\sqrt{2}$, $x_2 = 1+\sqrt{2}$ $x_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ $x_4 = \frac{3\sqrt{13}}{2}$

$$-\left((7-5\sqrt{2})\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) + (7+5\sqrt{2}) \cdot \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) - \text{видно},$$

что совпадает с 1 случаем = 7

и 4 тоже совпадет.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	6	7	8	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

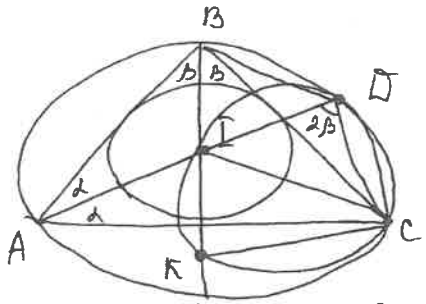
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Ответ. $-21-5\sqrt{26}$; $5\sqrt{26}-21$

№4.



Дано: окр $(I; r)$

$AI \cap$ окр $= D$

Док-ать: $BK = KC$

Решение: т.к. в $\triangle ABC$ - вписана окр $\Rightarrow$ I - точка пересечения биссектрис, $\Rightarrow$ BI и AI – биссектрисы

Пусть, $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$ $\Rightarrow$ $\angle BAD = \angle DAC = \alpha$ (по бисс) и $\angle ABK = \angle KBC = \beta$ (по бисс). Т.к. $\angle ABC$ и $\angle ADC$ опираются на одну дугу, $\Rightarrow$ $\angle ADC = \angle ABC = 2\beta$

Проведем CK, и заметим, что $CKID$ - вписан в окружность, $\Rightarrow$ по св-ву вписанного 4-х угольника $\angle IDC + \angle IKC = 180°$, $\Rightarrow$ $\angle IKC = 180 - 2\beta$, $\Rightarrow$ $\angle KCB = 180 - \angle IKC - \angle KBC$ (сумма $\angle\triangle$) $\Rightarrow$ $\angle BCK = 180 - 2\beta - \beta = 180 - \beta - (180 - 2\beta) = \beta \Rightarrow$ т.к. $\angle KBC = \angle BCK = \beta \Rightarrow$ $\triangle KBC$ - равнобедр. $\Rightarrow$ $KC = BK$.

Ч.Т.Д.

№3.

Всего 3 варианта, когда 4 равны, 3, и 2

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	6	7	8	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1) рассмотрим вариант, когда все 4 равны

и поймем, что $4X = 1001$, при $X \in N$, нет таких X $\Rightarrow$ такое не может быть

2) вариантны, при $X\ X\ X\ Y$, количество перестановок $= 4$.

$X \in [1; 333]$

$Y \in [2; 998]$.

Значит, надо посчитать кол-во всех вариантов

$X\ X\ X\ Y$, всего 333 случая $\Rightarrow$ с перестановками $4 \cdot 333 = 1332$.

3) вариант, когда 2 числа равны

$X\ X\ Y\ Z$ $\quad X \in [1; 449]$.

$X\ Y\ X\ Z$ ~~[illegible]~~

$X\ Y\ Z\ X$ $\quad X\ Z\ X\ Y$, всего 12 случаев (перестановок)

$Y\ X\ X\ Z$ от числа X, зависит кол-во вариантов

$Y\ X\ Z\ X$ $\quad Y \neq Z \Rightarrow$

$Y\ Z\ X\ X$ $\quad$ при $X = 1$, можно подобрать 99^{*6} -

$Z\ X\ X\ Y$ $\quad$ чисел

$Z\ X\ Y\ X$ $\quad$ при $X = 2$, 99^{4} ... $\Rightarrow$

$Z\ Y\ X\ X$

$X\ X\ Z\ Y$ $\quad S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

$X\ Z\ Y\ X$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	6	7	8	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$X = 449$, 2 вариация $= ?$

$S_{449} = \frac{(2+996)\cdot 449}{2} = 449^2$

$449^2 \cdot 12 = 2419212 + 1332 = 2420544$

Ответ. 2420544.

№2.

4, 6

$X_n > 2X_{n-1} - X_{n-2}$

$X_{100} - ?$

$X_3 > 2 \cdot X_2 - X_1$, $X_3 > 12 - 4$, $X_3 > 8$, $= ? X_3 = 9$

$X_4 > 18 - 6 = 14$, $X_5 > 28 - 9 = 20$, заметим, что каждое число больше другого $d+1$, а именно

$X_n - X_{n-1} = n+1 = ?$ $X_{100} = X_{99} + 101$, $X_{99} = X_{98} + 100$

Помним, что тут арифм прогресс, получаем

$X_{100} = X_{99} + 101 = X_{98} + 100 + 101 = X_{97} + 99 + 100 + 101 = ?$

$= X_1 + \ldots 101 ?$

$S_{100} = \frac{101 + 2 \cdot 100}{2} = 50 \cdot 103 = 5150 = ?$

$X_{100} = X_1 + 5150 = 5154$

Ответ. 5154.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	6	7	8	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5. $a^3+b^3=(a\cdot b\cdot c-1)^2$

(a,b,c) - ?

Заметим, что a^3+b^3 = числу в квадрате

$a^3+b^3 = 4, 9, 16, 25, 36 \ldots$

$a^3+b^3 = 3^2 = 8+1 = 2^3+1^3 = 7$

возьмем $a=1, b=2, c=2$

$1+8=(4-1)^2$

$9=3^2$, удов.

возьмем $a=2, b=1, c=2$

$8+1=9$, $9=9$, удов

Ответ. $(1;2;2)$; $(2;1;2)$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	0	9	9	5	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Решения пишите только на этих листах с двух сторон. Не забудьте вписать шифр.

1	2	3	4	5	6	Σ
16	20	20	×	×	////	56

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача №1

Найдём ординату точки C, т.к она $\in y=\frac{1}{x} \Rightarrow C\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$. Через C проведены две прямые. Найдём их ур-я: $y=2x+b_1$, $y=\frac{1}{2}x+b_2$

Подставим в них координаты C:

$-\frac{1}{2}=-4+b_1 \Rightarrow b_1=3,5$

$-\frac{1}{2}=-1+b_2 \Rightarrow b_2=0,5$.

Найдём абсциссы пересечения этих прямых с графиком $\frac{1}{x}$.

Для этого решим ур-я:

$2x+3,5=\frac{1}{x}$; $0,5x+0,5=\frac{1}{x}$

$4x^2+7x-2=0$

$D>0$. По обратной т. Виета нам подойдут $x=-2$ и $\frac{1}{4}$

$x^2+x-2=0$

$D>0$. По обратной т. Виета нам подойдут $x=-2;1$

Таким образом абсцисса точки A будет $=\frac{1}{4}$, а точки B равна 1 $\Rightarrow A\left(\frac{1}{4};4\right)$; $B(1;1)$

Т.к A и B $\in y=\frac{1}{x}$.

Напишем ур-е окружности для опис. окр. $\triangle ABC$. r - её радиус, $(x_0;y_0)$ - координаты центра.

Подставим знач-я точек A, B, C и получим сис-му:

$$\begin{cases}\left(-2-x_0\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-y_0\right)^2=r^2\\ \left(1-x_0\right)^2+\left(1-y_0\right)^2=r^2\\ \left(\frac{1}{4}-x_0\right)^2+\left(4-y_0\right)^2=r^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0^2+4x_0+4+y_0^2+y_0+0,25=r^2 \ (1)\\ 1+x_0^2-2x_0+1-2y_0+y_0^2=r^2 \ (2)\\ \frac{1}{16}-\frac{1}{2}x_0+x_0^2+16-8y_0+y_0^2=r^2 \ (3)\end{cases}$$

Приравняем левые части ур-ий (1) и (2):

$x_0^2+4x_0+4+y_0^2+y_0+0,25=1+x_0^2-2x_0+1-2y_0+y_0^2$

$6x_0+3y_0+4,25-2=0$

$6x_0+3y_0+2,25=0$ (I)

Приравняем левые части ур-ий (1) и (3):

$x_0^2+4x_0+4+y_0^2+y_0+0,25=\frac{1}{16}-\frac{1}{2}x_0+x_0^2+16-8y_0+y_0^2$

$4,5x_0+9y_0+4,25-16-\frac{1}{16}=0$

$4,5x_0+9y_0-11\frac{13}{16}=0$ (II)

11

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 9 | 9 | 5 | 8 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Ур-я (I) и (II) должны выполняться одновременно ⇓

$$\begin{cases} 6x_0 + 3y_0 + 2{,}25 = 0 \mid \cdot 3 \\ 4{,}5x_0 + 9y_0 - 11\frac{13}{16} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18x_0 + 9y_0 + 6{,}75 = 0 \\ 4{,}5x_0 + 9y_0 - 11\frac{13}{16} = 0 \end{cases}$$

Вычтем из верхнего ур-я нижнее, получим: $13{,}5x_0 + 6\frac{12}{16} - 11\frac{13}{16} = 0$

$13{,}5x_0 = 5\frac{1}{16}$

Подставим в (I) и найдём y_0:

$\frac{18}{8} + 3y_0 + 2{,}25 = 0$

$18 + 24y_0 + 18 = 0$

$y_0 = -1{,}5$

Таким образом координаты центра опис. окр $\triangle ABC$ будут $\left(\frac{3}{8}; -1{,}5\right)$

$\boxed{x_0 = \frac{81}{216} = \frac{3}{8}}$

Задача №2 $n \in \mathbb{N}$ $x_n = n^2 + 300$ $y_n = НОД(x_n; x_{n+1})$ $\max(y_n)$ - ?

Заметим, что $x_{n+1} = (n+1)^2 + 300 = n^2 + 2n + 301$. Пусть $НОД(x_n; x_{n+1})$ будет равен p, тогда мы имеем: $x_n = n^2 + 300 \vdots p$

Т.к x_{n+1} очевидно больше x_n, то: $x_{n+1} = (n+1)^2 + 300 \vdots p$

$x_{n+1} - x_n \vdots p \Leftrightarrow n^2 + 2n + 301 - n^2 - 300 = 2n + 1 \vdots p$. $\Rightarrow 2n+1$ явно число нечётное $\Rightarrow$ p также будет нечётным числом.

Заметим, что: $2n + 1 \underset{p}{\equiv} 0 \Rightarrow 2n \underset{p}{\equiv} -1 \Rightarrow n \underset{p}{\equiv} \frac{p-1}{2}$. С другой стороны $n^2 + 300 \vdots p \Rightarrow n^2 \underset{p}{\equiv} -300$. Из сравнения $n \underset{p}{\equiv} \frac{p-1}{2}$ получим, что $n^2 \underset{p}{\equiv} \frac{(p-1)^2}{4}$

Таким образом имеем, что $\frac{(p-1)^2}{4} \underset{p}{\equiv} -300$. Т.к p - нечётное, то с 4 оно взаимно просто $\Rightarrow (p-1)^2 \underset{p}{\equiv} -1200$. Преобразуем: $p^2 - 2p + 1 \equiv -1200$, что равносильно $p(p-2) \underset{p}{\equiv} -1201$. Нетрудно заметить, что левая часть сравнения $\vdots p$, таким образом $0 \underset{p}{\equiv} -1201$, откуда следует, что максимал

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 9 | 9 | 5 | 8 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ИНСТРУКЦИЯ: Информация только для записи ответов и решений задач

но возможным значением p будет 1201, поскольку $n \in \mathbb{N}$.

Таким образом $\max(y_n) = \max(p) = 1201$. Ответ: 1201.

Задача №3. Пусть Боря нашел b орехов, Вася v орехов, а Петя p орехов. Тогда $b+v+p=1001 \Rightarrow p = 1001 - b - v$, и, по условию задачи $b > p$ и $b > v$. Нетрудно заметить, что Боря набрал ≥ 335 орехов, иначе Вася или Петя набрали хотя бы такое же кол-во орехов как у Бори. С другой стороны Боря набрал не более 998 орехов, т.к Вася и Петя набрали разное кол-во орехов, но каждый хотя бы один орех нашел.

Начнём рассматривать случаи:

1) Пусть Боря набрал 998 орехов, тогда Вася набрал либо 2 либо 1 орех, а Петя либо 1, либо 2 соответственно.

2) Пусть Боря набрал 997 орехов, тогда Вася набрал либо 3, либо 1, а Петя, либо 1 либо 3 соответственно.

Нетрудно заметить, что если Вася и Петя в сумме набирают чётное кол-во орехов, то кол-во вариантов в точности равно кол-ву вариантов, если бы Боря набрал на один орех больше, ибо Вася и Петя одинаковое кол-во орехов набрать не могли. Заметим, что если Боря наберёт 996 орехов, то кол-во возможных вариантов увеличится на 2, т.к кол-во орехов, которое может забрать Вася увеличится на 2, ведь теперь они с Петей снова набирают в сумме нечётное кол-во орехов. Проводя аналогичные рассуждения далее заметим, что они работают ровно до того момента, пока Боря не набрал 500 орехов

Боря	Вася	Петя
998	2	1
998	1	2
997	3	1
997	1	3
996	4	1
996	3	2
996	2	3
996	1	4
⋮		
500	499	2
⋮	⋮	⋮
500	2	499

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	0	9	9	5	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Категорически запрещается что-либо записывать в поле справа

Тогда Вася 500 орехов забрать не сможет по условию => заберёт 499 орехов. Посчитаем кол-во вариантов, когда Боря набрал более 500 орехов. Как мы доказали ранее, если Боря нашёл n или n+1 орех, где n - нечётное, то кол-во возможных вариантов для Васи, сколько орехов могли набрать Вася и Петя равны, для таких случаев равно кол-во вариантов для n, отличающихся на 2*, также отличается на 2. Заметим, что если Боря нашёл 501 орех, то кол-во возможных вариантов кол-во орехов для Васи и Пети будет равно 498. Учитывая это. Итого кол-во вариантов будет равно $(2+4+\dots+498)\cdot 2 = \frac{2+498}{2}\cdot 249\cdot 2 = 500\cdot 249 = 124500$.

* Т.е например для n и n-2 $2\cdot(2+4+\dots+498)$

Теперь посмотрим, что происходит, когда Боря набрал менее или ровно 500 орехов. Если он набрал ровно 500 орехов, то кол-во вариантов для Васи и Пети = 499-2+1 = 498. Затем, если Боря набрал 499 орехов, то Вася набрал максимум 498 орехов => кол-во орехов, которые вместе собрали Боря и Вася уменьшилось на 2 по сравнению с предыдущим вариантом => Петя набрал как минимум на 2 ореха больше, т.е 4. Таким образом кол-во вариантов сколько могли набрать по сравнению с предыдущим ходом уменьшилось на 4 (ибо ещё кол-во орехов, собранных Васей и Петей вместе = чётному числу, а Вася и Петя каждый из них одинаковое кол-во орехов собрать не мог). Если Боря набрал 498 орехов, то Вася макс 497 => Петя как минимум 6 => кол-во вариантов ~~мин~~ уменьшилось на 2, поскольку Вася и Петя в сумме набрали нечётное кол-во ~~орехов~~. Далее рассуждения будут повторяться, и с каждым ходом кол-во вариантов будет уменьшаться на 2 или на 4. Когда Боря наберёт 335 орехов, т.е свой минимум, то кол-во вариантов = 2. Представим общую сумму кол-ва вариантов как сумму кол-ва вариантов в случаях, когда Боря набрал нечётное кол-во и когда он набрал чётное кол-во, т.е по нашим рассуждениям при 335 орехах вариантов 2, при 337 орехов 8 (увеличилось на 2 и потом на 4) и т.д при 499 орехах 499 вариан-

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ___

М	А	0	0	0	0	9	9	5	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Продолжение работы, не записанное с этой стороны листа, в данное задание не будет проверяться!

та. Получаем арифм. прогрессию с $a_1 = 2$; $a_n = 494$ и $n = 83$

$\Sigma_1 = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2+494}{2} \cdot 83 = 20584$.

При наборании Борей чётного кол-ва орехов сумма вариантов = при 336 - 6, при 338 - 12 (увеличилась на 2 и нач) и т.д до 500 орехов и 498 возможных вариантов.

$\Sigma_2 = \frac{6+498}{2} \cdot 83 = 20916$ | Тогда всего вариантов при наборании Борей менее или ровно 500 орехов = $\Sigma_1 + \Sigma_2 = 41500$ и всего бельчата смогли поделить орехи 125500 + 41500 способами = 166000 способами. Ответ: 166000 способов.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 7 | 3 | 3 | 2 | 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	0	16	20	×	///	56

Данная табличка заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1.

