

Математика. 8 класс

Шифр	ФИО	Итого балл	Статус
МА0002039426	Тряпицына Анна Михайловна	80	Победитель
МА0002193926	Дементьев Роман Леонидович	80	Победитель
МА0003197526	Егоров Александр Васильевич	72	Победитель
МА0002048526	Харитонов Артём Дмитриевич	70	Победитель
МА0002797826	Солдатов Иван Сергеевич	70	Победитель
МА0001994726	Лобанов Павел Сергеевич	63	Победитель
МА0002083126	Дьячков Тимофей Алексеевич	62	Победитель
МА0002472926	Буканов Тимур Ильшатovich	62	Победитель
МА0002195026	Шалымова София Алексеевна	60	Победитель
МА0002285126	Калинин Василий Андреевич	60	Победитель
МА0002508826	Судник Вячеслав Андреевич	60	Победитель
МА0002780426	Абрамов Александр Дмитриевич	60	Победитель
МА0002940326	Перминов Артём Михайлович	60	Победитель
МА0003097926	Гончаров Арнольд Сергеевич	60	Победитель
МА0002868426	Андриенко Виктор Олегович	59	Призёр II степени
МА0002634826	Ели Андрей Александрович	58	Призёр II степени
МА0003155626	Шакиров Карим Ильгизович	58	Призёр II степени
МА0003168526	Калеева Светлана Евгеньевна	58	Призёр II степени
МА0002968126	Юсупов Марат Наилевич	56	Призёр II степени
МА0002042226	Шарифуллин Фаиль Илдусович	55	Призёр II степени
МА0002161126	Маркеев Станислав Максимович	55	Призёр II степени
МА0002408726	Ильин Андрей Владимирович	55	Призёр II степени
МА0002496426	Шишкин Михаил Артемович	55	Призёр II степени
МА0003223226	Сивцев Аман Прокопьевич	55	Призёр II степени
МА0003281726	Язданова Хадия Ленаровна	55	Призёр II степени
МА0003163326	Лукманов Арсен Фиданович	54	Призёр II степени
МА0002059626	Тарадаев Егор Дмитриевич	53	Призёр II степени
МА0002160126	Турищева Елизавета Сергеевна	53	Призёр II степени
МА0002575226	Минкин Михаил Романович	53	Призёр II степени
МА0002676626	Непеина Ника Рустамовна	53	Призёр II степени
МА0002374926	Кузнецов Милан Александрович	52	Призёр II степени
МА0003183126	Зверева Анастасия Александровна	52	Призёр II степени
МА0002561126	Шагиев Артём Русланович	51	Призёр II степени
МА0002859326	Пернай Иван Русланович	51	Призёр II степени
МА0002984826	Перевезенцев Алексей Олегович	51	Призёр II степени
МА0002044226	Голятин Артём Андреевич	50	Призёр II степени
МА0002233526	Горячев Виктор Иванович	50	Призёр II степени
МА0002545626	Валиахметов Марсель Радикович	50	Призёр II степени
МА0003194426	Евграфов Кирилл Александрович	49	Призёр III степени
МА0002206826	Прибытков Данил Дмитриевич	48	Призёр III степени
МА0002551926	Старостин Сергей Дмитриевич	48	Призёр III степени

МА0002561926	Галиев Камиль Ильназович	48	Призёр III степени
МА0002859826	Агаркова Екатерина Ярославовна	48	Призёр III степени
МА0002863726	Иванов Алексей Радиславович	48	Призёр III степени
МА0002978826	Луковцев Марк Семенович	48	Призёр III степени
МА0003026226	Тихонова Кира Андреевна	48	Призёр III степени
МА0003096826	Драган Роман Алексеевич	48	Призёр III степени
МА0003291426	Шалашов Артём Алексеевич	48	Призёр III степени
МА0002002926	Чермаков Арсений Денисович	47	Призёр III степени
МА0002776126	Анисимов Александр Сергеевич	47	Призёр III степени
МА0002529226	Королев Александр Андреевич	46	Призёр III степени
МА0002736626	Гулак Нина Алексеевна	46	Призёр III степени
МА0003144726	Игнатова Полина Юрьевна	46	Призёр III степени
МА0002354126	Кудишин Андрей Евгеньевич	45	Призёр III степени
МА0002451726	Пеледов Иван Алексеевич	45	Призёр III степени
МА0002574426	Романчук Тимофей Дмитриевич	45	Призёр III степени
МА0003069426	Агафонов Павел Андреевич	45	Призёр III степени
МА0003077726	Захаров Арсений Валерьевич	45	Призёр III степени
МА0002536926	Полюхов Иван Романович	44	Призёр III степени
МА0001999826	Пшеничников Максим Сергеевич	43	Призёр III степени
МА0002175826	Асеева Эвелина Андреевна	43	Призёр III степени
МА0002879326	Бабичев Павел Сергеевич	42	Призёр III степени
МА0002977226	Горинов Матвей Алексеевич	42	Призёр III степени
МА0003151926	Клепкина Елизавета Павловна	42	Призёр III степени
МА0002337726	Ковалев Давид Александрович	41	Призёр III степени
МА0002914726	Муравьёва Анастасия Александровна	41	Призёр III степени
МА0002070226	Константинов Максим Алексеевич	40	Призёр III степени
МА0002200726	Нурмиева Резеда Дамировна	40	Призёр III степени
МА0002361926	Лысов Денис Эдуардович	40	Призёр III степени
МА0002903326	Сакаринен Александр Аркадьевич	40	Призёр III степени
МА0002990826	Ефимов Андрей Алексеевич	40	Призёр III степени
МА0003269026	Хлопикова Анна Алексеевна	40	Призёр III степени

*Сканы работ размещены по возрастанию шифра

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М А О О О 1 9 9 4 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N1

1	2	3	4	5	6	Σ
15	18	0	10	20		63

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Известно, что Маша играла с тремя котами бы с 3 друзьями. Маша играла с каждой девочкой и котом бы с 3 друзьями. Эту ситуацию можно представить в виде графа, у которого 4 вершины степени 3 или более. Но в графе не может быть нечётное количество вершин нечётной степени $\Rightarrow$ степень вершин не могут быть 3 и 5. Остаются 4 и 6. Но в ситуации, где степени вершин равны 6 каждая девочка сыграла с каждой, но по условию Маша не играла с котом $\Rightarrow$ каждая девочка сыграла с 4 котятами, т.к. Маша сыграла меньше 6.

Ответ: каждая 4. 158.

N2

$\frac{1}{4}n^2$ возрастает быстрее чем $2n$ $\Rightarrow$ нужно найти при каких значениях n значение выражения $-\frac{1}{4}n^2 + 2n + 12$ не будет натуральным.

$$\Rightarrow \Delta \leq 0$$

$$-\frac{1}{4}n^2 + 2n + 12 = 0$$

$$D = 16$$

$$n_1 = 12$$

$$n_2 = -4, \text{ но } n - \text{натур} \} \Rightarrow n_{\max} = 12$$

Вариант № 3

М А О О О 1 9 9 4 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2 (продолжение)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Значит значение n должно быть меньше 12 и больше 0. Значение $2n$ целое при любых натуральных $n \Rightarrow 2n+12$ - натуральное, а значение $\frac{1}{4}n^2$ натуральное при n кратном 2 и не равном 0. Иначе $\frac{1}{4}n^2$ будет дробным, а целое - дробное = дробное $\Rightarrow n$ кратно 2

Рассмотрим все значения n от 0 до 12 кратные 2:

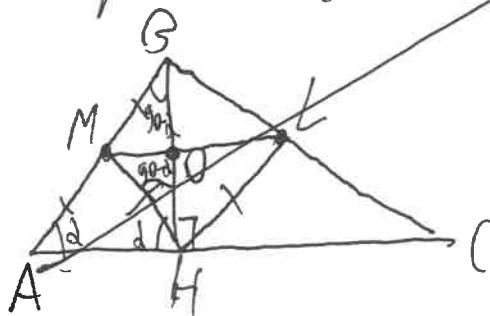
$$\begin{array}{lcl} \text{при } n=2 & -1+4+12=15 \\ \text{при } n=4 & -4+8+12=16 \\ \text{при } n=6 & -9+12+12=15 \\ \text{при } n=8 & -16+16+12=12 \\ \text{при } n=10 & -25+20+12=7 \end{array} \Rightarrow 5 \text{ значений}$$

Ответ: 5

188.