У точки C координаты $(-2; -0,5)$. Найдём уравнения прямых с угловыми коэффициентами 2 и 0,5, проходящих через C. Пусть они равны $2x+b$ и $0,5x+d$.

$2 \cdot (-2) + b = -0,5 \Rightarrow b = 3,5$. $y = 2x + 3,5$

$0,5 \cdot (-2) + d = -0,5 \Rightarrow d = 0,5$. $y = 0,5x + 0,5$.

Найдем координаты точек A и B.

$2x + 3,5 = \frac{1}{x}$

$x_1 = -2 \quad y_1 = -0,5$

$x_2 = 0,25 \quad y_2 = 4 \quad A(0,25; 4)$

$0,5x + 0,5 = \frac{1}{x}$

$x_1 = -2 \quad y_1 = -0,5$

$x_2 = 1 \quad y_2 = 1 \quad B(1; 1)$

Теперь надо найти координаты центра – точки, равноудаленной от всех трёх вершин треугольника. (опис. окр.)

Пусть они равны $(x; y)$. Составим систему:

$$\begin{cases} (x-(-2))^2 + (y-(-0,5))^2 = (x-0,25)^2 + (y-4)^2 \\ (x-(-2))^2 + (y-(-0,5))^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 \end{cases}$$

Она сводится к $\begin{cases} 4,5x + 9y = 11,8125 \\ 6x + 3y = -2,25 \end{cases}$.

Решая это, получаем $x = 1,375$ и $y = -3,5$.

Ответ: $x = 1,375$, $y = -3,5$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 7 | 3 | 3 | 2 | 5 |
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

3.

Воспользуемся методом „шарики и перегородки".
Пусть 1001 орех – шарики, тогда на 1000 местах между ними (шарики выложены в ряд) нам надо поставить две перегородки, тем самым разделив шарики на 3 группы – для Бори, для Васи и для Пети. Мест для перегородок всего 1000, т.к. отделить 0 шаров мы не можем, потому что каждый должен что-то получить. По этой же причине две перегородки не могут стоять на одном месте. Значит, всего способов расставить перегородки с этими условиями $\frac{1000 \cdot 999}{2}$ (перегородки одинаковы). Однако мы посчитали способы, в которых два мальчика могли получить одинаковое число орехов, все трое получить поровну не могли, т.к. $1001 \not\vdots 3$. Таких ситуаций всего $505 \cdot 3$, т.к. 505 вариантов для равных количеств (1, 2, 3, ..., 505; $506 \cdot 2 > 1001$) и 3 способа выбрать двух ребят с равным количеством. Но и это ещё не всё. Можно считать, что группа слева – для Бори, группа по центру – для Васи, группа справа – для Пети. Получается, что одно разбиение 1001 (без упорядочивания) на 3 группы мы посчитали 6 раз (кол-во перестановок 3-х элементов), но нам необходимо это сделать лишь 2 раза (в порядке убывания либо Боря – Вася – Петя, либо Боря – Петя – Вася). Итого, так поделить орехи можно $\left(\frac{1000 \cdot 999}{2} - 505 \cdot 3\right) \cdot \frac{2}{6} = 165995$ способами.

Ответ: 165995

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 7 | 3 | 3 | 2 | 5 |

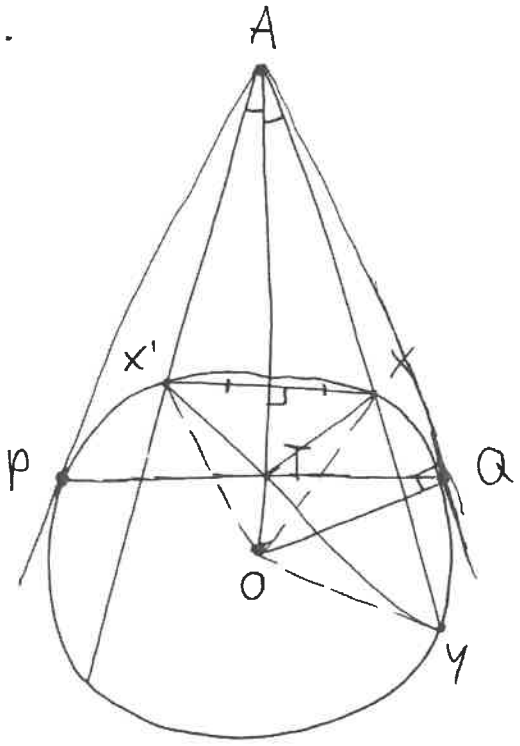
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

4.



Поскольку AO (прямая) содержит диаметр этой окружности, точка X' тоже лежит на окружности. Очевидно, что AO - бис-са ∠X'Y.

Будем доказывать, что T - точка пересечения AO и X'Y лежит на середине отрезка, соединяющего точки касания P и Q касательных, проведенных из A (они в свою очередь ортогональны).

По свойству бис-сы $\frac{X'T}{YT} = \frac{AX'}{AY}$. $X'T = XT$.

$OX' = OX = OY$ как радиусы $\Rightarrow \angle TX'O = \angle TYO$,

$\angle TX'O = \angle TXO$ из симметрии. $\Rightarrow \angle TYO = \angle TXO$. $\Rightarrow$ OTXY - вписанный.

$\Rightarrow$ по св-ву степени точки $AT \cdot AO = AX \cdot AY = AQ^2$. По св-ву касательной $\angle OQA = 90°$. По теор. обр. теор. Пифагора $\angle QTA = 90°$. А поскольку AP и AQ симметричны отн. AO, из симметрии $\angle PTA = 90°$ тоже, $\Rightarrow$ T лежит на PQ и $PT = QT$ ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 МА 000 187 3325

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

2.

$x_n = n^2 + 300$

$y_n = НОД(x_n, x_{n+1})$

Заметим, что $(x_{n+1} - x_n) \vdots НОД(x_n, x_{n+1})$.

Также заметим, что $x_{n+1} - x_n = (300 + (n+1)^2) - (300 + (n)^2) = 2n + 1$.

Будем доказывать, что $y_n = 1$ всегда

У двух соседних квадратов НОД равен 1

$a^2 \underset{3}{\equiv} 0$ или $a^2 \underset{3}{\equiv} 1$

Ответ: 1

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	8	6	6	6	2	5

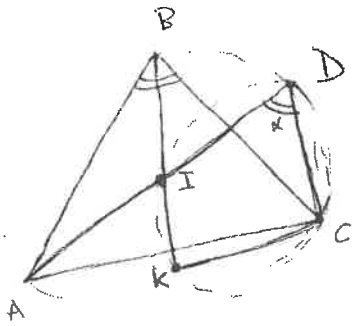
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	14	X	20	1	//	55

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

4



$ABCD$ - вписанный $\Rightarrow \angle ABC = \angle CDA = \alpha$

$DIKC$ - вписан $\Rightarrow \angle IKC = 180^\circ - \angle IDC = 180^\circ - \frac{\alpha}{2}$

$\triangle KBC$: $\angle BKC = 180^\circ - (\angle KBC + \angle KCB)$; $\angle IKC = 180^\circ - \frac{\alpha}{2}$ $\Rightarrow \angle KBC + \angle KCB = \frac{\alpha}{2}$

I - центр вп. окр. $\Rightarrow$ I - точка перес. биссектрис $\Rightarrow$

$\Rightarrow BI$ делит угол ABC пополам $\Rightarrow$ $\angle ABI = \angle CBI = \frac{\alpha}{2}$

$\angle CBI = \angle KBC = \frac{\alpha}{2}$; $\angle KBC + \angle KCB = \frac{\alpha}{2}$, $\angle KBC = \frac{\alpha}{2}$ $\Rightarrow \angle KBC = \angle KCB = \frac{\alpha}{2}$

ЧТД.

3

$a+b+c+d = 1001$ Пусть н.у.о. $c = d$

$a + b + \underbrace{2c}_{\text{чёт}} = \underbrace{1001}_{\text{неч.}}$ $\Rightarrow$ a и b - разной чётности. Пусть a - неч., b - чёт.

$a \geq 1$, $2c \geq 2$ $\Rightarrow$ $b \leq 998$; $b \geq 2$, $2c \geq 2$ $\Rightarrow$ $a \leq 997$

Итого: a - может принимать все неч. значения от 1 до 997

b - может принимать все чёт. значения от 2 до 998

Тоесть a принимает 499 значений и b принимает 499 значений так как значения для a и b разные повторяющихся наборов не будет и делить ничего не надо.

И ответ будет $499^2 = 249001$ Ответ: 249001

1

$f(x) = g(x) + x$

$g(x) = f(x) - x$ $\Rightarrow$ $g(x_1) = -x_1$; $f(x_3) = x_3$; $g(x_2) = -x_2$; $f(x_4) = x_4$

$(g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4) = -x_1^3 \cdot x_3 - x_2^3 \cdot x_4$

Найдём корни $f(x)$ и $g(x)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	8	6	6	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Найдём корни $f(x)$ и $g(x)$

$f(x) = x^2 - 2x - 1$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$g(x) = x^2 - 3x - 1$

$x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

$$\begin{cases} -x_1^3 \cdot x_3 - x_2^3 \cdot x_4 = -(1+\sqrt{2})^3 \cdot \frac{3+\sqrt{13}}{2} - (1-\sqrt{2})^3 \cdot \frac{3-\sqrt{13}}{2} & (1) \\ -x_1^3 \cdot x_3 - x_2^3 \cdot x_4 = -(1+\sqrt{2})^3 \cdot \frac{3-\sqrt{13}}{2} - (1-\sqrt{2})^3 \cdot \frac{3+\sqrt{13}}{2} & (2) \end{cases}$$

(1) домножим на -2, а в конце поделим

$(1+\sqrt{2})^3 \cdot (3+\sqrt{13}) + (1-\sqrt{2})^3 \cdot (3-\sqrt{13}) = 3\left((1+\sqrt{2})^3 + (1-\sqrt{2})^3\right) + \sqrt{13}\left((1+\sqrt{2})^3 - (1-\sqrt{2})^3\right)$

$3\left(1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}\right)\left((1+\sqrt{2})^2 - (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2})^2\right) =$

(раскрыли по суммам кубов)

$= 3 \cdot 2 \cdot (1+2+2\sqrt{2} - (1-2) + 1+2-2\sqrt{2}) = 3 \cdot 2 \cdot 7 = 42$ — первое слагаемое

второе слагаемое $= \sqrt{13}\left((1+\sqrt{2}) - (1-\sqrt{2})\right)\left((1+\sqrt{2})^2 + (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2})^2\right) =$

$= \sqrt{13} \cdot 2\sqrt{2}\,(1+2+2\sqrt{2} + (1-2) + 1+2-2\sqrt{2}) = \sqrt{13} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 5 = 10\sqrt{26}$

итог: $42 + 10\sqrt{26}$ (и делим на -2) $\Rightarrow$ $-21 - 5\sqrt{26}$

(2) тоже $\cdot(-2)$

$(1+\sqrt{2})^3(3-\sqrt{13}) + (1-\sqrt{2})^3(3+\sqrt{13}) = 3\left((1+\sqrt{2})^3 + (1-\sqrt{2})^3\right) + \sqrt{13}\left((1-\sqrt{2})^3 - (1+\sqrt{2})^3\right)$

первое слагаемое как в (1) т.е. $= 42$

второе $= \sqrt{13}\left(1-\sqrt{2} - (1+\sqrt{2})\right)\left((1-\sqrt{2})^2 + (1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) + (1+\sqrt{2})^2\right) =$

$= \sqrt{13} \cdot (-2\sqrt{2})\,(1+2-2\sqrt{2} + (1-2) + 1+2+2\sqrt{2}) = -10\sqrt{26}$

$(42 - 10\sqrt{26}) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \boxed{-21 + 5\sqrt{26}}$ ← итог (2)

Ответ: $-21-5\sqrt{26}$ или $-21+5\sqrt{26}$

(5)

$(2;1;2)$ подходит $\quad 2^3 + 1^3 = 9 = (2 \cdot 2 - 1 - 1)^2$

больше ничего сказать не могу

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	8	6	6	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

(2)

4; 6; 9; 14; 20; 27; 35
(+2, +3, +5, +6, +7, +8)

есть 2 развития событий:

$X_n = 2X_{n-1} - X_{n-2} + 1$

$X_n = 2X_{n-1} - X_{n-2} + 2$ и $2X_{n-1} - X_{n-2}$ – простое

посмотрим сначала только на первый случай

найдём $X_n - X_{n-1} = 2X_{n-1} - X_{n-2} - X_{n-1} + 1 = X_{n-1} - X_{n-2} + 1$

То есть каждый раз к следующему числу прибавляется на один больше, чем к предыдущему

т.е. если мы стартуем с 4, получаем 6 (прибавляется 2) то к 6 мы должны прибавить уже 3 и т.д. пока не получим простое

$4 + (2 + 3 + \dots + K) = 4 + \frac{(K+2)(K-1)}{2}$ – наша формула

$4 + \frac{(K+2)(K-1)}{2} = \frac{K(K+1)}{2} + 3$ – находим n, когда это простое

первое простое число будет 13, при $K = 4$

в таком случае мы прибавляем 2 и шаг +5 становится

То есть мы пропускаем $K = 4$, поэтому вычитаем 4

$\frac{K(K+1)}{2} + 3 - 4 = \frac{K(K+1)}{2} - 1$

и найдем $K \geq 5$ для которого уже это выражение = простому

Следуем этому алгоритму, в конце у нас получится формула вида $\frac{K(K+1)}{2} + a$, по которой мы найдем чему равно это число

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	4	1	5	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	12	20	X	2	11	54

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3,

3 числа, сумма которых составляет 1001 – a, b, c, d.

Заметим, что не может быть ситуации, когда a=b=c=d, т. к. 1001 ⋮ 4. Также не может быть ситуации, когда эти числа равны попарно (a=b и c=d, или a=c и b=d и т. д.), т. к. в таком случае (a+b+c+d) : 2, а 1001 ⋮ 2. Противоречие ⇒ такого быть не может.

~~2 случай:~~

~~1)~~ ≠ случай, когда 2 числа равны. Это будут a и b (иначе переобозначить). Тогда:

a+b+c+d = 2a + c + d = 1001 ⇒ c+d = 1001 − 2a.

Все числа a, b, c, d натуральны ⇒ 2 ≤ 2a ≤ 999 ⇒

⇒ 1 ≤ a ≤ 499. Заметим, что для каждого значения a выбрать числа c и d будет $\left[\frac{1001-2a}{2}\right] = 500 - a$ способов (здесь [X] – целая часть числа X, X натурально).

Тогда всего вариантов: (500 − 1) + (500 − 2) + (500 − 3) + … + (500 − 499) =

$= 1+2+3+\ldots+499 = \frac{1+499}{2} \cdot 499 = \frac{500 \cdot 499}{2} = 250 \cdot 499 = 124750,$

Заметим, что мы учли те варианты, когда 3 числа равны, а 4-е другое.

Ответ: 124750.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	4	1	5	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа, в рамках справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

$X_n > 2 \cdot X_{n-1} - X_{n-2} = X_{n-1} + (X_{n-1} - X_{n-2})$, X_n – миним. составное. Заметим, что, начиная с 5 элемента последовательности выписанных на доске чисел, $X_n = X_{n-1} + (X_{n-1} - X_{n-2}) + 1$, т.к. это число, очевидно, является составным. Тогда?

$X_1 = 4$, $X_2 = 6$, $X_3 = 9$, $X_4 = 14$, $X_5 = X_4 + (X_4 - X_3) + 1 = 20$ и т.д.. Тогда $X_{100} = 9 + \frac{5+101}{2} \cdot 97 = 53 \cdot 97 + 9 = 5150$

Ответ: 5150. Если выписать весь ряд чисел: 4, 6, 9, 14, 20, 27, 35, 44, 54 и т.д., то 100-м будет именно 5150.

где доказ?

Ответ: 5150.

№1

$f(x) = x^2 - 2x - 1$

$X_{1;2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$g(x) = x^2 - 3x - 1$

$X_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

$X_a = 1 + \sqrt{2}$, $X_b = 1 - \sqrt{2}$, $X_c = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$, $X_d = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$

$f(X_c) = \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3+\sqrt{13}}{2} - 1 = \frac{9+6\sqrt{13}+13}{4} - 3 - \sqrt{13} - 1 = \frac{22+6\sqrt{13}}{4} - 4 - \sqrt{13} =$

$= \frac{6+2\sqrt{13}}{4} = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

$f(X_d) = \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3-\sqrt{13}}{2} - 1 = \frac{9-6\sqrt{13}+13}{4} - 3 + \sqrt{13} - 1 = \frac{22-6\sqrt{13}}{4} - 4 + \sqrt{13} =$

$= \frac{6-2\sqrt{13}}{4} = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	4	1	5	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$g(x_a) = (1+\sqrt{2})^2 - 3(1+\sqrt{2}) - 1 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 3 - 3\sqrt{2} - 1 = -\sqrt{2} - 1$

$g(x_b) = (1-\sqrt{2})^2 - 3(1-\sqrt{2}) - 1 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 - 3 + 3\sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} - 1$

$(g(x_b))^3 = (\sqrt{2}-1)^3 = 2\sqrt{2} - 6 + 3\sqrt{2} - 1 = 5\sqrt{2} - 7$

$(g(x_a))^3 = (-\sqrt{2}-1)^3 = -(\sqrt{2}+1)^3 = -2\sqrt{2} - 6 - 3\sqrt{2} - 1 = -5\sqrt{2} - 7$

Всего 4 случая:

1) $x_1 = x_a$, $x_2 = x_b$, $x_3 = x_c$, $x_4 = x_d$. Тогда:

$(g(x_1))^3 \cdot f(x_3) + (g(x_2))^3 \cdot f(x_4) = -(5\sqrt{2}+7) \cdot \frac{3+\sqrt{13}}{2} + (5\sqrt{2}-7) \cdot \frac{3-\sqrt{13}}{2} =$

$= -\frac{15\sqrt{2} + 21 + 5\sqrt{26} + 7\sqrt{13}}{2} + \frac{15\sqrt{2} - 21 - 5\sqrt{26} + 7\sqrt{13}}{2} =$

$= \frac{15\sqrt{2} - 15\sqrt{2} - 21 - 21 - 5\sqrt{26} - 5\sqrt{26} - 7\sqrt{13} + 7\sqrt{13}}{2} = -21 - 5\sqrt{26}$

2) $x_1 = x_b$, $x_2 = x_a$, $x_3 = x_c$, $x_4 = x_d$. Тогда:

$(g(x_1))^3 \cdot f(x_3) + (g(x_2))^3 \cdot f(x_4) = (5\sqrt{2}-7) \cdot \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) + (5\sqrt{2}+7) \cdot \frac{3-\sqrt{13}}{2} =$

$= \frac{15\sqrt{2} - 21 + 5\sqrt{26} - 7\sqrt{13}}{2} - \frac{15\sqrt{2} + 21 - 5\sqrt{26} - 7\sqrt{13}}{2} =$

$= -21 + 5\sqrt{26}$

3) $x_1 = x_a$, $x_2 = x_b$, $x_3 = x_d$, $x_4 = x_c$. Тогда:

$(g(x_1))^3 \cdot f(x_3) + (g(x_2))^3 \cdot f(x_4) = -(5\sqrt{2}+7) \cdot \frac{3-\sqrt{13}}{2} + (5\sqrt{2}-7) \cdot \frac{3+\sqrt{13}}{2} =$

$= -\frac{15\sqrt{2} + 21 - 5\sqrt{26} - 7\sqrt{13}}{2} + \frac{15\sqrt{2} - 21 + 5\sqrt{26} - 7\sqrt{13}}{2} = -21 + 5\sqrt{26}$

4) $x_1 = x_b$, $x_2 = x_a$, $x_3 = x_d$, $x_4 = x_c$. Тогда:

$(g(x_1))^3 \cdot f(x_3) + (g(x_2))^3 \cdot f(x_4) = (5\sqrt{2}-7) \cdot \frac{3-\sqrt{13}}{2} - (5\sqrt{2}+7) \cdot \frac{3+\sqrt{13}}{2} = -21 - 5\sqrt{26}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	4	1	5	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Таким образом, возможные значения выражения $(g(x_1))^3 \cdot f(x_3) + (g(x_2))^3 \cdot f(x_4)$ – это $-21+5\sqrt{26}$ и $-21-5\sqrt{26}$.

Ответ: $-21-5\sqrt{26}$; $-21+5\sqrt{26}$. ✓

№5

Нетрудно заметить, что если значения a и b будут больше 3, то необходимое равенство достигаться не будет ⊗, т.к. все числа a, b, c натуральны. Тогда, перебрав несколько вариантов, можно прийти к тому, что нам подходят тройки чисел (2; 1; 2) и (1; 2; 2).

Ответ: (2; 1; 2), (1; 2; 2).

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	5	9	0	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	0	12	20	2	//	54

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1.

$g(x) = f(x) - x$;

$f(x) = g(x) + x$;

$\Rightarrow (g(x_1))^3 \cdot f(x_3) + (g(x_2))^3 \cdot f(x_4) = (\overset{0}{f(x_1)} - x_1)^3 \cdot (\overset{0}{g(x_3)} + x_3) +$

$+ (\overset{0}{f(x_2)} - x_2)^3 \cdot (\overset{0}{g(x_4)} + x_4) = -x_1^3 \cdot x_3 - x_2^3 \cdot x_4$ (*)

$f(x) = x^2 - 2x - 1 = 0$

$x_1 = 1 + \sqrt{2}$ или $x_1 = 1 - \sqrt{2}$

$x_2 = 1 - \sqrt{2}$ $x_2 = 1 + \sqrt{2}$

$g(x) = x^2 - 3x - 1 = 0$

$x_3 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ или $x_3 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$

$x_4 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$ $x_4 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$

Подставляя в (*):

$-\left((1+\sqrt{2})^3 \cdot \frac{(3+\sqrt{13})}{2} + (1-\sqrt{2})^3 \cdot \frac{(3-\sqrt{13})}{2} \right) =$

$= -\frac{1}{2}\left((7+5\sqrt{2})(3+\sqrt{13}) + (7-5\sqrt{2}) \cdot (3-\sqrt{13}) \right) = -\frac{1}{2}(21 + 7\sqrt{13} + 15\sqrt{2} + 5\sqrt{26} +$

$+ 21 - 7\sqrt{13} - 15\sqrt{2} + 5\sqrt{26}) = -21 - 5\sqrt{26}$; Аналогично с другими вариантами $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ: $-21 - 5\sqrt{26}$; $-21 + 5\sqrt{26}$;

№3. Пусть a, b, c, d - числа набора ($\in \mathbb{N}$)

Все 4 числа равны быть не могут, т.к. $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \div 4$;

1) Если равны 3 числа из 4-х: $a = b = c$

тогда каждое из чисел $a, b, c \le 333$ (Если > 333, то сумма хотя бы 1002)

$\Rightarrow 1 \le a, b, c \le 333$, $d = 1001 - 3a$, $a = b = c$ $\leftarrow$ 333 набора (уникальных)

2) Если равны 2 числа: $a = b$; $c \ne d$; $c \ne a$:

$\Rightarrow 1 \le a, b \le 499$, $c + d = 1001 - 2a$

a	b	c + d	Всего вариантов c, d:
499	499	3	2
498	498	5	4
497	497	7	6
...	...	...	...
333	333	335	334 - 2 (2 варианта, где одно из чисел $c, d = 333$ повторяли выше)
332	332	334	336 - 2
...	...	...	...
1	1	999	998 - 2

Тогда $2 + 4 + 6 + \ldots + (334 - 2) + (336 - 2) + \ldots (998 - 2) =$

$= (2 + 4 + 6 + \ldots + 332) + (332 + 334 + \ldots + 996) = \frac{2 + 332}{2} \cdot 166 + \frac{332 + 996}{2} \cdot 333 =$

$= 167 \cdot 166 + 664 \cdot 333 = 237832$

$237832 + 333 = 238165$ (уникальных) Ответ: 238165 (уникальных)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	5	9	0	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

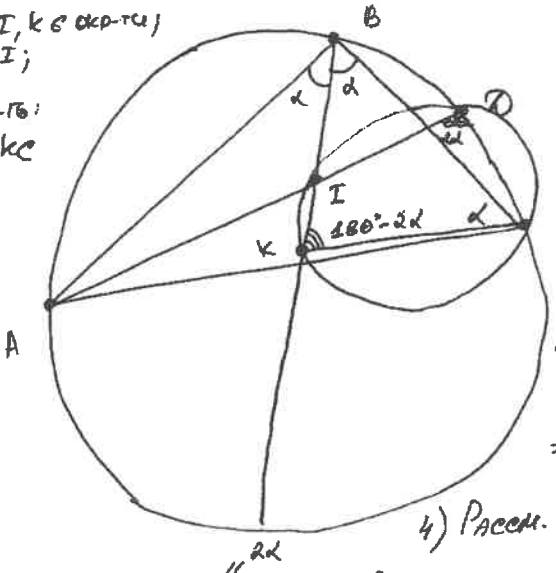
1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4.

Дано:
$\triangle ABC$: I – центр вписанной окр-ти;
AI ∩ описанной окр-ти = D;
D, C, I, K ∈ окр-ти;
K ∈ BI;

Док-ть:
BK = KC



Док-во:

1) т.к. I – центр вписанной окр-ти, то BI – биссектриса $\angle ABC$ (центр вписанной окр-ти лежит на биссектрисе);
Пусть $\angle KBC = \alpha \Rightarrow \angle ABI = \alpha$;
$\Rightarrow \angle ABC = 2\alpha$;

2) $\angle ABC$ опирается на $\overset{\frown}{AC}$;
$\angle ADC$ опирается на $\overset{\frown}{AC}$ $\Big/ \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ABC = \angle ADC = 2\alpha$

4) Рассм. 4-уг KIDC: он вписанный $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle IKC + \angle IDC = 180°$; $\Rightarrow \angle IKC = 180° - 2\alpha$

5) $\triangle KBC$:
$\angle KBC = \alpha$;
$\angle BKC = 180° - 2\alpha \Big/ \Rightarrow \angle BCK = 180° - (\angle KBC + \angle BKC) = 180° - (180° - 2\alpha + \alpha) =$
$= \alpha$, т.е. $\angle BCK = \alpha = \angle KBC \Rightarrow \triangle BKC$ – р/б $\Rightarrow BK = KC$
ч.т.д.

№5. $a^3 + b^3 = (ab - 1)^2$

Ответ: (1; 2; 2); (2; 1; 2)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	5	9	0	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

[№2]

~~$X_1 = 4$ $X_2 = 6$~~

~~Выполнены~~ ~~все~~ ~~требования~~

~~$X_n = 2X_{n-1} + X_{n-2} + 1$~~ — ~~составные~~, ~~причем~~ ~~каждый~~ ~~член~~

~~больше~~ $2X_{n-1} + X_{n-2}$

$X_1 = 4$ $X_2 = 6$

$X_3 > 2 \cdot 6 - 4 = 8 \Rightarrow X_3 = 9$

$X_4 > 2 \cdot 9 - 6 = 14 \Rightarrow X_4 = 15$

$X_5 > 2 \cdot 15 - 9 = 21 \Rightarrow X_5 = 22$

$X_6 > 2 \cdot 22 - 15 = 29 \Rightarrow X_6 = 30$

$X_7 > 2 \cdot 30 - 21 = 38 \Rightarrow X_7 = 39$

$X_8 > 2 \cdot 39 - 30 = 48 \Rightarrow X_8 = 49$

$X_9 > 2 \cdot 49 - 39 = 59 \Rightarrow X_9 = 60$

$X_{10} > 2 \cdot 60 - 49 = 71 \Rightarrow X_{10} = 72$

...

~~$X_{100} > 2 \cdot 5036 - 5036$~~

$X_{100} > 2 \cdot 5045 - 5088 = 5031$?!

60

Ответ: 5031

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	9	1	7	0	2	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	12	0	2	///	54

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано в этой рамке листа

$(-2;y)$; $y=\frac{1}{x}$; $y=kx+b$;

$y=0,5x+b$

1. Найдем координаты C, подставив ее абсциссу в уравнение гиперболы: $y=-\frac{1}{2}$, то $C(-2;-0,5)$
2. Подставим координаты C в уравнение $y=kx+b$:
$-0,5=-k+b$
$b=3,5$
3. Подставим $C(-2;-0,5)$ в $y=0,5x+b$
$-0,5=-2+b$
$b=0,5$
4. Тогда уравнения будут выглядеть так:
$y=2x+3,5$; $y=0,5x+0,5$
5. Найдём координаты точки A:
$2x+3,5=\frac{1}{x}$
$2x-\frac{1}{x}+3,5=0$
$\begin{cases} 2x^2+3,5x-1=0 \\ x\neq 0 \end{cases}$
~~$D=20,25$~~
~~$x=\frac{-3,5\pm 4,5}{4}$~~

$\begin{cases} x=-2 \\ x=0,25 \\ x\neq 0 \end{cases}$

По условию задачи точки отличны от C, тогда $A(0,25;y_1)$ $y=\frac{1}{0,25}=4$, то $A(0,25;4)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

N	A	0	0	0	1	7	0	2	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверьте, что шифр в этой строке и в вашем отделе листа совпадают!

6. Найдём координаты B:

$0{,}5x + 10{,}5 = \frac{1}{x}$

$\begin{cases} 0{,}5x^2 + 10{,}5x - 1 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \\ x \neq 0 \end{cases}$

По условию задачи точки отличны от C, то $B(1; y_2)$,

$y = \frac{1}{1} = 1$, $x \neq 0$, $B(1; 1)$

7. Пусть O – центр опис. окр около $\triangle ABC$

8. $\begin{cases} \rho^2(O; A) = \rho^2(O; B) \\ \rho^2(O; C) = \rho^2(O; B) \end{cases}$ $\rho(O; A) = \rho(O; B) > 0$, $\rho(O; C) = \rho(O; B) > 0$

$\begin{cases} x_0^2 - \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{16} + y_0^2 - 8y_0 + 16 = x_0^2 - 2x_0 + 1 + y_0^2 - 2y_0 + 1 \\ x_0^2 + 4x_0 + 4 + y_0^2 + \frac{1}{4} + y_0 = x_0^2 - 2x_0 + 1 + y_0^2 - 2y_0 + 1 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{3}{2}x_0 - 6y_0 + 14 + \frac{1}{16} = 0 \mid \cdot 4 \\ 6x_0 + 3y_0 + \frac{9}{4} = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 6x_0 - 24y_0 + 56 + \frac{1}{4} = 0 \\ 6x_0 + 3y_0 + \frac{9}{4} = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 6x_0 + 3y_0 + \frac{9}{4} = 0 \\ 27y_0 + \frac{9}{4} - 56 - \frac{1}{4} = 0 \end{cases}$

$27y_0 = 56 + \frac{1}{4} - \frac{9}{4}$

$27y_0 = 54$

$y_0 = 2$

$\begin{cases} y_0 = 2 \\ 6x_0 + 6 + \frac{9}{4} = 0 \end{cases}$

~~$6x_0 = -\frac{33}{4}$~~

$6x_0 = -\frac{33}{4}$

$x_0 = -\frac{11}{8}$

Ответ: координаты центра окружности, описанной около $\triangle ABC$: $x_0 = -\frac{11}{8}$; $y_0 = 2$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 0 | 2 | 9 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№	1	2	3	4	5	6	Σ

Итоговая таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

$НОД(x_n, x_{n+1}) = НОД(x_n, x_n - x_{n+1})$ – тель наибольший)

$НОД(\underbrace{n^2+300}_{x_n}, 2n+1) = d$ (дели-

n^2+300 и $2n+1 \Rightarrow d$ делит их любую линейную комбинацию:

$2(n^2+300) - n(2n+1) = 600 - n \Rightarrow$

$\Rightarrow d$ делит $(600-n)$ и $(2n+1) \Rightarrow$ делит их и мин. комб.: $2n+1+2(600-n) = 1201$ –

1201 – простое и d – делит 1201 $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} d = 1201 \\ d = 1 \end{array}\right.$

Заметим $n = 600$

$x_n = 600^2 + 300 = 360300 = 1201 \cdot 5^2 \cdot 2^2 \cdot 3$

$x_{n+1} = 601^2 + 300 = 361501 = 1201 \cdot 43 \cdot 7$

$НОД(x_n, x_n + 1) = 1201 \Rightarrow d = 1201$

Ответ: 1201

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 0 | 2 | 9 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 3