№3

изначально сделаем рисунок обозначив $\triangle ABC$, высоту BH и $\triangle MLH$ без медианы CM и биссектрисы AL



Дано: $MH=LN=17$; CM - медиана, AL - биссектриса, BH - высота; $\angle LMH=30^\circ$
Реш: CH_2 - высота
Найти: $BH+CH_2$
Решение:

Вариант № 3

М А О О О 1 9 9 4 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N3 (продолжение)

Рассмотрим $\triangle ABH$:1) $BH \perp AC$ - прямой ($AC \perp BH$)2) $AM = MB$ (M - середина AB)

$$\Rightarrow MH = AM = MB \Rightarrow \angle MAH = \angle MHA \quad (\triangle AMH - \text{равноб.});$$

$$\angle MHB = \angle MBH \quad (\triangle MHB - \text{равноб.}).$$

Обозначим $\angle BAC = d \Rightarrow \angle AHM = d$ 2) 90° Рассмотрим $\triangle ABH$

$$d + 90 + \angle ABH = 180 \quad (\text{сумма углов треугольника})$$

$$\angle ABH = 90 - d \Rightarrow \angle HMB = 90 - d \quad (1)$$

3) Рассмотрим $\triangle AMH$

$$d + d + \angle AMH = 180 \quad (\text{сумма углов треугольника})$$

$$\angle AMH = 180 - 2d$$

4) $\angle AMH + \angle HMB = 180$ (смежные)

$$\angle HMB = 2d \Rightarrow \angle BML = 2d - 30 \quad (\angle HML = 30^\circ)$$

5) Рассмотрим $\triangle MDH$:

$$90 - d + 30 + \angle MDH = 180 \quad (\text{сумма углов треугольника})$$

$$\angle MDH = 60 + d$$

N4

Для начала нужно сделать алгоритм. Представим сколько максимумом может быть в 1 столбце длиной 7 строк:



Вариант № 3

М А О О О 1 9 9 4 7 2 6

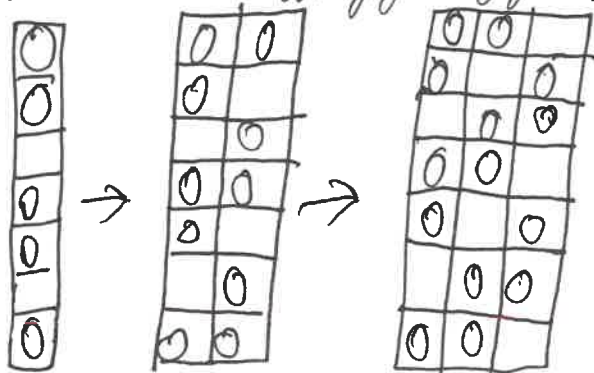
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N4 (продолжение)

это 5. В следующей строке



мы также максимум ввели 5, ну а в третью. Из-за того, что мы брали по 5 строк зурсе будет заборона рованы и будет 4 строк. Затем займем будут мы 2 или вновь 2 хода можем

занимать 5 строк. Тогда получается алгоритм (5, 5, 4), (5, 5, 4) П.к. у нас 8 столбцов то сумма может равна: $5+5+4+5+5+4+5+5=38$
 Ответ: 38

108.

N5

Гипотеза Запишем неравенство:

$$\frac{a^4+b^4}{a^6+b^6} + \frac{b^4+c^4}{b^6+c^6} + \frac{a^4+c^4}{a^6+c^6} \leq \frac{1}{a+b+c}$$

$$1=a+b+c$$

$$\frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab}$$

$$\frac{a^4+b^4}{a^6+b^6} - \frac{1}{ab} + \frac{b^4+c^4}{b^6+c^6} - \frac{1}{bc} + \frac{a^4+c^4}{a^6+c^6} - \frac{1}{ac} \leq 0$$



Вариант № 3

М А О О О 1 9 9 4 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N 5 продолжение

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$\frac{a^5b + b^5a - ab - b^6}{(a^6 + b^6)/ab} + \frac{b^5c + c^5b - b^6 - c^6}{a(b^6 + c^6)/bc} + \frac{a^5c + c^5a - c^6 - a^6}{(c^6 + a^6)/ac} \leq 0$$

$$\frac{a^5(b-a) + b^5(a-b)}{(a^6 + b^6)/ab} + \frac{b^5(c-b) + c^5(b-c)}{(b^6 + c^6)/bc} + \frac{a^5(c-a) + c^5(a-c)}{(c^6 + a^6)/ac} \leq 0$$

$$\frac{(b-a)(a^5 - b^5)}{(a^6 + b^6)/ab} + \frac{(b^5 - c^5)(c - b)}{(b^6 + c^6)/bc} + \frac{(a^5 - c^5)(c - a)}{(c^6 + a^6)/ac} \leq 0$$

Рассмотрим выражение $(b-a)(a^5 - b^5)$
 если $b > a$, то и $b^5 > a^5 \Rightarrow (b-a)(a^5 - b^5)$ меньше
 нуля т.к. $b-a > 0$, а $a^5 - b^5 < 0$, т.к. a, b, c — натур.
 если $a > b$, то будет наоборот, но также
 меньше нуля. Искать все ситуации и у
 $(b^5 - c^5)(c - b)$ и $(a^5 - c^5)(c - a)$. Значит в числителе
 у этих 3 слагаемых отрицательные числа или
 0. В знаменателе все могут только положитель
 ные числа т.к. a, b, c — натур. $\Rightarrow$ при их сложении
 и умножении получается тоже положительное
 значит мы складываем 3 числа меньших или
 равных 0 $\Rightarrow$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа
в рамке справа

Вариант № 3

М А 0 0 0 1 9 9 4 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

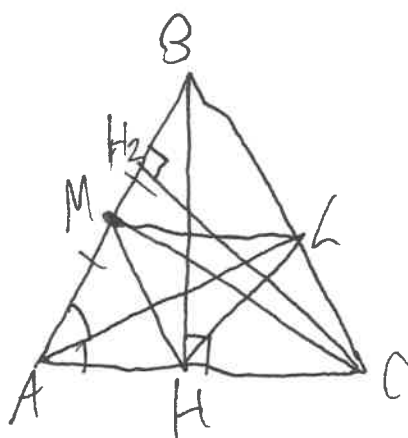
N 5 (продолжение)

$$\Rightarrow \frac{(b-a)(a^5-b^5)}{(a^6+b^6)ab} + \frac{(b^5-c^5)(c-b)}{(b^6+c^6)bc} + \frac{(a^5-c^5)(c-a)}{(a^6+c^6)ac} \leq 0 -$$

- верно

208.

N 3



Дано: $CH_2 \perp AB$; $BH \perp AC$; $AM = MB$;
 $\angle LAC = \angle LAB$, $\angle MLH = 30^\circ$

Найти: $CH_2 + BH = ?$

Решение: ① рассм. $\triangle MHL$: $MH = HL$ (по укл.) $\Rightarrow \angle MHL$ - равноб. $\Rightarrow \angle MLH =$

$$= \angle HLM = 30^\circ$$

② Рассм. $\triangle ABH$:

$\angle BHA$ - прямой (по укл.)
 $\angle AMB$ - прямой (по укл.)

$MH = MB = MA$ (медiana прямоу. $\triangle$)

08.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

МА 0001999826

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	18	0	5	0		43

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

2. Найти к-во $n \in \mathbb{N}$, при которых

$$-\frac{1}{4}n^2 + 2n + 12 \in \mathbb{N}$$

Очевидно, что $2n + 12 \in \mathbb{N}$ при каждом $n \in \mathbb{N}$.

$-\frac{1}{4}n^2 + 2n + 12 \in \mathbb{N}$ только при чётных n , т.к. если $n = 2k$, то $n^2 = 4k^2$, $k \in \mathbb{N}$

$$-\frac{1}{4}n^2 + 2n + 12 > 0 \quad | \cdot (-4)$$

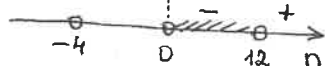
$$n^2 - 8n - 48 < 0$$

$$n^2 - 8n - 48 = 0$$

$$D = 64 + 192 = 256$$

$$n_1 = \frac{8 + 16}{2} = 12$$

$$n_2 = \frac{8 - 16}{2} = -4$$



$$n \in (0, 12)$$

Остаётся найти все вар. подбором, с учётом, что $n \neq 2k$, $k \in \mathbb{N}$

$$n = 2:$$

$$-\frac{1}{4} \cdot 4 + 4 + 12 = -1 + 16 = 15 \in \mathbb{N}, \text{ подходит}$$

$$n = 4:$$

$$-\frac{1}{4} \cdot 16 + 8 + 12 = -4 + 8 + 12 = 16 \in \mathbb{N}, \text{ подходит}$$

$$n = 6:$$

$$-\frac{1}{4} \cdot 36 + 12 + 12 = -9 + 24 = 15 \in \mathbb{N}, \text{ подходит}$$

$$n = 8$$

$$-\frac{1}{4} \cdot 64 + 16 + 12 = -16 + 28 = 12 \in \mathbb{N}, \text{ подходит}$$

$$n = 10$$

$$-\frac{1}{4} \cdot 100 + 20 + 12 = -25 + 32 = 7 \in \mathbb{N}, \text{ подходит.}$$

Т.е., всего таких n - 6 штук.

Ответ: 6.

188.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М А О О О 1 9 9 9 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1. 7 девочек.

Изобразим их игры в
виде графа

Понятно, что min
к-во игр ≥ 3 , т.к. у
Машин по усл. 3
игры.

~~Нужно найти 3 игры
каждой девочки на
рисунке.~~

~~Ответ: 3~~

В свою очередь так к-во игр ≤ 5 , т.к. у
Кати не было игр.

За 1 партию к общему к-ву игр прибавляется
ещё по 2

Общее к-во игр в начале:

$$3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 10.$$

У каждой девочки было по 3 игры:

$$\text{Всего: } 7 \cdot 3 = 21$$

$$21 - 10 = 11.$$

Т.е. мы не можем прийти к такому результату,
ведь 11/2

У каждой девочки было по 4 игры:

$$7 \cdot 4 = 28$$

$$28 - 10 = 18 : 2.$$

У каждой девочки было по 5 игр:

$$7 \cdot 5 = 35$$

$$35 - 10 = 25 : 2$$

Возм. вар. с 4 играми на рис. 2.

Ответ: 4.

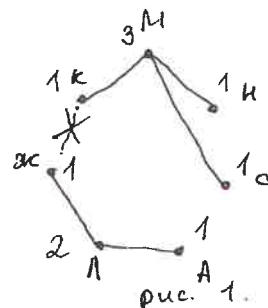


рис. 1.

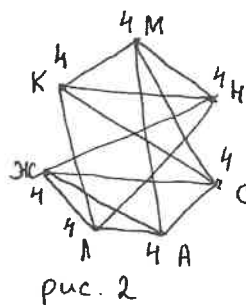


рис. 2

208.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

МАООО1999826

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

4.

Раскрасим доску как на рисунке. Заметим, что куда бы мы не поместили прямоугольник 1×3 или 3×1 , он всегда будет ложиться на 3 клетки: 1, 2 и 3. Т.е., чтобы всегда получался прим. 1×3 или 3×1 , из 3 типов клеток должны быть монетки.

Если закрасить клетки 1 и 2, то останутся $56 - 19 - 19 = 18$ клеток типа 3. Т.е., если закрасить все клетки типа 3 и какой-то оставшиеся типа 1, то их будет на 1 меньше, т.е. $19 + 18 = 37$ — min монеток у Влада.

Ответ: 37.

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

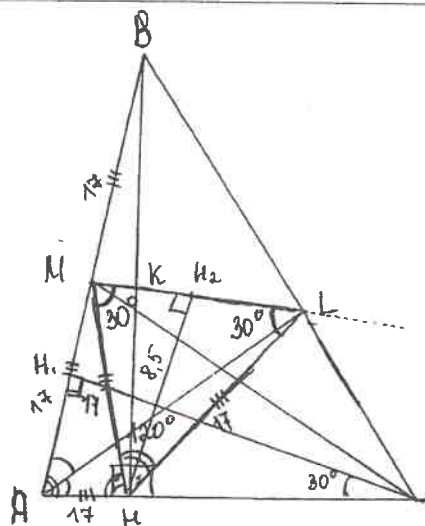
М А О О О 1 9 9 9 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

3.



$\triangle MLH$ - р/б т.к. $ML = LH = 17$ и $\angle HML = \angle HLM = 30^\circ$.

Найдём $\angle MHL = 180^\circ - \angle HML - \angle HLM = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$

~~Заметим, что $\angle HML = \angle MHB + \angle BHC \Rightarrow \angle MHB = 120^\circ - 90^\circ - 30^\circ$~~

~~$\triangle MHK$ - р/б т.к. $\angle KMH = \angle MHK$ и $\triangle MHK \sim \triangle MLH$ по 2-м углам~~

Заметим, что MH - медиана, проведённая к гипотенузе AB треугольника $\triangle ABC$ ($\angle BHA = 90^\circ$, т.к. BH - высота) $\Rightarrow MH = AM = MB = 17$

$\triangle AMH$ - р/б ($AM = MH$)

$\angle MAH = \angle AHM = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ \Rightarrow \triangle AMH$ - равносторонний $\Rightarrow$

~~$AM = HM = MH = 17$.~~

~~По т-ме Пифагора:~~

~~$BH^2 = AB^2 - AM^2 = 34^2 - 17^2 = 857 = 3 \cdot 17^2 = (17\sqrt{3})^2 \Rightarrow BH = 17\sqrt{3}$.~~

~~$\angle ABH_1 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow AH_1 = 2CH_1$~~

~~$\angle MAL = \angle LAC = 30^\circ$ (AL - биссектриса)~~

$AB = AM + BM$ - гипотенуза.

Проведём высоту HH_2 , которая ещё и биссектриса в прямоугольном $\triangle MHH_2$ $\angle MHH_2 = 30^\circ \Rightarrow HH_2 = \frac{1}{2}MH = 8,5$.

По т-ме Пифагора:

$MH_2^2 = MH^2 - HH_2^2 = 17^2 - 8,5^2 = 4 \cdot 8,5^2 - 8,5^2 = 3 \cdot 8,5^2 \Rightarrow MH_2 = 8,5\sqrt{3} \Rightarrow$

$ML = 17\sqrt{3}$ (т.к. HH_2 - медиана)

HH_2 - ср. линия $\triangle AMZ \Rightarrow \angle AMK = 90^\circ$ и $\angle AMH = 60^\circ$.

т.к. $\triangle AMH$ - р/б, $\angle AMH = \angle MHA = \angle MAH = 60^\circ \Rightarrow \triangle AMH$ - р/б.

По т-ме Пифагора:

$BH^2 = AB^2 - AH^2 = 34^2 - 17^2 = 3 \cdot 17^2 = (17\sqrt{3})^2 \Rightarrow BH = 17\sqrt{3}$.

$\angle BAL = \angle LAC = 30^\circ$ (AL - биссектриса)

$\triangle AHL$ - р/б. ($\angle HAL = \angle AHL = 30^\circ$) $\Rightarrow \angle HLA = 30^\circ$ и $\angle AHL = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$.

По т-ме синусов:

$\frac{AH}{\sin 30^\circ} = \frac{AL}{\sin 120^\circ} \Rightarrow AL = \frac{AH \cdot \sin 120^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{17 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 17\sqrt{3}$

$ML = AL = 17\sqrt{3} \Rightarrow \triangle AML$ - р/б

В $\triangle AHC$, $\angle HAC = 60^\circ \Rightarrow \angle ACH = 30^\circ$ (CH - высота) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AH = \frac{CH}{2} = 17 \Rightarrow CH = 34$.

Ответ: $BH = 17\sqrt{3}$; $CH = 34$.

08.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М А О О О 1 9 9 9 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

5. $a+b+c=1$

$a+b < 1$, т.к. $a, b, c > 0$

$(a+b)^4 < 1$

$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 < 1$

$a^4 + b^4 < 4(a^3b + ab^3) + 6a^2b^2$

Аналогично с др. сл.

Сложим все нер-ва:

$2(a^4 + b^4 + c^4) < 3 - 4(a^3b + ab^3 + b^3c + bc^3 + a^3c + ac^3) - 6(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 < 1,5 - 2(ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ac(a^2 + c^2)) - 3(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)$

Остаток срав.

$abc \vee 3 - 4(ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ac(a^2 + c^2)) - 3(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)$

$< 0,027$

$0,027 \vee 3 - 4$

$< 0,09$

$< 0,18$

$< 0,09$

$< 0,18$

$< 0,09$

$< 0,18$

$< 0,09$

$< 0,18$

$< 0,09$

$< 0,18$

$0,027 \vee 3 - 4 \cdot 0,027 \vee 0,486 - 6 \cdot 0,0243$
 $0,027 \vee 3 - 1,944 - 1,458$
 $0,027 > -0,402, \text{ т.т.т.}$

0,5

ВНИМАНИЕ! Проверьте только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

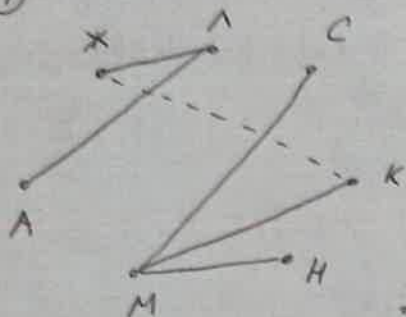
Вариант № 4

МАООО2ОО2926

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проводятся только те, что записано с той стороны листа в рамках справа

①



1	2	3	4	5	6	Σ
15	0	0	12	20		47

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Пусть каждая софала a партий $\Rightarrow$ всего $\frac{7 \cdot a}{2}$ партий $\Rightarrow$
 $\Rightarrow a$ - чет, т.к. $3,5a \in \mathbb{N}$.
 Также Маша софала 3 партии $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ у всех х.д. 3 партии $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ партий м.д. 4 или 6 (эт. ускорен
 в диапазоне от 0 до 6, большие ~~или~~ равны 3).
 Заметим, что Маша не ~~софала~~ софала с Катей $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ ~~всех~~ у каждой из них макс 5 партий $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ у всех макс 5 партий, т.к. у всех одинаково.
 $\begin{cases} a \in \{0, 1, 2, 3\} \\ a \leq 5 \end{cases} \Rightarrow a = 4$.

Ответ: 4 партии.

158.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

МАООО2002826

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

② $-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 = a$

$$D = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (20-a) = \frac{16}{9} + \frac{4}{3}(20-a) = \frac{16 + 4(20-a)}{9} = \frac{256 - 12a}{9} = \frac{4(64 - 3a)}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 (64 - 3a)$$

$$n_{1,2} = -\frac{4}{3} \pm \frac{2}{3} \sqrt{64 - 3a} \in \mathbb{N}$$

Заметим, что $-\frac{4}{3} - \frac{2}{3} \sqrt{64 - 3a} \notin \mathbb{N}$, т.к.

$$-\frac{4}{3} < 0; \quad -\frac{2}{3} \sqrt{64 - 3a} \leq 0 \Rightarrow -\frac{4}{3} - \frac{2}{3} \sqrt{64 - 3a} < 0.$$

$$n = \frac{2}{3} (\sqrt{64 - 3a} - 2) \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{64 - 3a} \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{64 - 3a} \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow \sqrt{64 - 3a} = \{2, 5\}. \text{ Если } \sqrt{64 - 3a} = 2$$

то $64 - 3a = 4 \Rightarrow a = 20 \Rightarrow a \notin \mathbb{N}$.

1) Если $\sqrt{64 - 3a} = 5$

$$n = \frac{2}{3} (\sqrt{64 - 3a} - 2) = 0 \ominus$$

2) Если $\sqrt{64 - 3a} = 5$

$$n = \frac{2}{3} (\sqrt{64 - 3a} - 2) = 2 \oplus$$

Проверка:

$$n = 2 \Rightarrow -\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 = -\frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{4}{3} \cdot 2 + 20 =$$

$$= -\frac{4}{3} + \frac{8}{3} + 20 = 20\frac{4}{3} = 21\frac{1}{3} \notin \mathbb{N} \ominus \Rightarrow$$

⇒ таких n не существует.

Ответ: 0.