1. Боря - a орехов
Вася - b орехов
Петя - c орехов

$$\begin{cases} a+b+c=1001 \\ a>b \\ a>c \\ b\neq c \end{cases} \Rightarrow 3a>a+b+c, \text{ тогда } a>333\frac{2}{3}$$

2. Если $a=334$, то $b+c=667$ и тогда либо b либо c не менее 334 (иначе $b\leq 333$, $c\leq 333 \Rightarrow b+c\leq 666$
667)
Тогда $a\leq b$ или $a\leq c$, значит $a\geq 335$

3. Если $a\geq 501$, то $b+c\leq 500<a \Rightarrow$ можно выбрать c от 1 до $(1001-a-1)$, а b определить из условий $b+c=1001-a$, если $(1001-a)$ - нечетное - четное)
если $(1001-a)$ - четное (a - нечетное), то c - любое от 1 до $(1001-a-1)$ исключая $\left(\frac{1001-a}{2}\right)$ (иначе $b=c$)
Т.е. число вариантов поделить орехи при $a\geq 501$: $\begin{cases} 1001-a-1-1, & a\vdots 2 \\ 1001-a-1, & a:2 \end{cases}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	7	0	2	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

4. Если $335 \le a \le 500$, то

$b + c = 1001 - a$

$\begin{cases} c = 1001 - a - b \\ b < a \end{cases} \Rightarrow c > 1001 - 2a$

$c < a$

Итого $1001 - 2a + 1 \le c \le a - 1$

(может пригодиться) $(a-1) - (1001 - 2a + 1) + 1$ значений, т. е. $3a - 1002$ значений

Если $a \vdots 2$, то $(3a - 1002) \vdots 2 \Rightarrow$ число вариантов $(3a - 1002)$

Если $a \not\vdots 2$, то число вариантов $(3a - 1002 - 1)$, т. к. тут $c = \frac{1001 - a}{2}$ получится $b = c$

Итого: $S = \sum\limits_{\substack{a=335 \\ a \vdots 2}}^{500} (3a - 1002) + \sum\limits_{\substack{a=335 \\ a \not\vdots 2}}^{500} (3a - 1002 - 1) + \sum\limits_{\substack{a=501 \\ a \vdots 2}}^{998} (1001 - a - 1) +$

$+ \sum\limits_{\substack{a=501 \\ a \not\vdots 2}}^{998} (1001 - a - 2) = \sum\limits_{\substack{a=335 \\ a \not\vdots 2}}^{500} (3a - 1002) - \sum\limits_{\substack{a=335 \\ a \not\vdots 2}}^{500} 1 + \sum\limits_{\substack{a=501 \\ a \not\vdots 2}}^{998} (1000 - a) -$

$- \sum\limits_{\substack{a=501 \\ a \not\vdots 2}}^{998} 1 = 3 \sum\limits_{\substack{a=335 \\ a \not\vdots 2}}^{500} a - 1002 \cdot 166 + 498 \cdot 1000 - \sum\limits_{\substack{a=501 \\ a \not\vdots 2}}^{998} a -$

$- \sum\limits_{\substack{a=335 \\ a \not\vdots 2}}^{998} 1 = 3 \cdot 166 \cdot \frac{500 - 335}{2} - 2 \cdot 166 + 1000(498 - 166) -$

$- 498 \cdot \frac{998 - 501}{2} - \frac{664}{12} = 41085 - 332 + 332000 -$

$- 123753 - 332 = 249332$

Ответ: 249332

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 0 | 2 | 9 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Цветная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Продолжение решения на этом листе в работе не должно быть

№5

$m > n$ $\frac{3^m+2}{3^n+2} = k$, $k \in \mathbb{Z}$

т.к. $3^n+2 > 0$, то

$3^m+2 = k \cdot 3^n + 2k$

$3^m = k \cdot 3^n + 2(k-1)$

$3^m - k \cdot 3^n = 2(k-1)$

каждое слагаемое $\vdots 3$

$3^n(3^{m-n} - k) = 2(k-1)$, т.к. 3^n - это число которое состоит только из 3-ек, то ясно, что $3^n \vdots 2(k-1)$, тогда т.к. $2 \not\vdots 3$ то $k-1 \vdots 3$ и

$k-1 = 3^n \cdot r$, $r \in \mathbb{Z}$

$k = 3^n \cdot r + 1$

$3^m(3^n \cdot r + 1) \cdot 3^n + 2 \cdot 3^n \cdot r$

$3^m = (3^n \cdot r + 1) \cdot 3^n + 2 \cdot 3^n \cdot r$

$3^m = 3^n \cdot 3^n \cdot r + 3^n + 2 \cdot 3^n$

$3^m = 3^n \cdot (3^n \cdot r + 1 + 2r)$

Предположим, что $m \leq n^2$

3^m значительно меньше 3^{2n} ? $\Rightarrow$ разница между 3^m и $k \cdot 3^m$ будет небольшой. Одно при таких маленьких m $3^m - k \cdot 3^n$ не может равняться $2(k-1)$, потому что $2(k-1)$ можно записать как $2(3^n - r)$, где $r \in \mathbb{Z}$, это создает противоречие, потому что это выражение не может делиться на 3^n+2, ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

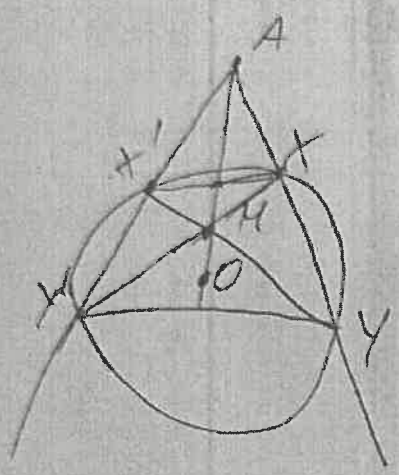
М	А	0	0	0	1	7	0	2	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	1	1	9	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	~~18~~ 16	12	2	2	11	~~52~~ 50

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

т. к. $x^2-4x-1 = x^2-5x-1+x$, а $x^2-5x-1 = x^2-4x-1-x$, то выражение принимает вид

$$(-x_1)^3 x_3 + (-x_2)^3 x_4$$

Всего возможны 4! случая; рассмотрим каждый из них

1) $(-x_1)^3 x_3 + (-x_2)^3 x_4 = -(2+\sqrt{5})^3\left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right) + (2-\sqrt{5})^3\left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right) =$

$= -\left(20+4\sqrt{29}+30\sqrt{5}+6\sqrt{145}+75+15\sqrt{29}+\frac{25}{2}\sqrt{5}+\frac{5}{2}\sqrt{145}\right) -$

$-\left(20-4\sqrt{29}-30\sqrt{5}+6\sqrt{145}+75-15\sqrt{29}-\frac{25}{2}\sqrt{5}+\frac{5}{2}\sqrt{145}\right) =$

$= -40 - 12\sqrt{145} - 150 - 5\sqrt{145} = -190 - 17\sqrt{145}$

2) $(-x_1)^3 x_4 + (-x_2)^3 x_3 = -(2+\sqrt{5})^3\left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right) - (2-\sqrt{5})^3\left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right) =$

$= -\left(20-4\sqrt{29}+30\sqrt{5}-6\sqrt{145}+75-15\sqrt{29}+\frac{25}{2}\sqrt{5}-\frac{5}{2}\sqrt{145}\right) -$

$-\left(20+4\sqrt{29}-30\sqrt{5}-6\sqrt{145}+75+15\sqrt{29}-\frac{25}{2}-\frac{5}{2}\sqrt{145}\right) =$

$= -40 + 12\sqrt{145} - 150 + 5\sqrt{145} = 17\sqrt{145} - 190$

‡ При перестановках $(-x_2)^3 x_4 + (-x_1)^3 x_3$ и $(-x_2)^3 x_3 + (-x_1)^3 x_4$ значения сумм будут равны 1 и 2 случаю соответственно => Получаем 2 возможных значения

$17\sqrt{145} - 190$ и $-190 - 17\sqrt{145}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	1	1	9	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Формула имеет вид

$$X_n = 2X_{n-1} - X_{n-2} + 1$$

$$X_n = 2(2X_{n-2} - X_{n-3} + 1) - X_{n-2} + 1$$

$$X_n = 3X_{n-2} - 2X_{n-3} + 2 + 1$$

Предположим, что коэффициенты перед X_n и X_{n-1} увеличиваются на 1, а свободный член — сумма цифр от 1 до меньшего коэффициента.

Докажем: База приведена сверху

Ход: $X_n = (k+1)X_n - k(X_{n-1} + \frac{(k+1)k}{2}$

$$X_n = (k+1)(2X_{n-1} - X_{n-2} + 1) - kX_{n-1} + \frac{(k+1)k}{2}$$

$$X_n = (k+2)X_{n-1} - (k+1)X_{n-2} + \frac{(k+1)k}{2} + k + 1 \Rightarrow \text{верно} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ 98 число или 95-е число если считать от 14, будет равно

$$X_{95} = 94 \cdot 20 - 93 \cdot 14 + \frac{93 \cdot 94}{2} = 7563 //$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	1	1	9	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

Посчитаем первые несколько чисел

5, 7, 10, 14, 20, 27, 35, 44, 54, 65

$\equiv$ 2 (mod 3), 2 (mod 3), 0 (mod 3), 2 (mod 3), 2 (mod 3), 0 (mod 3), 2 (mod 3)

Заметим, что $14 \equiv 20 \equiv 2 \pmod 3$ => при подстановке в формулу $2 \cdot 2 - 2 = 2$ (остаток при делении на 3) делителю будет прибавлять 1, чтобы число $\vdots 3$ => => было составным, какой же вывод делать об остатках при делении на 7, делителя которых мы не рассмотрим? Также рассмотрим остатки при делении на 5 и на 2.

$\equiv$	14	20	27	35	44	54	65
mod 2	0	0	1	1	0	0	1
mod 3	2	2	0	2	2	0	2
mod 5	4	0	2	0	4	4	0

при переходе $20, 14 \to 27$

26 $2 \cdot 20 - 14 \equiv 26 \equiv 2 \pmod 3$ => $26 + 1 \equiv 0 \pmod 3$ - составное

$27 \cdot 2 - 20 = 34 \equiv 4 \pmod 5$ => $34 + 1 \equiv 0 \pmod 5$ - составное

$35 \cdot 2 - 27 = 43 \equiv 1 \pmod 2$ => $43 + 7 \equiv 0 \pmod 2$ - составное

$44 \cdot 2 - 35 = 53 \equiv 2 \pmod 3$ => $53 + 7 \equiv 0 \pmod 3$ - составное

...

Остатки закончились => мы всегда прибавляем 1 к результату для получения составного числа.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	1	1	9	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

Разобьём 4 числа на 2 пары по 2 числа, тогда суммы чисел в паре будут равны соответственно

1 + 1004
2 + 1003
3 + 1002
...
502 + 503

Рассмотрим пару чисел 1 + 1004 т.к. 2 натуральных числа не могут дать 1 в сумме, то чисел под такие пары не существует.

Рассмотрим пары 2 + 1003
в 2 получается только сумма 1+1 =>
=> в любом наборе этих пар будут 2 одинаковых числа 1, таких наборов 501 т.к.

1003 = 1 + 1002
2 + 1001
...
501 + 502

Аналогичная ситуация с любыми чётными числами, когда меньше чётных в паре. Таким ко всем числам меньшим этого чётного найдётся равное одно пара чисел одно равное число из пары с чётной суммой, т.е. для всех чётных пар с меньшими чётными

$\begin{pmatrix} 2+1003 \\ 4+1001 \\ \dots \\ 502+503 \end{pmatrix}$ наборов всего:

кол-во возможных чётных чисел с чётной пары

$\frac{2+502}{2} \cdot 251 - 2 \cdot 251 + 501 + 500 + \dots + 251 =$ — сумма арифметической прогрессии, когда чётное число представили в виде двух одинаковых чисел

$= 252 \cdot 251 - 2 \cdot 251 + \frac{251+502}{2} \cdot \frac{251}{926} = 250 \cdot 251 + 376 \cdot 626 =$

$= 251 \cdot 626$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	1	1	9	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Аналогично поступаем с белыми числами с чётными

$\begin{pmatrix} \text{номерами} \\ 3+1002 \\ \dots \\ 501+504 \end{pmatrix}$ $\frac{504+1002}{2} \cdot 250 - 2 \cdot \overset{250}{500} + 1+2+\dots 250 =$

$= 753 \cdot 250 - 2 \cdot 500 + 251 \cdot 125 = 751 \cdot 250 + 251 \cdot 125$

Сложим результаты, и вычтем 500 раза.

получим $251 \cdot 626 + 251 \cdot 125 + 751 \cdot 250 =$

$= 251 \cdot 751 + 751 \cdot 250 = 751 \cdot 501$ //

№5

$a^3 - b^3$ – не может быть квадратом натурального числа т.к. $a^3 - b^3 = k^2$

$a^3 = b^3 + k^2$ – уравнение такого вида в натуральных числах решений не имеет.

$a, b \in N$, и $a^3 - b^3 \geq 0$, то $a^3 - b^3 = 0$ $a^3 = b^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = b$

Подставим $a^3 - a^3 = (a^2c - 1)^2$

$(a^2c - 1)^2 = 0$

$a^2c - 1 = 0$

$a^2c = 1$

т.к. $a, c \in N \Rightarrow$ $a, c \geq 1 \Rightarrow a^2c \geq 1$ равенство достигается при $a = c = 1 \Rightarrow a = b = c = 1$ //

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	1	1	9	0	2	5

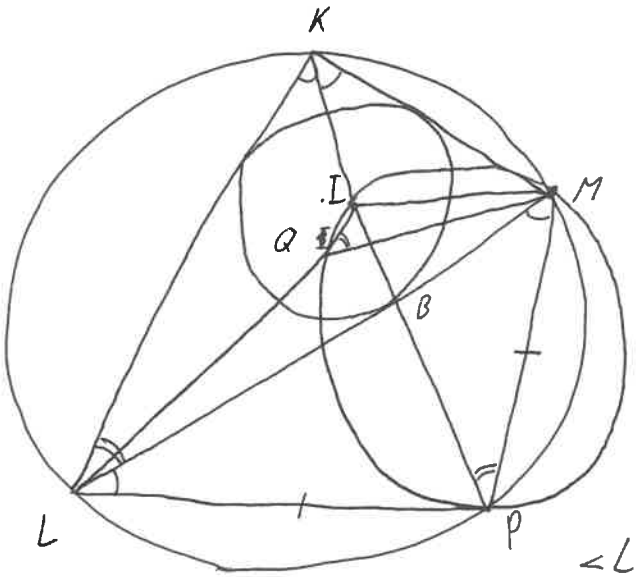
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

~ 4



(!) $LQ = MQ$

KI проходит через центр вписанной окружности $\Rightarrow$

$\Rightarrow KI$ - бис. $\Rightarrow \angle LKI = \angle MKI$

$\angle PKM = \angle PLM$ (вписанные опирающиеся на дугу MP)

$\angle LMP = \angle LKP$ (вписанные опирающиеся на дугу LP) $\Rightarrow$

$\Rightarrow LP = MP$ $\angle IQM = \angle IPM$ (вписанные опирающиеся на дугу IM)

$\angle KLM = \angle KPM$ (вписанные опирающиеся на дугу KM)

$\triangle KLB \sim \triangle MPB$ по двум углам $\angle MPB = \angle KLB$

$\angle PMB = \angle LKB$

т.к. KB - бис., $\frac{LB}{BM} = \frac{KL}{MP = KM}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	1	3	2	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
16	0	16	20	2	///	54

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

① $f(x) = x^2 - 4x - 1$

$D_1 = 4 + 1 = 5$

a) $\begin{cases} x_1 = 2 + \sqrt{5} \\ x_2 = 2 - \sqrt{5} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 = 2 - \sqrt{5} \\ x_2 = 2 + \sqrt{5} \end{cases}$

② $g(x) = x^2 - 5x - 1$

$D = 25 + 4 = 29$

c) $\begin{cases} x_3 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2} \\ x_4 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_3 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2} \\ x_4 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2} \end{cases}$

Случаем (i), (j) будем называть случай, когда выполняются одновременно условия (i) и (j)

Всего случаев 4:

1) (a), (c)
2) (a), (d)
3) (b), (c)
4) (b), (d)

Рассмотрим $g(2+\sqrt{5})$; $g(2-\sqrt{5})$, $f\left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right)$, $f\left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right)$