08

ВНИМАНИЕ! Проверьте, только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

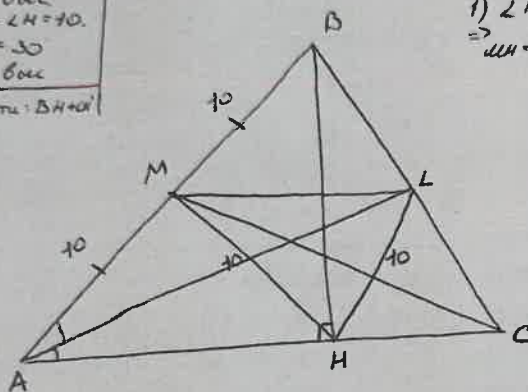
Вариант № 4

МА0002002826

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверьте только то, что написано с этой стороны листа
и ранее справа

③ Дано:
 $\triangle ABC$
 AL - бис.
 CM - мед.
 BH - бис.
 $\angle MNH = 30^\circ$
 $\angle LHM = 30^\circ$
 CH - бис.
 Найти: $BH + CH$



1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1) $\angle BHA = 90^\circ$, т.к. BH - бис. $\Rightarrow \triangle ABH$ - прямоугольный
 $\Rightarrow CH = AM = BH = 10$, т.к. CH - бис. с $\triangle ABC$.

28.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М А О О О 2 О О 2 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

4

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2

"1" - 27, "2" - 27

"3" - 26

Раскрасим доску как на рисунке (1, 2, 3 - увета) и заметим, что в каждом из полученных 3х1 или 1х3 по 3 увета $\Rightarrow$ поставим монеты в 2 выделенных увета, он получит расстановку с тех кол-вом монет (если поставит в 3 увета с тех кол-вом монет) $\Rightarrow$ прибавив еще 1 монету, он получит искомое число, т.к. всегда найдется припуск с 3 монетами. (по формуле Дарихи)

Всего таких клеток: $27 + 27 + 1 = 55$, т.е. 55 монет min.

54 клетки, т.к. найдется расстановка в клетке "2" и "3", тогда во всех прибудет по 2. (если монет еще меньше, то при с 3м. должно сработать.)

Пример:

0	0		0	0		0	0
0			0	0		0	0
	0	0		0	0		0
0	0		0	0		0	0
0		0	0		0	0	
	0	0		0	0		0
0	0		0	0		0	0
0		0	0		0	0	
	0	0		0	0		0
0	0		0	0		0	0

Использовано 54 монеты. Следующая монета приведет к при с 3х1 с 3м. (по формуле Дарихи. где 0кл и 1м.)

Ответ: 55 монет.

128.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

МАООО2002825

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано в этой стороне листа в рамке справа

⑤ $a^2 + b^2 + c^2 = 3$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 \geq 2ab \\ b^2 + c^2 \geq 2bc \\ a^2 + c^2 \geq 2ac \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2 \geq 0 \\ (b-c)^2 \geq 0 \\ (a-c)^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$$

$$3 \geq ab + bc + ac$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ac) \leq 9$$

$$a+b+c \leq 3 + 2 \cdot 3 = 9$$

$$a+b+c \leq 3$$

по н-бу Коши (9-6 в конце)

$$3 \geq ab + bc + ac \geq 3 \sqrt[3]{abc}$$

$$1 \geq \sqrt[3]{abc}$$

$$abc \leq 1$$

$$a+b+c \leq 3, ab+bc+ac \leq 3, abc \leq 1$$

$$\begin{cases} a+b+c \leq 3 \\ ab+bc+ac \leq 3 \\ abc \leq 1 \end{cases}$$

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} \leq \frac{1}{2}$$

$$2(a(b+1)(c+1) + b(a+1)(c+1) + c(a+1)(b+1)) \leq (a+1)(b+1)(c+1)$$

$$2(ab+5b(c+1) + (ab+5b(c+1) + (ac+5c(b+1)) \leq (ab+5a+5b+25)(c+1)$$

$$2(abc + 5ab + 5ac + 25a + ab + 5bc + 5ab + 25b + abc + 5bc + 25c) \leq$$

$$\leq abc + 5ac + 25a + 5bc + 25b + 25c + 125 + 5ab + 5bc +$$

$$+ 5ab + 25a + 25b + 25c + 125$$

$$27 + 15(ab+bc+ac) + 25(a+b+c) \leq$$

$$\leq 27 + 15 \cdot 3 + 25 \cdot 3 =$$

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

МАООО2ОО2926

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверьте решение по что написано в этой колонке листа в разное время

⑤ Упростите 1

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$\begin{aligned}
 & 0abc + 20ab + 20bc + 20ac + 50a + 50b + 50c \leq \\
 & \leq abc + 5ab + 5bc + 5ac + 25a + 25b + 25c + 125 \\
 & 5abc + 15ab + 15bc + 15ac + 25a + 25b + 25c \leq 125 \quad ; \\
 & abc + 3(ab + bc + ac) + 5(a + b + c) \leq 25 \\
 & abc + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 3 = abc + 24 \leq 25 \\
 & abc \leq 1
 \end{aligned}$$

208.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

МАООО2ОО2828

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамках таблицы

5) Продолжение 2

1) Д-во:

$$a+b+c+d \geq 4\sqrt[4]{abcd}$$

$$\begin{cases} a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \\ c+d \geq 2\sqrt{cd} \quad (\sqrt{c}-\sqrt{d})^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$a+b+c+d \geq 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{cd} = 2(\sqrt{ab} + \sqrt{cd})$$

$$x = \sqrt{ab}$$

$$y = \sqrt{cd}$$

$$x+y \geq 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} = 2\sqrt{\sqrt{abcd}} = 2\sqrt[4]{abcd} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b+c+d \geq 2 \cdot 2\sqrt[4]{abcd} = 4\sqrt[4]{abcd} \quad \square$$

2) Д-во:

$$a+b+c + \sqrt[3]{abc} \geq 4\sqrt[4]{abc \sqrt[3]{abc}}$$

$$a+b+c + \sqrt[3]{abc} \geq 4\sqrt[4]{a^4 b^4 c^4} = 4\sqrt[4]{a^4 b^4 c^4} = 4\sqrt[3]{abc}$$

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \quad \square$$

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

МАООО2039426

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	0	20	20		80

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

а1

Все сыграли одинаковое кол-во партий
и Мама сыграла как минимум 3 $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ все сыграли как минимум 3. Меня не
играла с Катей $\Rightarrow$ она ~~еще~~ могла сыграть max.
5 партий $\Rightarrow$ все могли сыграть max 5
партий $\Rightarrow$ каждая сыграла либо 3 либо 4 либо
5 партий, но девочек всего 7, если представить
их в виде графа (где они — вершины, а
партии — рёбра) то каждая должна сыграть чет.
число игр, т.к. ~~кажд~~ в любом графе число
вершин с нечет. степенью четно, а вершин
у нас 7, и степени у всех равны $\Rightarrow$
каждая могла сыграть только ровно 4 партии

ВНИМАНИЕ! Проверьте только то, что записано с этой стороны листа
в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

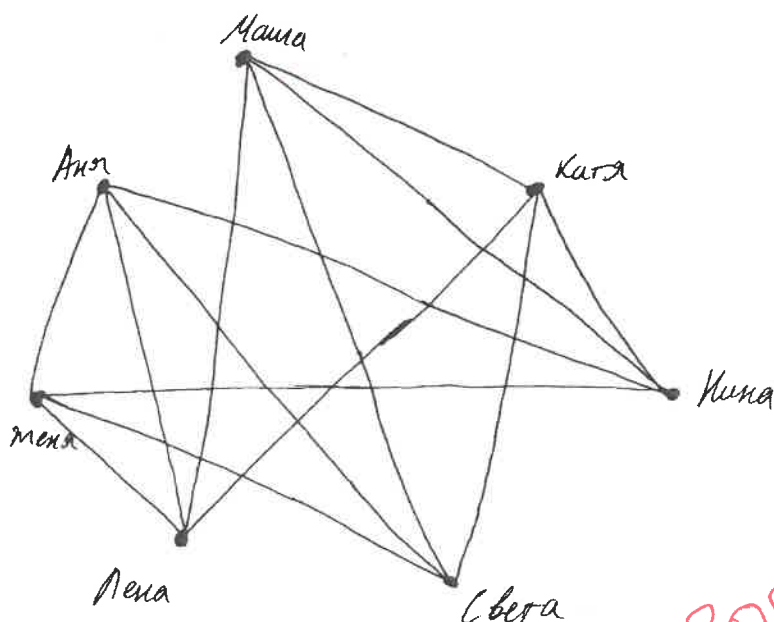
М А О О О 2 0 3 9 4 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Пример:



208.

№2.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 = \frac{n^2}{3} + \frac{4n}{3} + 20 = \\
 & = \frac{4n - n^2}{3} + 20 \quad \text{если } n \neq 3, \text{ то в ответе} \\
 & \text{получается } = \frac{n(n-4)}{3} + 20, \text{ если } n \geq 4, \\
 & \text{то } n : 3, \text{ если это не так,}
 \end{aligned}$$



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

МАООО2039426

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N2.

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 = -\frac{n^2}{3} + \frac{4n}{3} + 20 =$$

$$= \frac{4n - n^2}{3} + 20 > 0 \quad (\text{нам нужно чтобы } 0 \in \mathbb{N})$$

$$\frac{4n - n^2}{3} > -20 \quad / \cdot 3$$

$$4n - n^2 > -60 \quad / \cdot -1$$

$$n^2 - 4n < 60$$

$$n(n-4) < 60$$

$n > 0$, т.к. $n \in \mathbb{N}$ по усл $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ чем меньше n , тем меньше произведение $\Rightarrow$ max. $n = 9$, т.к. $20(20-9) = 20 \cdot 11 = 220$, а должно быть строго меньше 60 $\Rightarrow$ числа ≥ 20 нам не подходят.

$$\frac{n(n-4)}{3} + 20 \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{либо } n \text{ либо } 4-n : 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \equiv 0 \pmod{3} \text{ или } n \equiv 1 \pmod{3}, \text{ т.к. } 4 \equiv 1 \pmod{3}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 0 3 9 4 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа
и рамки справа



Тогда $n \leq 9$ и $n \equiv 1$ либо $n \equiv 0 \pmod{3}$

Проверяем для наших возможных n :

• $n=1$

$$-\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{4}{3} \cdot 1 + 20 = -\frac{1}{3} + 20 = -1 + 20 = 19 \checkmark$$

• $n=3$

$$-\frac{1}{3} \cdot 9 + \frac{4}{3} \cdot 3 + 20 = -3 + 4 + 20 = 21 \checkmark$$

• $n=4$

$$-\frac{1}{3} \cdot 16 + \frac{4}{3} \cdot 4 + 20 = -\frac{16}{3} + \frac{16}{3} + 20 = 20 \checkmark$$

• $n=6$

$$-\frac{1}{3} \cdot 36 + \frac{4}{3} \cdot 6 + 20 = -12 + 8 + 20 = 16 \checkmark$$

• $n=7$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{3} \cdot 49 + \frac{4}{3} \cdot 7 + 20 = -\frac{49}{3} + \frac{28}{3} + 20 = \\ & = \frac{21}{3} + 20 = 27 \checkmark \end{aligned}$$

• $n=9$

$$-\frac{1}{3} \cdot 81 + \frac{4}{3} \cdot 9 + 20 = -27 + 12 + 20 = 5 \checkmark$$

205.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1.

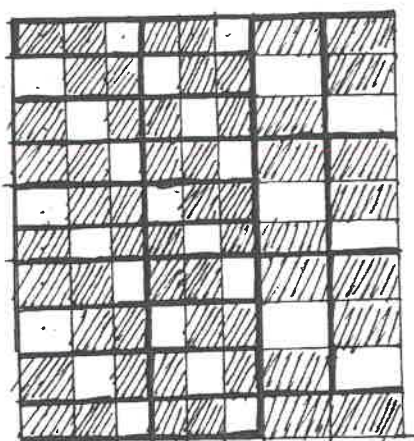
М А О О О 2 0 3 9 4 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

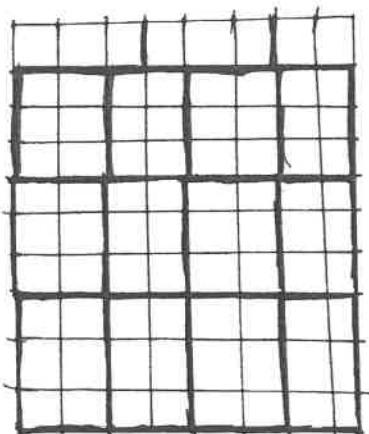
№4.



(рис. 1)

Разрешим нашу задачу
 6×6 на прямоугольнички
 3×1 и 1×3 симметричных
 образом. Всего их получится
 26 штук.

У Влада не ~~меньше~~ менее 54 монет, т.к. при
 наличии ≤ 54 монеты может произойти ситуация,
 когда ~~нужно~~ нужного нам прямоугольничка нет
 разобьем наш прямоугольничка на ~~прямоуголь-~~
 -нички 1×2 и 2×3 . * Докажем, что 55 монет ему



точно будет достаточно ~~разреш~~
 (* оставив 1 верхнюю строчку). Предпо-
 -ним, что ему не хватит 55
 монет. В верхнюю строчку можно
 поместить max 6 монет, ~~т.к.~~
~~всех мы поместим по 7 в~~
~~каждый прямоугольничек 1×3 и еще~~
~~2 в 2 своб. клетки, то~~

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

МА 0002039426

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверять только то, что записано с этой стороны листа
в рамках справа

~~В строке 8-ми~~

(т.к. если в строке из ~~8-ми~~ 8-ми клеток их
заполнено будет хотя бы 7, то очевидно, что
найдется заполняемый прямоугольник 1×3 , а
мы этого не хотим) $\Rightarrow$ На наши 1×3 и 2×3 остается $\min 55 - 6 = 49$ монет. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по принципу Дирихле в какой то из
них попадет хотя бы 5 монет, значит в ~~какую~~
какой то 1×3 или 2×3 попадет ≥ 3 монеты (по принципу Дирихле) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Он будет заполнен $\Rightarrow$ Противоречие $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Предположение неверно $\Rightarrow$ 55 монет ему
гарантированно хватит. $\Rightarrow$ Ответ: 55 монет. 20б.

По неравенству о средних между средним
арифметическим и средним квадратичным:

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

МА 0002039426

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{3}{3}}$$

$$\frac{a+b+c}{3} \leq 1$$

$$a+b+c \leq 3.$$

$$\frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{a(b+5)(c+5) + b(a+5)(c+5) + c(a+5)(b+5)}{(a+5)(b+5)(c+5)} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{3abc + 10ac + 10ab + 10bc + 25(a+b+c)}{abc + 5ac + 5bc + 5ab + 25(a+b+c) + 125} \leq \frac{1}{2} \quad / \cdot 2 \cdot *$$

$$6abc + 20ac + 20ab + 20bc + 50(a+b+c) \leq abc + 5ac + 5bc + 5ab + 25(a+b+c) + 125$$

$$5abc + 15ac + 15ab + 15bc + 25(a+b+c) \leq 125 \quad / \div 5$$

$$abc + 3ac + 3ab + 3bc + 5(a+b+c) \leq 25.$$

$$abc + 3ac + 3ab + 3bc + a^2 + b^2 + c^2 + a(5-a) + b(5-b) + c(5-c) \leq 25$$

$$abc + (a+b+c)^2 + ac + ab + bc + 5(a+b+c) - a^2 - b^2 - c^2 \leq 25.$$

$$abc + (a+b+c)^2 + ac + ab + bc + 5(a+b+c) \leq 28$$



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 0 3 9 4 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

По неравенству Коши:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

и мы знаем, что $a+b+c \leq 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1 \geq \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

$$\Downarrow$$

$$(a+b+c)^2 \leq 9$$

$$1 \geq \sqrt[3]{abc} \wedge 3$$

$$1 \geq abc$$

Докажем, что $ac+ab+bc \leq a^2+b^2+c^2$

По неравенству Коши:

$$a^2+b^2 \geq 2ab$$

$$a^2+c^2 \geq 2ac$$

$$c^2+b^2 \geq 2bc$$

$$\Rightarrow 2(a^2+b^2+c^2) \geq 2(ab+ac+bc) \div 2$$

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \geq ab+ac+bc$$

«Огрудим» наше неравенство:

$$abc + (a+b+c)^2 + ac+ab+bc + 5(a+b+c) \leq 28$$

$$\begin{array}{ccccccc} \wedge 1 & & \wedge 1 & & \wedge 1 & & \wedge 1 \\ 1 & + & 9 & + & 3 & + & 15 \end{array} \leq 28$$

$$\leq 28$$

$$28 \leq 28 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Неравенство верно $\Rightarrow$ ЧТД!!! 208.

ВНИМАНИЕ! Прочеркиваются только те, что записано с этой стороны листа в рамках строки



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1.

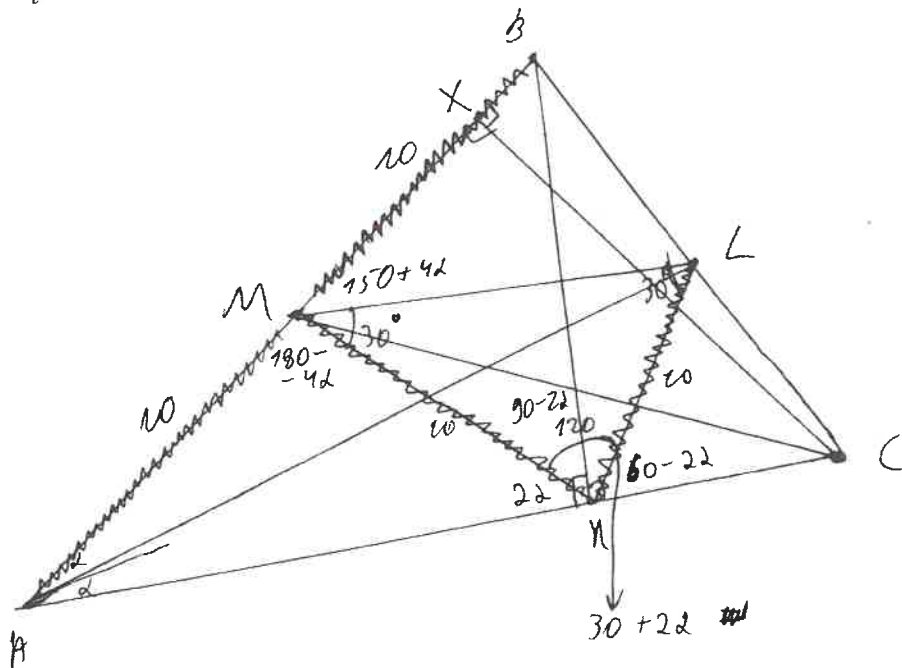
МАООО2039426

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

НЧ.



Решение:

1) Пусть $\angle A = 22^\circ$.