$g(2+\sqrt{5}) = -2-\sqrt{5} = -(2+\sqrt{5})$; $(g(2+\sqrt{5}))^3 = -17\sqrt{5} - 36$

$g(2-\sqrt{5}) = -2+\sqrt{5} = -(2-\sqrt{5})$; $(g(2-\sqrt{5}))^3 = 17\sqrt{5} - 36$

$f\left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right) = 16 + 3\sqrt{29}$

$f\left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right) = 16 - 3\sqrt{29}$

Рассмотрим наши случаи:

1) $(g(x_1))^3 \cdot f(x_3) + (g(x_2))^3 \cdot f(x_4) = -102\sqrt{145} - 1152$
2) $(g(x_1))^3 \cdot f(x_3) + (g(x_2))^3 \cdot f(x_4) = 102\sqrt{145} - 1152$
3) $(g(x_1))^3 \cdot f(x_3) + (g(x_2))^3 \cdot f(x_4) = 102\sqrt{145} - 1152$
4) $(g(x_1))^3 \cdot f(x_3) + (g(x_2))^3 \cdot f(x_4) = -102\sqrt{145} - 1152$

Ответ: $-102\sqrt{145} - 1152$; $102\sqrt{145} - 1152$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	1	3	2	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

$a_1 = 5; a_2 = 7.$

Пусть мы выписали такие числа $a_1, a_2, \ldots a_{98}$, удовлетворяющие условию $a_{j+1} > 2 \cdot a_j - a_{j-1} \quad \forall j \in N$; $j \in \{2, 3 \ldots 97\}$. Заметим, что:

- $a_{98} > 2 \cdot a_{97} - a_{96}$

  $a_{98} > 2 \cdot (2a_{96} - a_{95}) - a_{96}$
- $a_{98} > 3a_{96} - 2a_{95}$
- $a_{98} > 4a_{95} - 3 \cdot a_{94}$

Нам нужно доказать, что ~~$a_{98} > 97a_2 - 96a_1$~~ $a_{98} \overset{?}{>} 97a_2 - 96a_1$

Пусть $a_{98} > (99-i) \cdot a_i - (98-i) \cdot a_{i-1}$ для $i \in N$

Нужно доказать, что $a_{98} \overset{?}{>} (100-i) \cdot a_{i-1} - (99-i) \cdot a_{i-2}$ $i \in \{3, \ldots 97\}$

Тогда для $i+1$ справедливо:

~~$a_{98} > (100-i) \cdot a_{i-1} -$~~

$a_{98} > (99-i) \cdot (2 \cdot a_{i-1} - a_{i-2}) - (98-i) \cdot a_{i-1}$

$a_{98} > (198 - 2i - 98 + i)(a_{i-1}) - (99-i) \cdot (a_{i-2})$

$a_{98} > (100-i) \cdot a_{i-1} - (99-i) \cdot a_{i-2}$, что и т.д.

Значит, $a_{98} > 97a_2 - 96a_1$

$a_{98} > 199$

199 - простое число, значит наименьшее составное 200

Ответ: 200

№3

Заметим, что в таком наборе равных чисел ≤ 501, поскольку в противном случае их сумма будет > 1005, что противоречит условию

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	1	3	2	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Заметим, что равных чисел быть не могут, т.к. $1005 \not\vdots 4$. То 2 равных числа из четырех (a, a, b, b) также не может быть, т.к. $1005 \not\vdots 2$.

Значит наши наборы могут состоять из двух и трёх чисел. Выпишем эти виды наборов:

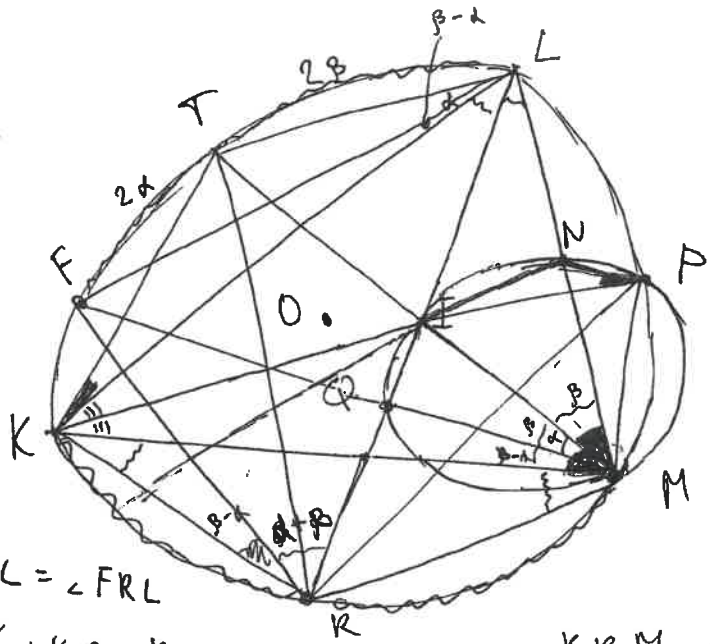
$1, 1, n_1, 1003 - n_1$
$2, 2, n_2, 1001 - n_2$
$3, 3, n_3, 999 - n_3$
$\ldots$
$501, 501, 1, 2.$

Заметим, что так как в каждом из наборов последний элемент строго определён, как достаточно выбрать третий элемент, и тогда четвёртый мы сможем определить сразу. Тогда всего способов выбора:

$1003 + 1001 + 999 + \ldots + 1 = \frac{1003+1}{2} \cdot 501 = 251502$.

Ответ: 251502

N4



$\angle Q \overset{?}{=} MQ$

1) $\angle NPI = \angle NMI = \frac{\angle LMK}{2}$.

2) Отложим угол, равный $\frac{\angle LMK}{2} + \alpha$, где $\alpha = \angle IMQ$

$\angle ILM = \alpha + \beta$
$\angle QMN = \alpha + \beta$
$\Rightarrow$ $\triangle KRM$ – р/б $\Rightarrow$ $\triangle LQM$ – р/б $\Rightarrow$ $LQ = MQ$, что и требовалось

2) $\angle FML = \angle FRL$

т.к. $\cup KR = RM$

$\angle FTL = FMT = \alpha \Rightarrow \angle TKL = \beta$

$\angle TKL = \angle TML = \beta$

т.к. $\angle KLR = \angle RLM$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	1	3	2	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

$a^3 - b^3 = (abc-1)^2$

$(a-b)(a^2+ab+b^2) = (abc-1)(abc-1)$

Очевидно, что для $a=b=c=1$ это выполняется. Пусть хотя бы 1 из чисел $a, b, c > 1$.

① $\boxed{b>1}$, если $a=1 \Rightarrow a^3-b^3 < 0$, противоречие т.к. $(abc-1)^2 \geq 0$

$b>1;\ a>1$.

② Пусть a и b не взаимно просты. Т.е. $a=nk$, $b=mk$

$k(n-m)(n^2k^2+nmk^2+m^2k^2) = (cnmk^2-1)(cnmk^2-1)$

$\underbrace{k^3(n-m)(n^2+nm+m^2)}_{\vdots k^3} = \underbrace{(cnmk^2-1)^2}_{\not\vdots k^3}$

(2) Значит, a и b взаимно просты. Тогда

$(a-b)(a^2+ab+b^2) = (abc-1)(abc-1)$

Пусть $a \vdots 3$, $b \not\vdots 3$ $\Rightarrow$ 1) $\begin{cases} a=3k \\ b=3n+2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a=3k \\ b=3n+1 \end{cases}$

1) $(3k-3n+2)(9k^2+9nk+6k+9n^2+12n+4) = (9nk+6k+1)^2$

$(3l+2)(3f+1) = (3x+2)^2$

$(3y+2) = 9x^2+12x+3+1$

остаток 2 — остаток 1

2)

Пусть $a = b+m$

$b^3+3b^2m+3bm^2+m^3-b^3 = (b^2+mb-1)^2$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	1	3	2	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$3b^2m + 3bm^2 + m^3 = b^4 - 2mb^3 + m^2b^2 - 2b^2 + 1$

~~3) $b(3bm + 3m^2$~~

$m(3b^2 + 3bm + m^2 + 2b - mb^2) = b^4 - 2b^2 + 1$

$mf = (b^2 - 1)^2$

$mf = (b-1)(b+1)(b^2+1)(b-1)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	7	0	6	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	12	X	2	11	54

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

x_1, x_2 – к. $f(x) = x^2 - 3x - 1$

x_3, x_4 – к. $g(x) = x^2 - 4x - 1$

$f(x) - x = g(x)$; $f(x_1)=0$, $f(x_2)=0$, $g(x_3)=0$, $g(x_4)=0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow (g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4) = (f(x_1)-x_1)^3 (g(x_3)+x_3) +$

$+ (f(x_2)-x_2)^3 (g(x_4)+x_4) = -x_1^3 \cdot x_3 - x_2^3 \cdot x_4$

~~x_1~~ $x^2 - 3x - 1 = 0$ $\qquad$ $x^2 - 4x + 1 = 0$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$ $\qquad$ $x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{5}$

1) $x_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$; $x_3 = 2+\sqrt{5}$:

$-x_1^3 \cdot x_3 - x_2^3 \cdot x_4 = -72 - 10\sqrt{65}$

2) $x_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$; $x_3 = 2-\sqrt{5}$:

$-x_1^3 \cdot x_3 - x_2^3 \cdot x_4 = -81 - 117\sqrt{5}$

3) $x_1 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$; $x_3 = 2+\sqrt{5}$. Такой же, как сл. 2

4) $x_1 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$; $x_3 = 2-\sqrt{5}$. Такой же, как сл. 1.

Ответ: $-72 - 10\sqrt{65}$; $-81 - 117\sqrt{5}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	7	0	6	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1) 4 равные не могут быть т.к. $1003 \not\vdots 4$

2) 3 равны:

$3a+b=1003$

$3a+b=3+1000$

$3(a-1)=1000-b$

$\begin{cases} 1000-b=3k \\ a-1=k \end{cases}$

$\begin{cases} b=1000-3k \\ a=k+1 \end{cases}$, $k=0,1,2,3,4,\dots,333$ — 334 набора

Наборов — $4 \cdot 334$ (т.к., например, наборы (x,x,x,y) и (x,x,y,x) наз. разные)

3) 2 равны:

$2a+b+c=1003$

$a=1,2,3,\dots,500 \Rightarrow b+c=1001, 999, \dots, 3$.

k способов выбрать два числа, в сумме дающие k — $k-1$ ($000,\dots,00$, $k-1$ "—")

Наборов: $1000+998+\dots+2=2(1+2+\dots+500)=500 \cdot 501 = 250500$

Всего наборов: $250500+4 \cdot 334 = 251836$

(если считать наборы, отличающиеся порядком, разными)

Ответ: 251836

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	7	0	6	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

$x_1 = 2$

$x_2 = 3$

$x_3 = 6$ ($2 \cdot 3 - 2 = 4$, 5-прост, 6-сост)

$x_4 = 10$ ($2 \cdot 6 - 3 = 9$, 10-сост)

$x_5 = 15$ ($2 \cdot 10 - 6 = 14$, 15-сост)

Предположение: $x_n = \frac{n(n+1)}{2}$, при $n \geq 2$

База: $x_2 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$, $x_3 = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$

Переход:

$$2x_{n-1} - x_{n-2} = \frac{2(n-1)n}{2} - \frac{(n-2)(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

$$x_n \geq \frac{n(n+1)}{2}$$

$\frac{n(n+1)}{2}$ - составное,

Докажем это:

1) Если n - чётно:

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1)$$

составное при $k \geq 2$

а если $k = 1$, $n = 2$, $x_n = \frac{n(n+1)}{2}$ (из Базы)

2) Если n - нечётно:

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = (k+1)(2k+1)$$

← составное при $k \geq 1$

Значит $x_n = \frac{n(n+1)}{2}$ при $n \geq 2$. $x_{99} = \frac{99 \cdot 100}{2} = 4950$

Ответ: $x_{99} = 4950$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	1	7	0	6	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 5

$a,b,c \in \mathbb{N}$:

$$a^3+b^3=(abc+1)^2$$

$a,b,c-?$

$abc+1 \vdots a+b \Rightarrow$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)+(abc+1)^2$$

$\Rightarrow abc+1 \vdots a^2-ab+b^2$

$$\begin{cases} a+b=k^2 \\ a^2-ab+b^2=n^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a,b,c)=\left[\begin{matrix}(1,2,1)\\(2,1,1)\end{matrix}\right.$$

Ответ: $(1,2,1); (2,1,1)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	9	5	9	3	2	5

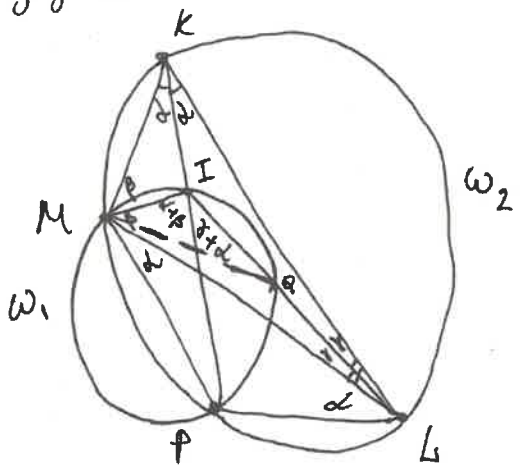
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
8	X	20	20	6	///	54

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4 задача.



I - является центром окружности вписанной в $\triangle KLM$, то есть иначе говоря, пересечение биссектрис вершин треугольника (K, L, M):

$$\begin{cases} \angle MKI = \angle IKL = \alpha \\ \angle KLI = \angle ILM = \gamma \\ \angle KMI = \angle IML = \beta \end{cases}$$

т.к сумма углов в треугольнике равна 180°, то $2(\alpha+\gamma+\beta) = 180^\circ \Rightarrow \alpha+\gamma+\beta = 90^\circ$.

Четырехугольник MKLP - вписанный, тогда $\angle MKP = \angle PLM$, т.к они опираются на одну дугу окружности. То есть $\angle MKP = \angle PLM = \angle MKI$ (тот же угол) $= \alpha$.

Также $\angle PML = \angle LKP = \alpha$ (углы, опирающиеся на одну и ту же дугу).

Тогда $\triangle MPL$ является р/б, т.к углы $\angle PML = \angle PLM = \alpha$ при основании равны. Соответственно $MP = LP$.

Также $\angle MPK = \angle MLK = 2\beta$ (~~это~~ углы, опи-

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	9	5	9	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

лежащиеся на одну дугу окружности.

Тогда давайте найдем $\angle MIP$:

$\angle PMI = \beta + \alpha$, $\angle MPK = 2\gamma \Rightarrow$

$\angle MIP = 180^\circ - \beta - \alpha - 2\gamma = 2\beta + 2\alpha + 2\gamma -$

$- \beta - \alpha - 2\gamma = \beta + \alpha$, то есть $\angle MIP = \beta + \alpha$.

Также найдем угол равен $\angle PIL$:

$\angle PLI = \alpha + \gamma$, $\angle IPL = 2\beta$, тогда

$\angle PIL = 180^\circ - \gamma - \alpha - 2\beta = 2\beta + 2\alpha + 2\gamma -$

$- \gamma - \alpha - 2\beta = \gamma + \alpha$.

Далее заметим:

$\angle PMQ = \angle PIQ = \gamma + \alpha$ (угол, опирающиеся на одну дугу окружности ω_1, описанной около $\triangle MIP$). Тогда найдем угол равен $\angle QML$:

$\angle QML = \angle PMQ - \angle PML = \alpha + \gamma - \alpha = \gamma$

То есть $\angle QML = \gamma$, отсюда:

$\angle QML = \angle QLM = \gamma \Rightarrow \triangle MQL$ – равнобедренный

угол при основании ML равен, то есть

$QM = QL$ ч.т.д. (Ответ: доказано)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	9	5	9	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3. По условию задачи у нас есть произвольное $x, y, z, t \in \mathbb{N}$

$x+y+z+t = 1005$. Нам надо найти наборы, где есть равные числа.

Рассмотрим случай $2x+y+z = 1005$.

Берем x начиная с 1 (чтобы было четыре числа) до 501 (также чтобы было четыре числа в наборе) (числа натур. 0 не входит), т.к. допустим если взять с 0, то будет два числа, а если более 501, например, 502, то $502 - 2 = 1004$, и останется лишь единичка (то есть чисел будет три).