2) Заметим, что ML — мед. в т.у. $\triangle ABC$. провед. из прам. угла $\Rightarrow ML =$

$$= AM = MB = 10 \Rightarrow \triangle AMN - \text{пр.} \Rightarrow \angle ANM = 22^\circ$$

3) $\angle A$ — острый

$$\left. \begin{array}{l} \angle BNA = \angle ANC = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABN \sim \triangle ACL \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BN}{CL} = \frac{AN}{AX} = \frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC} \text{ (по зм. св-ву д-с-сы)} \Rightarrow$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 0 4 2 2 2 6

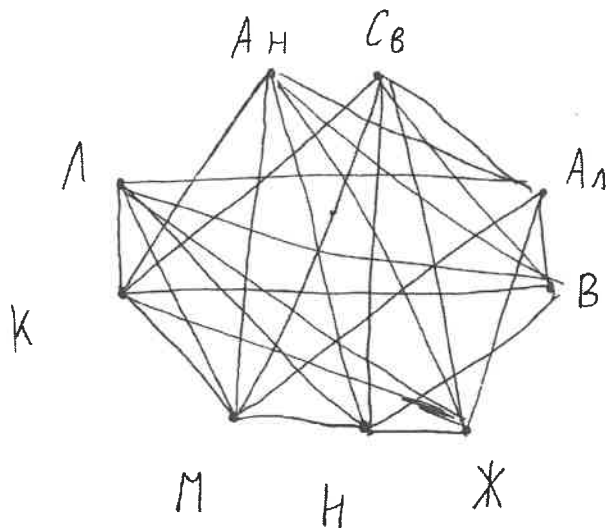
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	15	x	20	x		55

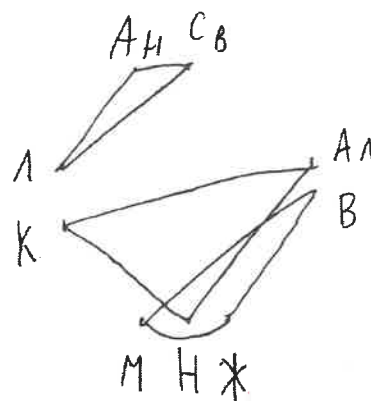
Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Составим граф где девочки - вершины, переписки - рёбра. т.к. степени всех вершин равны ^{значит} ~~кроме того~~ они чётные, по лемме о рукопожатиях. $\Rightarrow$ т.к. есть вершина степени 5 $\Rightarrow$ степени вершин были 8. пример на 8-нальный граф, пример на 6:



Анти граф:



№2 По формуле $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ или $\frac{9 \cdot 6}{2} = 27$

205

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = \frac{-n^2 + 6n}{5} + 11 = \frac{n(6-n)}{5} + 11$$

Чтобы $\frac{n(6-n)}{5} + 11$ было натуральным, нужно чтобы $\frac{n(6-n)}{5}$ было ≥ 11 (иначе $\frac{n(6-n)}{5} + 11$ будет 50).

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

4 1 0 0 0 2 0 4 2 2 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$\frac{n(6-n)}{5} > -11 \mid \cdot 5$$

$$n(6-n) > -55 \mid : (-1)$$

$$-n(6-n) < 55 \mid -55$$

$$n^2 - 6n - 55 < 0$$

$$(n-11)(n+6) < 0$$



$$n < 11 \text{ или } n+6 < 0$$

$$\underline{n < 11}$$

$n < -6$ - но n - натуральное



$n < 11$, тогда $\frac{n(6-n)}{5}$ - делю целым, нужно чтобы

$$n : 5$$

~~наблюдая делители~~ $6-n$ или $(6-n) : 5$.

тогда: если $n : 5$, а $n < 11$, то $n = 10, 5$.

если $(6-n) : 5$, то $n = 1, 6, 11$.

тогда всего 4 разных n - 5

Ответ

Ответ: 5

158

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 О 4 2 2 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

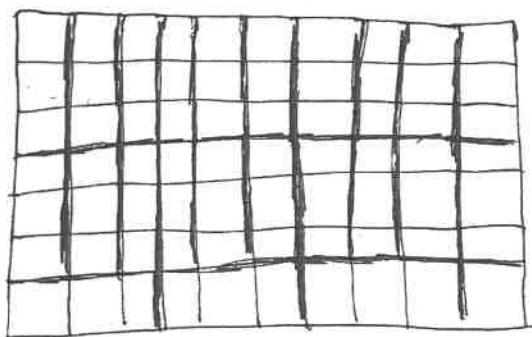
1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 4

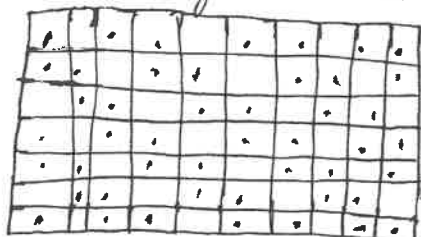
Докажите, что максимальное кол-во монеток, которые не образуют прямоугольники 3×1 и 1×3 это 47. Тогда у Влада максимум 48.

Док-во



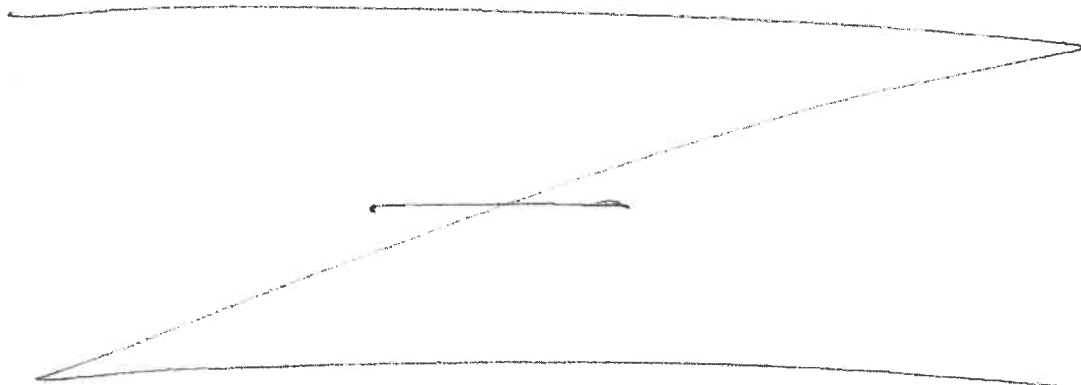
Доску 10×7 можно разбить на 25 прямоугольников 3×1 и останется ещё 1 свободная клетка. В каждом прямоугольнике 1×3 может быть

максимум 2 монеты + свободная клетка в которой



может быть 1 монета. Итого $23 \cdot 2 + 1 = 47$
← Пример на 47 (точки - монеты.)

205.



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 О Ч Ч 2 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	10	x	20	x		50

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 1.

То условие Маша уже сыграла три игры, а значит все сыграла не менее 3 игр. Также Жень не играла с Катей, а значит Жень может сыграть максимум с 5 людьми, а значит все сыграла не более 5 игр. 3; 4; 5 - все варианты количества игр у каждого человека.

Чтобы посчитать суммарное количество игр нам нужно n - количество людей умножить на k - количество игр у каждого человека но таким образом мы посчитаем удвоенное число партий, значит итоговая формула:

$\frac{nk}{2} \in \mathbb{Z}$, а т.к. n - нечётное, то k - должно быть чётным, т.к. $nk : 2$. Из данных рассуждений следует, что остаётся только вариант, что каждый человек играл только 4 раза.

Пример: Изобразим пример в виде графа, где вершины - люди, а рёбра - партии:

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЧОНОК»

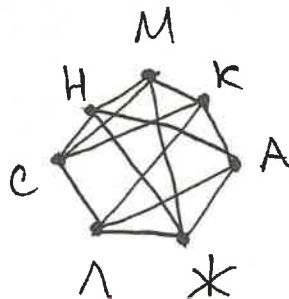
Вариант № 1

М А О О О 2 0 4 4 2 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)



как видно по примеру, между
всеми вершинами и с собою
даются все данные конус-
овые.

208.

Задача 2.

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20$$

$$\underbrace{n}_{\in \mathbb{N}} \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}n \right) \underbrace{+ 20}_{\in \mathbb{N}}, \text{ а значит } \frac{4}{3} - \frac{1}{3}n \in \mathbb{N} \mathbb{Z}$$

не обязательно.

$$\wedge \frac{1}{3} - \frac{1}{3}n \in \mathbb{Z}, \text{ значит } \frac{1}{3} - \frac{1}{3}n \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 = 0 \text{ Решим такое уравнение}$$

$$n^2 - 4n - 60 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 16 + 240 = 256 > 0, \sqrt{D} = 16$$

$$\begin{cases} n = \frac{4+16}{2} \\ n = \frac{4-16}{2} \end{cases} \begin{cases} n=10 & n=-6 \end{cases}$$

Видно, что при $n=10$ наше значение
(данного в условии выражения) обратится
в 0.

~~Если мы переберем все возможные по-
ложительные a, b, c и x, y, z , где $a+b+c \geq 6$~~



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 0 4 4 2 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$ - нечетные, взаимно
простые, т.е. $|c| > |a|$ и $|d| > |b|$, тогда

$$|a| \cdot |b| > |c| \cdot |d| - \text{окрежно}$$

В нашем случае:

$$n\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}n\right) + 20$$

В нашем случае при увеличении n ,

$$\frac{4}{3} - \frac{1}{3}n \quad (n > 10) \quad \frac{4}{3} - \frac{1}{3}n - \text{будет отрицательным}$$

но, и уменьшиться а значит $n\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}n\right)$ также уменьшится (согласно рассуждениям про a, b, c, d), а ~~также~~ ^{также} ~~то~~ ^{то} при $n = 10$ $n\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}n\right) = -20$ следу-

ет, что при $n > 10$ $n\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}n\right) < -20$, а значит $n\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}n\right) + 20 < 0$, и n натуральное не может, а значит $n < 10$, т.е. при $n = 0$ выражение обращается в 0.

$$n < 10 \text{ и } \frac{1}{3} - \frac{1}{3}n \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Также можно только: 1 и 4 и 7 - но эти их можно методом перебора проверить.



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 0 4 4 2 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Значит таких чисел всего 3, и ответ задачи

3.

Ответ: 3.

100.

Задача 4.