Далее рассматриваем случаи, когда $x_1 = 1$ до $x_{501} = 501$, соответственно т.к. $2x$, то начиная с 2 до 1002 это число "которое мы вычитаем" с основного числа 1005, чтобы рассмотреть относительно двух одинаковых чисел (вариации двух других чисел

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	9	5	9	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

То есть расм. сумма $y_x + z_x = S_x$ равна от $S_1 = 1003$ до $S_x = 3$ ($S_1 = 1005 - x_1$, до $S_{501} = 1005 - x_{501}$), то есть $S_1 = y + z = 1003$ до $S_{501} = y + z = 3$.

Т.к нам не важна нумерация чисел, то расм. пары, где y_x, $z_x = S_x - y_x$ y_x начиная с 1 до $(S_x - 1) : 2$, чтобы не рассматривать случаи, где пары будут повторяться. Количество вариантов для каждого x будет равно $(S_x - 1) : 2$, т.к будет равно от 1 до $(S_x - 1) : 2$ вариантов, что равно $(S_x - 1) : 2$, то есть, чтобы найти количество наборов с неповторяющимися числами:

$$\frac{((S_1 - 1) : 2 + (S_{501} - 1) : 2) \cdot 501}{2} = \frac{(1003 - 1) : 2 + (3 - 1) : 2) \cdot 501}{2} =$$

$$= \frac{502 \cdot 501}{2} = 122751$$

(т.к всего от 1 до 501 (x), то есть 501 шт. иксов)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	9	5	9	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

По сути мы рассмотрели все варианты для всех X (от 1 до 501), для которого $X_1 = 1$ и $X_{501} = 501$, для которого рассматривали все варианты двух оставшихся чисел, включая те случаи когда три числа равны и не включая случаи, когда все четыре числа равны, т.к 1005 ≠ 4, а все числа натуральные.

$S_x = 1005 - 2X$

(y_1) $(y_{(S_x-1):2})$

y пробегает с 1 до $(S_x - 1):2$, для избежания повторения пар y и z.

$z_x = S_x - y_x$. У каждого X есть $(S_x - 1):2$ вариантов пар, т.к отнимает. у пробегает также все z.

Рассм. все случаи когда повторяются и 2 и 3 числа в наборе

(Ответ: 122751)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	9	5	9	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1. $f(x)=x^2-4x-1$

x_1, x_2 – корни этого квадратного трехчлена, то есть иначе его можно записать как:

$$f(x)=x^2-4x-1=(x-x_1)(x-x_2)$$

Также $g(x)=x^2-5x-1$, а его корнями являются x_3 и x_4, иначе записать: $g(x)=x^2-5x-1=(x-x_3)(x-x_4)$.

Также используем теорему Виета для выражения этих корней:

1) $f(x)=x^2-4x-1$ Выразим наши корни

$x_1\cdot x_2=-1$ $\quad x_1=4-x_2$

$x_1+x_2=4$ $\quad x_2(4-x_2)=-1$

$4x_2-x_2^2=-1$

$x_2^2-4x_2-1=0$

$D=16+4=20$

$x_{2,1}=\frac{4-2\sqrt{5}}{2}$

$x_{2,2}=\frac{4+2\sqrt{5}}{2}$

$x_{1,1}=4-2+\sqrt{5}=2+\sqrt{5}$

$x_{1,2}=4-2-\sqrt{5}=2-\sqrt{5}$

2) $g(x)=x^2-5x-1$

$x_3\cdot x_4=-1$

$x_3+x_4=5$

$x_3=5-x_4$

$(5-x_4)x_4=-1$

$5x_4-x_4^2=-1$

$x_4^2-5x_4-1=0$

$D=25+4\cdot 1=29$

$x_{4,1}=\frac{5+\sqrt{29}}{2}$

$x_{4,2}=\frac{5-\sqrt{29}}{2}$

$x_{3,1}=5-\frac{5+\sqrt{29}}{2}$

$x_{3,2}=5-\frac{5-\sqrt{29}}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	9	5	9	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5. [redacted]

$a, b, c \in \mathbb{N}$

Доказать $a = b = c = 1$

$a^3 - b^3 = (abc - 1)^2 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \geq 0$,

[redacted]

т.к квадрат числа неотриц.

Тогда $a^3 - b^3 \geq 0$, то есть имеем два случая: 1) $a = b$

2) $a > b$

Рассмотрим первый случай:

$a = b$, тогда $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) = 0$,

соответственно $(abc-1)^2 = 0$, то

есть $abc = 1$, т.к a, b и c в

натуральных числах, то они

все равны 1, то есть $a = b = c = 1$

$\Rightarrow abc = 1$.

То есть для этой задачи нам

нужно доказать, что случай, когда

$a > b$ невозможен:

[redacted]

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	9	5	9	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

У нас есть два случая; когда (a,b)

$a^3-b^3=(abc+1)^2=abc(abc-2)+1$

$a^3-b^3-1=abc(abc-2)$

$a^3-b^3-1 \vdots abc$

$(a-b)(a^2+ab+b^2) \vdots a,b,c$

$a-b \vdots a$, то есть $\underbrace{a^2}_{\vdots a}+\underbrace{ab}_{\vdots a}+b^2 \vdots a$?

$b^2 \vdots a \Rightarrow b^2=a\cdot k \in \mathbb{N}$

$b=\sqrt{ak} \in \mathbb{N}$

$a^3-ak\sqrt{ak}=(a\sqrt{ak}\cdot c-1)^2$

$a\sqrt{ak}=t \in \mathbb{N}$

$a^3-tk=(tc-1)^2 \; ; t,k,c \in \mathbb{N}$

$a^3-tk=t^2c^2-2tc+1$

$a^3-tk-t^2c^2+2tc-1=0$

$a^3-ak\sqrt{ak}-a^2\cdot ak\,c^2+2a\sqrt{ak}\cdot c-1=0$

$a(a^2-k\sqrt{ak}-a^2kc^2+2\sqrt{ak}\cdot c)-1=0$

$a(a^2-k\sqrt{ak}-a^2kc^2+2\sqrt{ak}\cdot c)=1$, что невозможно, т.к. $a \geq b \geq 1$. То есть доказали, что работает только первый случай.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	9	5	9	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Когда раскрою скобки:

$(a-b)(a^2+ab+b^2) \vdots (abc-2)$

1) $a-b \vdots (abc-2)$

2) $a^2+ab+b^2 \vdots (abc-2)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	9	5	9	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Распишем уравнение через $t = ab$:

$(a, b \neq 0$, т.к $a, b \in \mathbb{N})$

$$\left(\frac{t}{b}\right)^3 - \left(\frac{t}{a}\right)^3 = (tc - 1)^2 = (tc)^2 - 2tc + 1$$

$$\frac{t^3}{b^3} - \frac{t^3}{a^3} = t^2c^2 - 2tc + 1$$

$$\frac{t^3a^3 - t^3b^3}{(ab)^3} = \frac{t^3a^3 - t^3b^3}{t^3} = t^2c^2 - 2tc + 1$$

$(ab = t$, т.к $t = ab)$

$(t^3 \neq 0$, т.к $a, b \neq 0$, т.к $a, b \in \mathbb{N})$

$$\frac{t^3a^3 - t^3b^3 - t^5c^2 + 2t^4c - t^3}{t^3} = 0$$

$(t = ab)$

$(t^3 \neq 0$, т.к $a, b \neq 0$ $a, b \in \mathbb{N}.)$

Тогда:

$$t^3a^3 - t^3b^3 - t^5c^2 + 2t^4c - t^3 = 0$$

$$t^3(a^3 - b^3 - t^2c^2 + 2tc - 1) = 0$$

$t^3 \neq 0$, т.к $t \neq 0$, т.к $a, b \in \mathbb{N}$ $a, b \neq 0$

$$a^3 - b^3 - t^2c^2 + 2tc - 1 = 0$$

$$a^3 - b^3 - a^2b^2c^2 + 2abc - 1 = 0$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

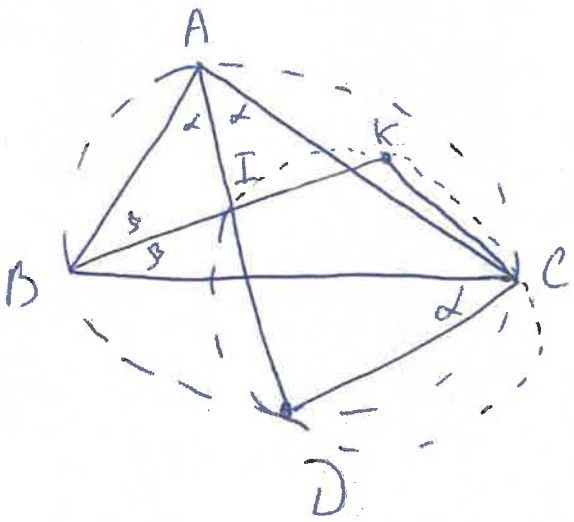
Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	7	0	8	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Пронумеруйте только те, что записаны с этой стороны листа и также справа

№4



Решение: 1) Т.к. I - инцентр, то AI и BI - биссектрисы

2) Пусть $\angle KBC = \angle ABK = \beta$

$\angle BAI = \angle IAK = \alpha$

3) $\angle BIA = 180 - (\alpha + \beta)$

$\angle DIK = \angle BIA$ (вертикал.)

4) Заметим, что $\angle BAD = \angle BCD$ (вписан. и опирающ. на одну и ту же дугу BD).

5) Т.к. DIKC - вписан., то $\angle DIK + \angle DCK = 180$

$\Rightarrow \angle DCK = \alpha + \beta$.

6) $\angle DCK = \alpha + \beta$, $\angle DCB = \alpha \Rightarrow \angle BCK = \alpha + \beta - \alpha = \beta$.

Значит. $\angle KBC = \angle KCB = \beta \Rightarrow$ ~~△~~ ΔKBC - р/б

значит. $BK = KC$ ч.т.д.

1	2	3	4	5	Σ
20	X	12	20	2	54

№3:

Рассмотрим по случаям.

1) Пусть равны только два числа. Тогда

$2x + a + b = 1001$, $x, a, b \in \mathbb{N}$. Докажем, что a и b не равны. Действительно, если $a = b$, то $2x + 2a = 1001$

$x + a = \frac{1001}{2}$ - неверно.

Тогда достаточно найти сколько решений в $\mathbb{N}$ имеет ур. $2x + a + b = 1001$ $x, a, b \in \mathbb{N}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	7	0	8	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1) при $x=1$: $a+b=999$

a может принимать значения $1, 3, \ldots$, при этом b определяется однозначно. Значит при $x=1$ — 996 реш ($a \neq 1$ и $a \neq 998$ т.к. тогда три числа равны между собой; эти случаи разберем позже)

- при $x=2$; $a+b=997$. Аналогично $a = 1,3,4,5,\ldots 994, 996, 997$ — 994 реш ($a \neq 2$, $a \neq 995$).

⋮

- при $x=499$ $a+b=3$ $a=1$ $b=2$ $a=2$, $b=1$ — 2 реш.
- при $x=500$; $a+b=1$ — невозможно.

при $x > 500$ решений нет.

Заметим, что в каждом варианте все случаи мы посчитали дважды. Пара $(a;b)$ и пара $(b;a)$ — дважды, поскольку порядок не важен. Значит общую сумму надо делить на 2

$$\frac{2+4+6+8+\ldots 996}{2} = \frac{499 \cdot 498}{2} = 499 \cdot 249$$

(сумма арифм. прогрессии)

2) Равны только 3 числа: $3x+a=1001$, $x, a \in \mathbb{N}$

$x=1$; $a=998$

$x=2$; $a=995$

$x=3$; $a=992$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	7	0	8	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

И так далее до $x = 333$; $a = 2$

при $x \geq 333$ – решений нет. 333 способа

3) Могут ли все 4 числа быть равны?

$4x = 1001$

$x = \frac{1001}{4}$ – не целое. Не могут.

Значит общее кол-во способов

$499 \cdot 249 + 333$

Ответ: $499 \cdot 249 + 333$

№1

Заметим, что $\begin{cases} f(x) = g(x) + x \\ g(x) = f(x) - x \end{cases}$

Тогда $g(x_1) = -x_1$, $f(x_3) = x_3$; $g(x_2) = -x_2$; $f(x_4) = x_4$

Необходимо найти значение выражения:

$-x_1^3 \cdot x_3 - x_2^3 x_4 = ?$

Найдем корни кв. ур.

$f(x) = 0$: $x^2 - 2x - 1 = 0$

$x^2 - 2x + 1 = 2$

$(x-1)^2 = 2$

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$g(x) = 0$: $x^2 - 3x - 1 = 0$;

$D = b^2 - 4ac = 9 + 4 = 13$

$x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

Разберем все случаи: 1) $x_1 = 1 - \sqrt{2}$; $x_2 = 1 + \sqrt{2}$; $x_3 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$

$x_4 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$-(x_1^3 x_3 + x_2^3 x_4) = -\left((1-\sqrt{2})^3\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)+(1+\sqrt{2})^3\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)\right) =$

$= -\left((7-5\sqrt{2})\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)+(7+5\sqrt{2})\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)\right) =$

$= -\left(\frac{21}{2}-\frac{7\sqrt{13}}{2}-\frac{15\sqrt{2}}{2}+\frac{5\sqrt{26}}{2}+\frac{21}{2}+\frac{7\sqrt{13}}{2}+\frac{15\sqrt{2}}{2}+\frac{5\sqrt{26}}{2}\right) =$

$= -(21+5\sqrt{26}) = -21-5\sqrt{26}$

2 случай: $x_1 = 1-\sqrt{2}$; $x_2 = 1+\sqrt{2}$; $x_3 = \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}$; $x_4 = \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}$

Тогда: $-(x_1^3 x_3 + x_2^3 x_4) = -\left((1-\sqrt{2})^3\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)+(1+\sqrt{2})^3\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)\right) =$

$= -\left((7-5\sqrt{2})\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)+(7+5\sqrt{2})\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)\right) =$

$= -\left(\frac{21}{2}+\frac{7\sqrt{13}}{2}-\frac{15\sqrt{2}}{2}-\frac{5\sqrt{26}}{2}+\frac{21}{2}-\frac{7\sqrt{13}}{2}+\frac{15\sqrt{2}}{2}-\frac{5\sqrt{26}}{2}\right) =$

$= -(21-5\sqrt{26}) = -21+5\sqrt{26}$

Остальные случаи симметричны, поскольку отличаются перестановкой множителей и слагаемых

Ответ. $-21 \pm 5\sqrt{26}$

№5

$a^3+b^3 = (abc-1)^2 = a^2b^2c^2-2abc+1$

$a^3-1 = a^2b^2c^2-2abc-b^3$

Заметим, что $a^3-1 \vdots b$ и аналогично

$b^3-1 \vdots a$

Значит или $a=1$; или $b=1$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	7	0	8	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Без потери общности $a=1$:

$1+b^3=(bc-1)^2$

$b^3=b^2c^2-2bc \quad | :b\neq 0, \ b\in\mathbb{N}$

$b^2=bc^2-2c$

$b^2-bc^2+2c=0$

Заметим, что $b:c$ и $2c:b$

Значит, возможны 2 случая: или $b=c$

или $b=2c$

1) $b=c$: $c^2-c^3+2c=0 \quad | :c\neq 0, c\in\mathbb{N}$

$c^2-c-2=0$

$(c-2)(c+1)=0$

$\left[\begin{array}{l} c=2 \\ c=-1 \text{ — не удовл., } c\in\mathbb{N} \end{array}\right.$

$a=1, b=2, c=2$ (также $a=2, b=1, c=2$ в силу симметрии a, b)

проверка очевидно проходит

2) $b=2c$

$4c^2-2c^3+2c=0 \quad | :2c\neq 0, c\in\mathbb{N}$

$2c-c^2+1=0$

$c^2-2c-1=0 \quad | +2$

$c^2-2c+1=2$

$(c-1)^2=2$

$c=1\pm\sqrt{2}$ — неверно

Ответ: $a=1; b=2; c=2$ или $a=2; b=1; c=2$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	8	8	3	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	0	12	20	2	111	54

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

1) Найдем корни $f(x)$ и $g(x)$:

$x^2-4x-1=0$

$x_1=2+\sqrt{5}$

$x_2=2-\sqrt{5}$

$x^2-5x-1=0$

$x_3=\frac{5-\sqrt{29}}{2}$

$x_4=\frac{5+\sqrt{29}}{2}$

2) Разложим $f(x)$ и $g(x)$ на множители:

$f(x)=(x-2-\sqrt{5})(x-2+\sqrt{5})$

$g(x)=\left(x-\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right)\left(x-\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right)$

3) Найдём значения:

~~$(g(x_1))^3 \cdot f(x_3) \cdot (g(x_2))^3 \cdot f(x_4) = 2\sqrt{5}$~~

$(g(x_1))^3=\left(\left(2+\sqrt{5}-\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right)\left(2+\sqrt{5}-\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right)\right)^3=\left(\frac{(2\sqrt{5}-1)+\sqrt{29}}{2}\cdot\frac{(2\sqrt{5}-1)-\sqrt{29}}{2}\right)^3=$

$=\left(\frac{(2\sqrt{5}-1)^2-29}{4}\right)^3=\left(\frac{20-4\sqrt{5}+1-29}{4}\right)^3=\left(\frac{-4\sqrt{5}-8}{4}\right)^3=(-\sqrt{5}-2)^3=-(5\sqrt{5}+30+12\sqrt{5}+8)=$

$=-(38+17\sqrt{5})$

$(g(x_2))^3=\left(\left(2-\sqrt{5}-\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right)\left(2-\sqrt{5}-\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right)\right)^3=\left(\frac{-1-2\sqrt{5}+\sqrt{29}}{2}\cdot\frac{-2\sqrt{5}-1-\sqrt{29}}{2}\right)^3=$

$=\left(\frac{(-1-2\sqrt{5})^2-29}{4}\right)^3=\left(\frac{20+4\sqrt{5}+1-29}{4}\right)^3=\left(\frac{4\sqrt{5}-8}{4}\right)^3=(\sqrt{5}-2)^3=$

$=5\sqrt{5}-30+12\sqrt{5}-8=17\sqrt{5}-38$

$f(x_3)=\left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}-2-\sqrt{5}\right)\left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}-2+\sqrt{5}\right)=\frac{1-2\sqrt{5}-\sqrt{29}}{2}\cdot\frac{1+2\sqrt{5}-\sqrt{29}}{2}=$

$=\frac{(1-\sqrt{29})^2-20}{4}=\frac{1-2\sqrt{29}+29-20}{4}=\frac{10-2\sqrt{29}}{4}=\frac{5-\sqrt{29}}{2}$

$f(x_4)=\left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}-2-\sqrt{5}\right)\left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}-2+\sqrt{5}\right)=\frac{1+\sqrt{29}-2\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{29}+2\sqrt{5}}{2}=$

$=\frac{(1+\sqrt{29})^2-20}{4}=\frac{1+2\sqrt{29}+29-20}{4}=\frac{10+2\sqrt{29}}{4}=\frac{5+\sqrt{29}}{2}$

1сл.: $(g(x_1))^3 f(x_3)+(g(x_2))^2 f(x_4)=(-38-17\sqrt{5})\left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right)+(17\sqrt{5}-38)\left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right)=$

$=(-38)\cdot\frac{5}{2}+(-38)\cdot\left(-\frac{\sqrt{29}}{2}\right)-17\sqrt{5}\cdot\frac{5}{2}+17\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{29}}{2}+17\sqrt{5}\cdot\frac{5}{2}+17\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{29}}{2}-38\cdot\frac{5}{2}-38\cdot\frac{\sqrt{29}}{2}=$

$=-38\cdot 5+17\sqrt{5}\cdot\sqrt{29}=-190+17\sqrt{145}$

2сл.: $(g(x_1))^3 f(x_4)+(g(x_2))^3 f(x_3)=(-38-17\sqrt{5})\left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right)+(17\sqrt{5}-38)\left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right)=$

$=-38\cdot\frac{5}{2}-38\cdot\frac{\sqrt{29}}{2}-17\sqrt{5}\cdot\frac{5}{2}-17\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{29}}{2}+17\sqrt{5}\cdot\frac{5}{2}-17\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{29}}{2}-38\cdot\frac{5}{2}+38\cdot\frac{\sqrt{29}}{2}=$

$=-38\cdot 5-17\sqrt{5}\cdot\sqrt{29}=-190-17\sqrt{145}.$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Других ~~способов~~ значений быть не может, т.к. $f(x_1))^3$ умножается либо на $f(x_3)$, либо на $f(x_4)$, а $(g(x_2))^3$ умножается на оставшееся выражение, таким образом, получается только 2 способа составить уравнение.

Ответ: $-190+17\sqrt{145}$; $-190-17\sqrt{145}$.

№3

$502+502+1=1005$ – т.е. для чисел ≥ 502 невозможно составить набор из 4-х натуральных чисел с суммой 1005.

$501+501+2+3=1005 \Rightarrow 1005-1002=3$ – „3" можно составить единственным образом, как $2+1$.

$500+500+n+k=1005 \Rightarrow n+k=5$, „5" можно составить 2 способами, $2+3$, $1+4$, и т.д.

~~Каждое~~ каждая следующая пара одинаковых чисел будет иметь сумму на два меньше, чем предыдущая, таким образом, новая сумма $n+k$ на два больше предыдущих $n+k$.

Количество способов составить число $n+k$ равняется ~~$(n+k):2$~~ с округлением вниз ($n+k$ всегда будет нечетным).

~~Это верно, ведь составить любую пару чисел и k можно~~

Это верно, ведь $n < \frac{n+k}{2}$, а $k > \frac{n+k}{2}$ (n и k считаем только целыми, не уменьшая общности), таким образом одно из чисел всегда меньше, а другое всегда больше, половины $(n+k)$, при этом составить новую пару можно лишь до тех пор, пока $n < \frac{n+k}{2}$, если и станет больше, то это будет пара, которую уже рассматривали ранее.

Пусть z – кол-во способов составить пару.

// – деление с округлением вниз до целого

Тогда

$(n+k)//2 = z$

$(n+k+2)//2 = (n+k)//2 + 2//2 = z+1$, т.е. для каждой новой пары одинаковых чисел будет на 1 способ больше составить пару n и k

Всего одинаковых пар чисел от 0 до 501, т.е. 501, при этом для каждой пары количество способов составить набор меняется по арифм. прогрессии, где $a_1=1$, $d=1$, $n=501$

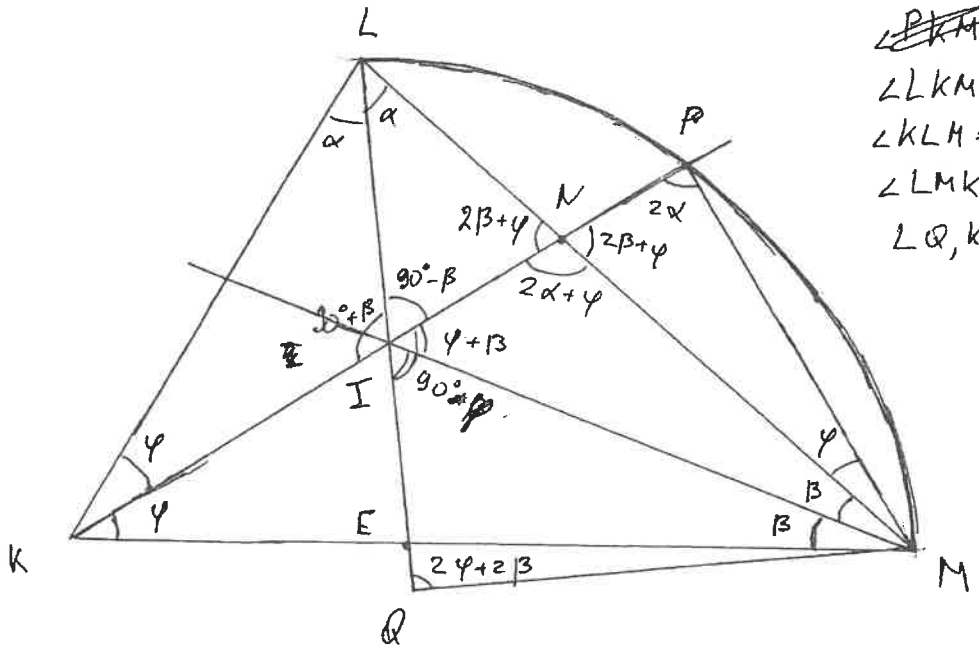
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Таким образом, кол-во способов есть сумма арифм. прогрессии.

$$\frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{2+500}{2} \cdot 501 = \frac{502}{2} \cdot 501 = 251 \cdot 502 = 126\,002$$

Ответ: 126 002 ~~способ~~ наборов.

№4



~~$\angle PKM = \alpha$~~

$\angle LKM = 2\gamma$

$\angle KLM = 2\alpha$

$\angle LMK = 2\beta$

LQ, KP, MI – бис. $\triangle KLM$

$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$

$\alpha + \beta + \gamma = 90°$

$\alpha + \gamma = 90° - \beta$

$\angle KIL = 180° - \alpha - \gamma = 90° + \beta$

$\angle LIP = 90° - \beta$

$\angle LMI = 180° - \alpha - 90° + \beta = 2\beta + \gamma$

$\angle INM = 180° - \angle LNI = 2\alpha + \gamma$

$\angle PIM = 180° - 2\alpha - \gamma - \beta = \gamma + \beta$

$\angle MIQ = 90° + \beta - \gamma - \beta = 90° - \gamma$

~~$\angle LMP = \angle LKP = \gamma$~~ $\angle LMP = \angle LKP = \gamma$ (опир. на общую дугу)

$\angle PNM = \angle LNI$

$\angle IPM = 180° - 2\beta - \gamma - \gamma = 2\alpha$

т.к. QIPM – вписан. чет., то

$\angle LQM = 180° - 2\alpha = 2\gamma + 2\beta$

Тогда в $\triangle QLM$:

$\angle LMQ = 180° - \alpha - 2\beta - 2\gamma = \alpha$

$\Rightarrow \triangle QLM$ – р/б ($\angle QLM = \angle LMQ$)

$\Rightarrow LQ = QM$ ч.т.д.

Случай, если т. Q лежит внутри $\triangle KLM$ аналогичен, ~~соотношения~~ углы не зависят от её положения.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	8	6	3	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

~~$a^3 - b^3 = (abc-1)^2$~~ ~~$(abc-1)^2 \geq 0, \Rightarrow a \geq b$~~

~~Если $abc-1 \neq 0$, то~~ $\frac{a^3-b^3}{(abc-1)^2} = 1$

~~$a^3 - b^3 \equiv 0 \pmod{(abc-1)^2}$~~

~~$a^3 \equiv b^3 \pmod{(abc-1)^2}$~~

$a^3 - b^3 = (abc-1)^2$, $(abc-1)^2 \geq 0 \Rightarrow a \geq b$

$a^3 = (abc-1)^2 + b^3$, где числа ≥ 0, если $a \neq b \neq c \neq 1$

$\log_a a^3 = \log_a ((abc-1)^2 + b^3)$

$3 = \log_a (a^2(bc)^2 - 2abc + 1 + b^3)$.

$a^2b^2c^2 - 2abc + 1 + b^3 = a^3$

$a^2b^2c^2 - 2abc + 1 + b^3 - a^3 = 0$

$b(b^2 - 2ac) - a(a^2 + abc) + a^2b^2c^2 + 1 = 0$

~~Все~~ $\overset{2}{\rightarrow}\ \overset{3}{\rightarrow}\ \overset{4}{\rightarrow}\ \overset{6}{\rightarrow}\ \overset{1}{\rightarrow}\ \overset{2}{\rightarrow}\ \overset{\text{№2}}{\rightarrow}\ \overset{9}{\rightarrow}\ \overset{10}{\rightarrow}\ \overset{11}{\rightarrow}\ \overset{12}{\rightarrow}\ \overset{13}{\rightarrow}\ \overset{14}{\rightarrow}\ \overset{16}{\rightarrow}\ \overset{18}{\rightarrow}$

5, 7, 10, 14, 20, 27, 35, 44, 54, 65, 77, 90, 94, 110, 126

~~Все получающиеся~~ Полученное в результате разности число будет увеличиваться на 1, если оно не станет при этом простым, тогда оно будет увеличиваться на два.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	1	7	7	5	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	14	12	6	2	///	54

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1

$f(x) = x^2 - 3x - 1$

Корни x_1, x_2

$D: 9 - 4 \cdot (-1) = 13$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

$g(x) = x^2 - 4x - 1$

Корни x_3, x_4

$D: 4^2 - 4 \cdot (-1) = 20$

$x_{3,4} = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$

Подставим в $(g(x))^3$ корни x_1, x_2:

$(g(x_1))^3 = \left(\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) - 1\right)^3 = \left(\frac{9+6\sqrt{13}+13}{4} - 26 - 2\sqrt{13} - 1\right)^3 = \left(\frac{9+6\sqrt{13}+13-24-8\sqrt{13}-4}{4}\right)^3 =$

$= \left(\frac{-6+2\sqrt{13}}{4}\right)^3$

$(g(x_2))^3 = \left(\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^2 - \frac{4 \cdot (3-\sqrt{13})}{2} - 1\right)^3 =$

$= \left(\frac{9-6\sqrt{13}+13}{4} - \frac{24-8\sqrt{13}}{4} - \frac{4}{4}\right)^3 = \frac{9-6\sqrt{13}+13-24+8\sqrt{13}}{4}$

$-\frac{4}{4} = \left(\frac{-26+2\sqrt{13}}{2}\right)^3$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	7	7	5	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Продолжение 1

$f(x_3) = (2+\sqrt{5})^2 - 3\cdot(2+\sqrt{5}) - 1 = 4+4\sqrt{5}+5-6-3\sqrt{5}-1 =$

$= -3+\sqrt{5}$

$f(x_4) = (2-\sqrt{5})^2 - 3\cdot(2-\sqrt{5}) - 1 = 4-4\sqrt{5}+5-6+3\sqrt{5}-1 =$

$= -3-\sqrt{5}$

Под одним знаком в $(g(x_1))^3 \cdot f(x_3) + (g(x_2))^3 \cdot f(x_4)$

$\left(\frac{-6+2\sqrt{13}}{4}\right)^3 \cdot (-3+\sqrt{5}) + \left(\frac{-6-2\sqrt{13}}{4}\right)^3 \cdot (-3-\sqrt{5}) =$

$\frac{(36+24\sqrt{13}+52)\cdot(-6+2\sqrt{13})}{4}\cdot(-3+\sqrt{5}) + \frac{36+24\sqrt{13}+52}{4}\cdot$

$\cdot(-3-\sqrt{5}) = (9-6\sqrt{13}+13)\cdot(-6+2\sqrt{13})\cdot(-3+\sqrt{5}) +$

$+(9+6\sqrt{13}+13)\cdot(-6-2\sqrt{13})\cdot(-3-\sqrt{5}) = 10\sqrt{-22-10\sqrt{5}}$

В силу симметр. уравнения при подстановке других вариантов корней, данное выражение изменит знак перед первым слагаемым

Ответ: $-22-10\sqrt{5}$, $-22+\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	7	7	5	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 3.

Есть 2 случая когда 4 числа могут совпасть

(1) 2 числа совпадают $\Rightarrow$

$1003 - a - b \underset{2}{\equiv} 0$

$1003 \underset{2}{\equiv} a + b$

Тогда совпадающие числа с a и d в сумме < 1000

Т.к. если 50 c = d = 501 то $1003 - 501 - 501 = 1$

нельзя будет подобрать пару для a и b

Значит пар где 2 числа совпадают $\frac{500 \cdot 499}{2}$ 1500

(2) (3) 3 числа совпадают:

$1003 - a \underset{3}{\equiv} 0 \quad 1003 \underset{3}{\equiv} a$

Числа b, c, d могут быть равны не 334 вместе.

Тогда 334, числом a мы всегда можем дополнить b, c, d до суммы 1003

(4) В случае когда 4 числа равны не возможно т.к $1003 \not\equiv 4$

Ответ: 500 834

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	7	7	5	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

2.

Докажем по индукции

$2, 3, x_n, x_{n+1}$

База для $n=1$, $n=2$, $n=3$

$x > 6-2$

$x > 4$, значит $x = 6$

$x_{n+1} > 12-3$

$x_{n+1} > 9$

$x_{n+1} = 10$

$x_{n+2} > 20-6$

$x_{n+2} > 14$

$x_{n+2} = 15$

Предположение индукции:

Каждое последующее увеличивается разницей двух предыдущих +1

Д-во: по сути верхняя сходится так

$x_n > 2(x-1) - (x-2)$

$x+1 > 2x-2-x+2$

$x+1 > x$

$n \Leftrightarrow n-1 \to n$

2, 3, 6 ... ТОЖ

x_{n-2}, x_{n-1}, x_n

$2x_n - x_{n-1} < x_{n+1}$

$12-3 < x_{n+1}$

$9 < x_{n+1}+1$

$10 < x_{n+1}+1$ доказано

$12-2 < x_{n+1}+1$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	7	7	5	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Посмотрим что каждый член увеличивается на разность двух предыд. +1

① ② ③ ... 99

2, 3, 6 ...