Разобьём данный квадрат на прямоугольники 1×3 . У нас останется две клетки, ничего старшего. Все же нам временно покрасим 1×3 прямоугольник в три цвета как показано на третьем рисунке.

Сначала рассмотрим правый рисунок. На нём 27 единиц; 27 фак и только 26 троек. Заметим что в любом прямоугольнике 3×1 есть все три цвета, а это значит что если мы поможим шашки во все единицы и двойки, которых в сумме 22 ⁵⁴, то мы никак не сможем найти количество заданного тура.



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

МА 0002044226

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

прямоугольника 1×3 , т.к. у нас нет ни одной монеты в третьем цвете. Это доказывает, что при минимуме 52-54 монеток мы не влюбаем самую маленькую записанную прямоугольник 1×3 , ну а при меньшем количестве уже тем более очевидно, что & мы не сможем найти такой прямоугольник.

& Вот имея 55 монеток, можно доказать, что у нас уже обязательно найдётся нужный нам прямоугольник, ведь на записанном рисунке видно, что красной уже 26, а желтых клеток 25, а значит в любом случае останется хотя бы одна красная клетка.

Ответ: 55.

208.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 0 4 8 5 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	0	12	18		70

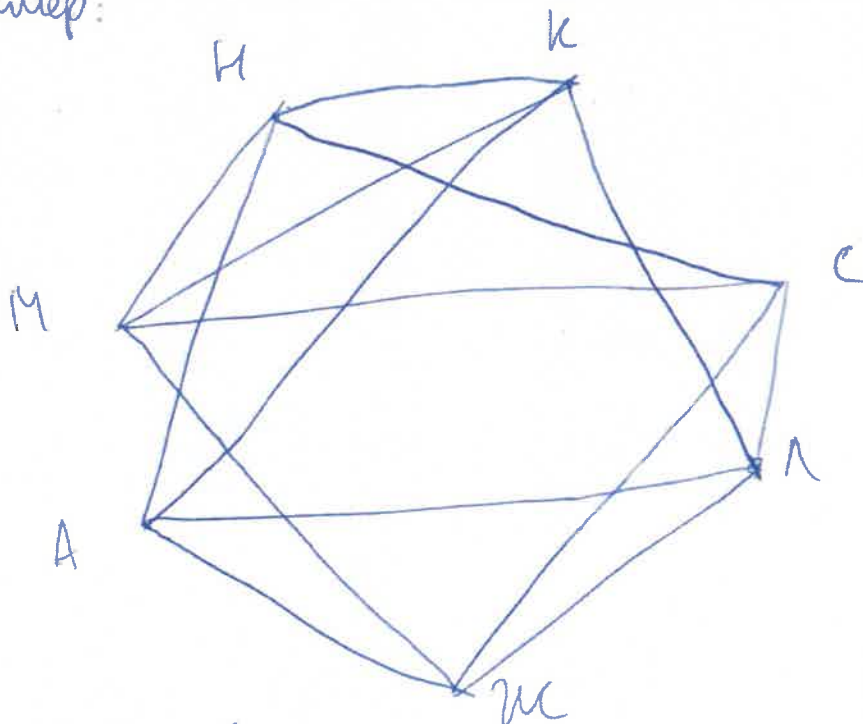
Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ: Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Построим граф, где
Вершины - девчонки, а ребра - играли или нет.
Пусть n - кол-во парток, которые сыграли каждая девчонка. Из условия сразу видно, что
~~мы~~ $n \geq 3$, т.к. Маша сыграла с Ириной, Катей, Светой
по цел. Теперь заметим, что сумма степеней всех
вершин четное всегда, а она равна $7 \cdot n \Rightarrow$
невозможно четное $\rightarrow n = 4$ или 6
Заметим, что $n = 6$ невозможно, т.к. Маше не играли
с Катей по цел $\Rightarrow$ ее степень $\leq 5 \rightarrow n = 4$.

Пример:



Все условия выполнены в примере.

Ответ: 4

208.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 0 4 8 5 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20$$

Разложим это выражение на множители.

$$D = \frac{16}{9} + \frac{4}{3} \cdot 20 - \frac{2 \cdot 6}{9}$$

$$n_{1,2} = \frac{-\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9}}}{-\frac{2}{3}} = -6 ; 10 \Rightarrow -\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 =$$

$$= -\frac{1}{3}(n+6)(n-10)$$

$$\Leftrightarrow n-10 < 0$$

$$n < 10$$

Но также заметим, что либо $n+6 : 3$ либо $n-10 : 3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ получается 1, 3, 4, 6, 7, 9

Подставим и проверим:

1) $n=1$ выражение = 21

2) $n=3$ = 21

3) $n=4$ = 20

4) $n=6$ = 16

5) $n=7$ = 13

6) $n=9$ = 5

Всего n - 6 штук $\Rightarrow$

Ответ: 6. 208.

ВНИМАНИЕ: Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант №

1

М А О О О 2 0 4 8 5 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверьте только то, что записано с этой стороны листа
в рамке справа



1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2

04

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Потрасит доску в диагональную
3^х цветную раскраску.

Тогда:

"1" - 27
"2" - 27

"3" - 26

Заметим, что тогда монет у Влада ≥ 55 , т.к. иначе
он мог ставить не только в "1" и "2", а тогда ~~квато~~
не нашлось бы прирученных 1×3 . (из-за
раскраски) Тогда ответ: 55

и 5

128.

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3$$

$$\frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{a(b+5)(c+5) + b(a+5)(c+5) + c(a+5)(b+5)}{(a+5)(b+5)(c+5)} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{3abc + 10ab + 10bc + 10ac + 25a + 25b + 25c}{a(b+5)(c+5)} \leq \frac{1}{2}$$

$$a(b+5)(c+5) \geq 5ab + 5bc + 5ac + 25a + 25b + 25c + 125$$

$$6abc + 20ab + 20bc + 20ac + 50a + 50b + 50c \leq$$

$$\leq abc + 5ab + 5bc + 5ac + 25a + 25b + 25c + 125$$

$$5abc + 15ab + 15ac + 15bc + 25a + 25b + 25c \leq 125$$

$$abc + 3ab + 3ac + 3bc + 5a + 5b + 5c \leq 25$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 0 4 8 5 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$cbs + 3(ab + bc + ac) + 5(a + b + c) \leq 25$$

Теперь оценим abc , $ab + bc + ac$, $a + b + c$.

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3abc \Rightarrow abc \leq 1$$

$$\uparrow \rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt{a^2 b^2 c^2}$$

по неравенству

Коши где 3^k чисел

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 + c^2}{2} \geq ab + bc + ac$$

3''

по неравенству

$$abc + 3(ab + bc + ac) + 5(a + b + c) \leq 25$$

по 1

1

$$\Rightarrow 5(a + b + c) \leq 15$$

$$a + b + c \leq 3$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + (ab + bc + ac) \leq 9$$

3

1

$\Rightarrow$ по неравенству верно,

а следовательно и все предположения. з.т.д.

185.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А 0 0 0 2 0 4 8 5 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

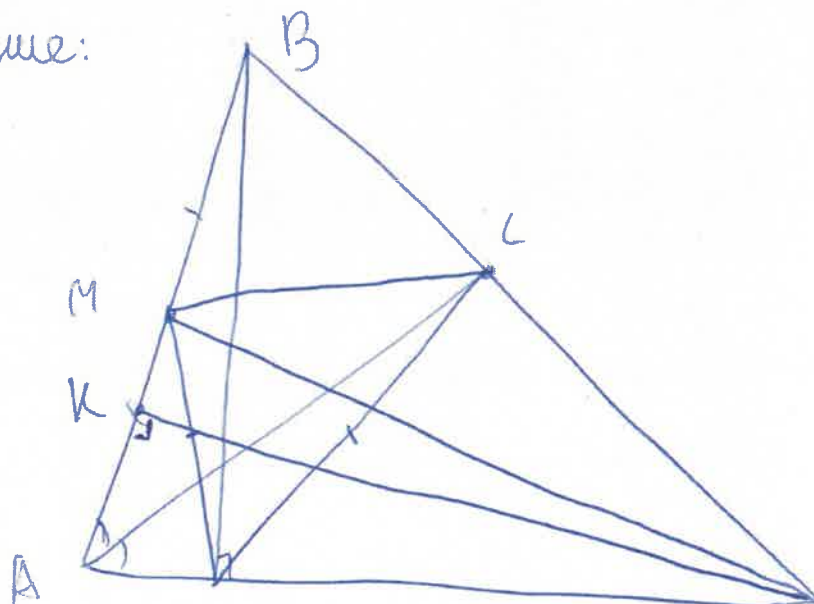
1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Дано: AL - биссектриса, BK - высота, CM - медиана. $MI = LI = 10$, $\angle LMK = 30^\circ$

Найти: $BK + BK$

Решение:



$AM = MB = MI$ как медиана к гипотенузе в $\triangle ABK$.