Сумма членов от 99 членов прогрес = $\frac{n(n+1)}{2}$ =

~~$\frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)\cdot d) = \frac{99}{2}(4+$~~

$50 \cdot 99$

Ответ: $a_{99} = 2 + 50 \cdot 99 = 4952$

50
99
450
+ 450

Ответ: 4952

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	7	7	5	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задание 6

$a^3+b^3=(abc+1)^2$

$a^3+b^3+3a^2b+3b^2a=(abc+1)^2+3a^2b+3b^2a$

$(a+b)^3-3ab)(a+b)=(abc+1)^2$

$(a+b)((a+b)^2-3ab)=(abc+1)^2$

$(a+b)(a^2+b^2-ab)=(abc+1)^2$

$(a+b)(a^2+b^2-ab)=(abc+1)(abc+1)$

$a+b\geq 0$ $\quad a^2+b^2-ab\geq 0$ т.к

$a^2+b^2\geq 2ab$

$a^2+b^2-2ab\geq 0$

не может быть случая $(-x)\cdot(+x)=x^2$

$$(1)\begin{cases} a+b=(abc+1) \\ a^2+b^2-ab=abc+1 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} a+b=1 \\ a^2+b^2-ab=(abc+1)^2 \end{cases}$$

~~$a+b$ - возрастает, abc возрастает при $a,b,c\in\mathbb{N}$~~

~~Целые ур-ния с параметрами~~

$a+b=(abc+1)$ $\quad a=b=c=1$;

$a=1$ ~~$b=c=0$~~ ; ~~$b=2$ $a+c=0$~~

Ответ: $b=2, a=c=1$

$a=2, b=c=1$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	7	7	5	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

(1) $\begin{cases} a+b=(abc+1) \\ a^2+b^2-ab=abc+1 \end{cases}$

a^2+b^2-ab возрастающ функц. при $a,b,c \in \mathbb{N}$

abc так же возрастает, значит данное выражение может иметь только 1 решение

$a=b=1$ $b=c=0$

(2) $\begin{cases} a+b=1 \\ a^2+b^2-ab=(abc+1)^2 \end{cases}$ Те же самые выводы из (1)

Значит либо $a=0$, либо $b=0$, но сколько бы ни слагаемых a и b, то получим будет 2

$a=0$ $b=c=1$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	7	7	5	1	2	5

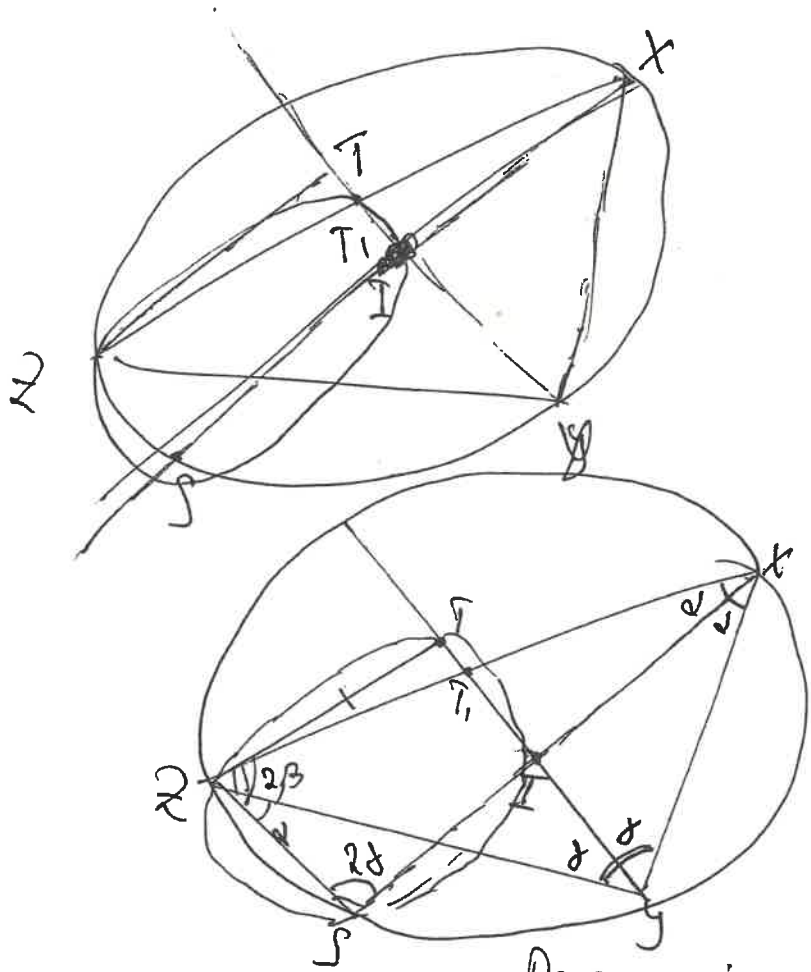
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4.



Д-ть:

$\angle XYT = \angle T$

Т.к. ∇g-ть сфн. $T_1 cT$

$2\beta = \gamma$

Решение:

$T_1 = 180 - 2\gamma \Rightarrow$ по T_1 лежит на окружности $\angle TTS$

Изв. что $180 - 2\beta - \alpha + \gamma + 2\beta = 180$

$2\beta = \gamma$ ЧТД

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	2	3	9	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа и рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	X	12	20	2	//	54

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

$f(x)=x^2-2x-1$, $g(x)=x^2-3x-1$ Тогда $f(x)-x=g(x)$, $g(x)+x=f(x)$

$S=(g(x_1))^3 f(x_3)+(g(x_2))^3 f(x_4)=(f(x_1)-x_1)^3(g(x_3)+x_3)+$

$+(f(x_2)-x_2)^3(g(x_4)+x_4)=(-x_1)^3\cdot x_3+(-x_2)^3\cdot x_4$

$f(x_1)=0$, $f(x_2)=0$, т.к. x_1, x_2 – корни кв. ф-ии $f(x)$ трёхчлена

$g(x_3)=0$, $g(x_4)=0$, т.к. x_3, x_4 – корни квадратного трёхчлена $g(x)$

$S=-x_1^3 x_3-x_2^3 x_4$

$f(x)=x^2-2x-1$ $D_1=1+1=2$ $x_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$

$g(x)=x^2-3x-1$ $D=9+4=13$ $x_{3,4}=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

$\begin{cases} x_1=1+\sqrt{2} \\ x_2=1-\sqrt{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=1-\sqrt{2} \\ x_2=1+\sqrt{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x_3=\frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ x_4=\frac{3-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x_3=\frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ x_4=\frac{3-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$

1) $S=-\left((1+\sqrt{2})^3\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)+(1-\sqrt{2})^3\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)\right)=$ (x_1 // x_3, x_2 // x_4)

$=-\left(\frac{(3+2\sqrt{2})(1+\sqrt{2})(3+\sqrt{13})}{2}+\frac{(3-2\sqrt{2})(1-\sqrt{2})(3-\sqrt{13})}{2}\right)=$

$=-\left(\frac{(3+5\sqrt{2}+4)(3+\sqrt{13})+(3+4-5\sqrt{2})(3-\sqrt{13})}{2}\right)=$

$=-\left(\frac{(7+5\sqrt{2})(3+\sqrt{13})+(7-5\sqrt{2})(3-\sqrt{13})}{2}\right)=$

$=-\left(\frac{21+15\sqrt{2}+7\sqrt{13}+5\sqrt{26}+21-15\sqrt{2}-7\sqrt{13}+5\sqrt{26}}{2}\right)=$

$=-\left(\frac{42+10\sqrt{26}}{2}\right)=-21-5\sqrt{26}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	2	3	9	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2) $S = -\left((1+\sqrt{2})^3\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) + (1-\sqrt{2})^3\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\right) =$ (x_1, x_3, x_2, x_4)

$= -\left(\frac{(7+5\sqrt{2})(3-\sqrt{13})}{2} + \frac{(7-5\sqrt{2})(3+\sqrt{13})}{2}\right) = -\left(\frac{21+15\sqrt{2}-7\sqrt{13}-5\sqrt{26}+21-15\sqrt{2}+7\sqrt{13}-5\sqrt{26}}{2}\right) = -\left(\frac{42-10\sqrt{26}}{2}\right) = -21+5\sqrt{26}$

3) $S = -\left((1-\sqrt{2})^3\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) + (1+\sqrt{2})^3\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)\right) = -\left(\frac{(7-5\sqrt{2})(3+\sqrt{13})+(7+5\sqrt{2})(3-\sqrt{13})}{2}\right) = -\left(\frac{21-15\sqrt{2}+7\sqrt{13}-5\sqrt{26}+21+15\sqrt{2}-7\sqrt{13}-5\sqrt{26}}{2}\right) =$

$= -\left(\frac{42-10\sqrt{26}}{2}\right) = -21+5\sqrt{26}$

4) $S = -\left((1+\sqrt{2})^3\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) + (1-\sqrt{2})^3\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)\right) = -21-5\sqrt{26}$

В итоге, $S = -21-5\sqrt{26}$ или $S = -21+5\sqrt{26}$

Ответ: $\{-21-5\sqrt{26}; -21+5\sqrt{26}\}$

№3

В наборе из 4 N-х чисел не могут быть 4 равных числа, т.к. 1001/4. Т.е в таком наборе могут быть 2 или 3 равных числа.

1) В наборе 3 равных числа

Т.е $bac1 = 3 \cdot n + f$, $n, f \in N$ каждому n соответствует единственное f и наоборот

$3n \in \{999, 996, 993, \ldots, 3\}$

$n \in \{333, 332, \ldots, 1\}$, т.е всего

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	2	3	9	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

333 таких пар

2) В наборе ровно 2 равных числа.

Это кол-во наборов будет равно разности кол-ва наборов с ≥ 2 равными числами и кол-ва наборов с 3-мя равными числами.

Т.к. кол-ва наборов с 3-мя равными числами для нашего конечного результата в конце придется прибавить, то будем считать, что ответ на задачу – кол-во пар, где 2 числа равны, а при остальные 2 какие-то известны (кроме того что сумма всех чисел = 100)

т.е. $100 = 2 \cdot a + x + y$, $a \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{N}$

Пусть $m = x + y$. При фиксированном a m определяется однозначно $m \in \{998, 996, \dots, 2\}$, $a \in \{499, \dots, 1\}$

Т.е. всего 499 разных m

$m \in \{3; 5; 7; \dots; 999\}$ $m=3$ $m=5$ $m=7$ ...

1 вар 2 вар 3 вар

Для любого m кол-во разбиений на x и y равно $[m/2]$

разбиения на x и y

$m = 999$ ... 499 вар

Т.е. всего $1 + 2 + \dots + 499 = \frac{499 \cdot 500}{2} = \frac{224500}{2} = 112250$

Ответ 112250.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	2	3	9	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

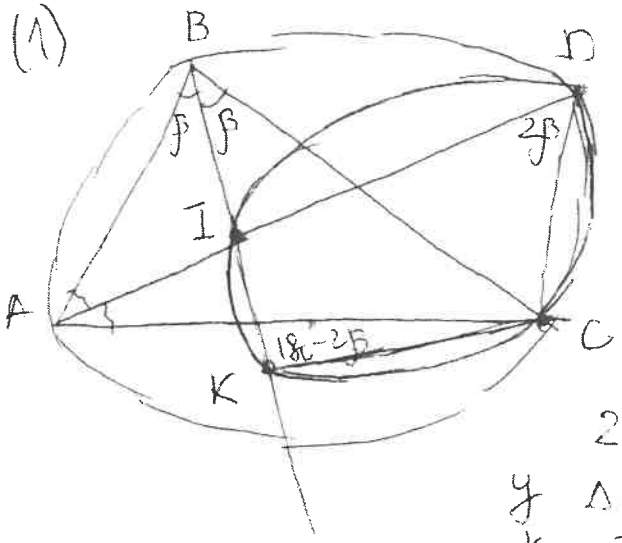
1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

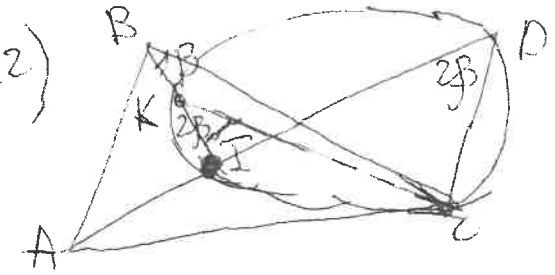
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

(1)



(2)



1. Пусть I - инцентр $\triangle ABC$. Тогда $\angle ABI = \angle CBI$, пусть $\angle CBI = \beta$

2. $D \in \omega$, где ω - окр-ть, опис-я у $\triangle ABC \Rightarrow ABDC$ - вписан-й четырёхуг-к. Тогда $\angle ABC = \angle ADC = 2\beta$, как впис-е углы, опир-ся на дугу AC.

(1) $K \in \Omega$, где Ω - окр-ть, проходящая через т-ки C, D, I $\Rightarrow$ CDIK - вписан-й четырёхуг-к. $K \notin [BI]$. Тогда $\angle IKC = 180° - \angle IDC = 180° - \angle ADC = 180° - 2\beta$.

Рассм-м $\triangle KBC$: $\angle KBC = \beta$, $\angle BKC = 180° - 2\beta \Rightarrow$ по теореме о сумме углов $\triangle$-ка $\angle BCK = \beta$

$\angle KBC = \beta = \angle KCB \Rightarrow \triangle KBC$ - р/б с осн-ем BC, $KB = KC$.

(2) $K \in [BI]$ $\angle IKC = \angle IDC = 2\beta$, как впис-е углы, опир-ся на дугу IC. Тогда $\angle BKC = 180° - 2\beta$, как смежный $\Rightarrow$ по п.3(1) $KB = KC$

что

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	2	3	9	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

$a=1$ $1^3+2^3=(4-1)^2$ $(1;2;2)$

$b=2$ $9=9$ - верно $(2;1;2)$

$c=2$

№2

Если $2x_{n-1}-x_{n-2}\ \vdots\ 2$, то $x_n=2x_{n-1}-x_{n-2}+1$,

т.к. чётное число >2 не может быть простым

Если $2x_{n-1}-x_{n-2}\ \not\vdots\ 2$, то $x_n=2x_{n-1}-x_{n-2}+1$

$x_n=2x_{n-1}-x_{n-2}+2$

Два числа, идущих подряд, не могут (каждое из них >2) быть простыми (одно из них чётное)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	2	3	9	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамках справа

383 таких пар

2) В наборе 2 равных числа. (столько 2!)

$100! = 2 \cdot a + b + c$, причём $a \neq b$, $a \neq c$, $b + c > 1$

$b \neq c$, т.к. $100!/2$ $(a + a \neq 100!)$.

$2a \in \{998, 996, \ldots, 2\}$ $a \in \{499, \ldots, 1\}$

Т.е. всего 499 возможных значений у a.

Тогда всего 499 значений для $m = b + c$

Рассмотрим все возможные разбиения m на $b + c$

$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$
1 вар	2 вар	2 вар	3 вар	3 вар
(2,1) и (1,2) – одна и та же пара				

Всего различных вар в для каждого m будет равно $[m/2]$

$[m/2]$	$m - [m/2]$
1	$m-1$
2	$m-2$
...	...
$m = 997$: 448 вар	$m = 998$: 449 вар

$[m/2]$ $m - [m/2]$ } те же пары

Т.е. таких пар будет

$1 + 2 + 2 + \ldots + 448 + 448 + 449 - 333 =$ (т.к. посчитали и те пары, в которых 3 равных числа)

$= 115 + (2 + \ldots + 448) \cdot 2 = 116 + \frac{449 \cdot 448}{2} \cdot 2 =$

$= 116 + 449 \cdot 448$

В итоге количество наборов из N-х чисел равно $116 + 449 \cdot 448 + 333 = 449 + 449 \cdot 448 = 449 \cdot 449 =$

$= 201601$. Ответ: 201601