Ответ: $20\sqrt{3}$ 08.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М А О О О 2 0 5 9 6 2 6

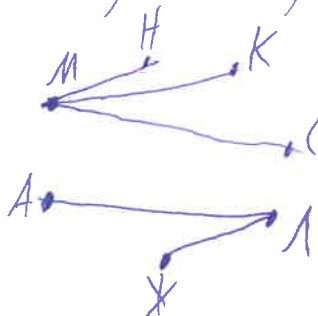
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	18	0	15	X		53

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N 1

Пусть обозначим девочек как вершины, а партию как отрезки.
и М - Мама, Н - Нина, К - Катя, С - Света, Л - Лена, Ж - Женя, А - Ана



Это дано из условия и значит все девочки играют одинаково число партий то степени вершин равны и тогда мы сможем узнавать количество отрезков по формуле степени вершин. Кол-во вершин: 2 тогда

как чтобы узнать кол-во отрезков надо посмотреть сколько отрезков выходит из вершины в градусе поднимать и поднимать так как каждый отрезок считается 2 раза то значит что в нашем случае степени вершин должны быть четными. Если они будут нечетными то у нас будет не дано кол-во вершин так как кол-во вершин 4, и если у каждой будет выходить нечетное то количество всех нечетных не будет делиться на 2 значит степени вершин четно и больше 3 тогда как у всех вершин степени восточно равны из вершины М выходит 3 вершины, но так как из вершины в вершину выходит соединяет только один отрезок то значит из вершин максимум выходит 6 отрезков то значит как надо рассуждать степени восточно вершин или то есть сколько из них выходит вершин: 3, 4, 5, 6, тогда степени восточно равны, условие чинно, но 3 и 5 не подходят так как они нечетные, а потому степени четные восточно или сколько из них выходит вершин не могут быть нечетными это доказано формулой до этого по таблице вариантов 4 и 6



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М А О О О 2 0 5 9 6 2 6

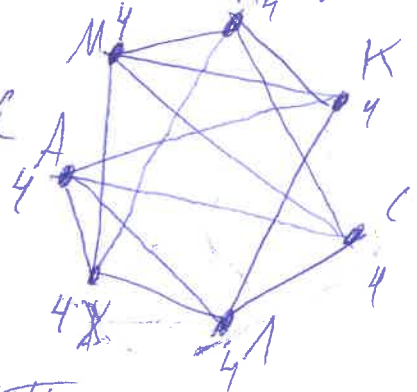
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

но степень вхождения или
сколько из вершины выходит
отрезков, но может равняться
0, так как тогда из вершины данны выходят отрезки
во все остальные вершины, но из условия нам известно что
Меня не играло Катей или что между вершинами Ж и К нет
отрезка; то из точки Ж не может выходить отрезков
значит остается единственный вариант 4, и он подходит

Пример



Аня играла с Катей, Леной, Женей,
Светой

Это есть

Маша играла с Никой, Катей,
Светой, и Женей

Никола играла с Машей, Катей,
Женей, Светой

Женя играла с Машей, Леной,
Никой, Аней

Света играла с Никой, Леной,
Аней, Машей

Лена играла со Светой, Аней,
Женей, Катей

Меня играла с Аней, Леной, Никой,
Машей

208

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

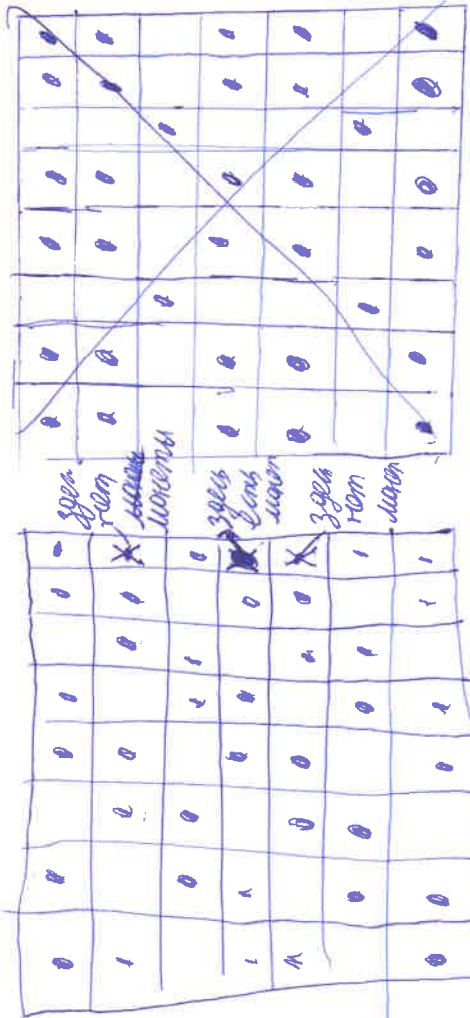
М А О О О 2 0 5 9 6 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N 4



и максимальное кол-во монет
чтобы не было угловых
1x3 и 3x1, 3x3 тогда в каждой
ряду по 8 клеток доски 4x8 монеты
6 клеток, но если мы попытаемся
чтобы в ряду не было загромождения 3 подряд
но если мы попытаемся разместить
во всех клетках монеты чтобы 3 подряд не
было монет так у нас будет 6 рядов
справа по 4 что получается значит, тогда
в каждой строке 4 монеты по 4 в каждой строке 5
загромождение, а в каждой строке 6 будет
полезно сделать чтобы в 3 ряда по 6 клеток
было 6 клеток с монетами, а в 4 по 5
тогда клеток будет 38, а дальше нельзя
сделать так как если будет 6 клеток с
монетами в одной строке по 8 клеток, и в
остальных 5 то есть в 3 то в каждой-то
3 последующих ряда будет по 6 клеток 2 ряда
с 6 клетками с монетами по 6 в ряд
будет клеток с монетами максимум 2
клетки с монетами и если еще будет 6 рядов
с 6 монетами с монетами в ряду в 6
и 1 рядов (длина будет 38 клеток с монетами
тогда если есть 4 ряда с 6 клетками
(монеты по 6 в ряду в клетках то будет
одновременно ряд с 2 клетками с монетами
но тогда и тогда не получится так как в 3 ряда
с 6 клетками с монетами будут стоять
рядом знак и будет меньше 38 если будет 4 ряда

6 клеток с монетами

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа
в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М А О О О 2 0 5 9 6 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

то максимум может в доске 7×8
где макс. 4 б. может в доске
тогда по условию прямоугольные

1×3 или 3×1 , 38 может. Но минимальное кол-во может тогда
всегда были прямоугольные 1×3 или 3×1 , 39 может в доске 7×8

Ответ: 39 может минимизи у Влада 158.

N2

Пусть $-\frac{1}{4}n^2 + 2n + 12 = 0$, то

$D = 4 + 12 = 16 = 4^2$

$n_1 = \frac{-2+4}{-\frac{1}{2}} = -4$

$n_2 = \frac{-2-4}{-\frac{1}{2}} = 12$

но $n_1 = -4$ - не является решением зада-
точ на n - натуральное число

но при $n > 12$ то есть начиная с 14 то есть n - делится
на 2 тогда n делится на 2, то $-\frac{1}{4}n^2$ - целая (полож.
часть), а $2n + 12$ - число целое без дробной части то значение $-\frac{1}{4}n^2 + 2n + 12 =$
целое (целая часть + натуральное число значит n - делится на 2

, то при $n = 14$, $-\frac{1}{4} \cdot 14^2 + 2 \cdot 14 + 12 = -49 + 28 + 12 = -9$ - не натуральное число

и при $n = 12$, будет 0 что не является натуральным числом значит что при дальнейшем
увеличении n значение $-\frac{1}{4}n^2 + 2n + 12$ отрицательное то есть будет меньше 0

уменьшится то есть значение будет становиться все больше и больше. Самые
малые значения n это 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74, 76, 78, 80, 82, 84, 86, 88, 90, 92, 94, 96, 98, 100

на 2 то будет больше числа $n = 12$ то есть $n = 14$ и $n = 16$ и так далее то есть будет станов-
иться больше чем на 2
и рассмотрим все случаи

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М А 0 0 0 2 0 5 9 6 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$-\frac{1}{4}n^2 + 2n + 12 \text{ если } n=2, \text{ то}$$

$$-\frac{1}{4} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 12 = -1 + 4 + 12 = 15, \text{ что}$$

подходит под условие

$$-\frac{1}{4}n^2 + 2n + 12, \text{ если } n=4, \text{ то } -\frac{1}{4} \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 12 = -4 + 8 + 12 = 16 - \text{подходит}$$

$$-\frac{1}{4}n^2 + 2n + 12, \text{ если } n=6, \text{ то } -\frac{1}{4} \cdot 6^2 + 2 \cdot 6 + 12 = -9 + 12 + 12 = 15 - \text{подходит}$$

$$-\frac{1}{4}n^2 + 2n + 12, \text{ если } n=8, \text{ то } -\frac{1}{4} \cdot 8^2 + 2 \cdot 8 + 12 = -16 + 16 + 12 = 12 - \text{подходит}$$

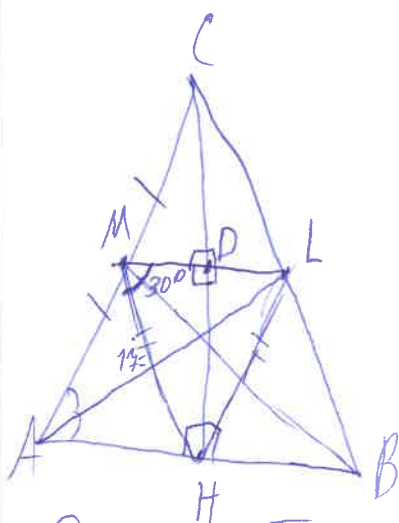
$$-\frac{1}{4}n^2 + 2n + 12, \text{ если } n=10, \text{ то } -\frac{1}{4} \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 12 = -25 + 20 + 12 = 7 - \text{подходит}$$

значит нам подходит при 2, 4, 6, 8, 10, то есть кол-во натуральных чисел n для которых значение $-\frac{1}{4}n^2 + 2n + 12$, тоже является натуральным числом, по кол-ву вариантов $n=5$

Ответ: 5

185.

N3



Дано: $\triangle ABC$ - треугольник, AL - медиана, BH - высота, M - медиана, $MH = ML = 1$, $\angle LMN = 30^\circ$

Найти: сумму длин высот $\triangle ABC$, отрезанных из вершин B и C

Решение: Так как $\triangle MLN$ - равнобедренный, то так как $MH = ML$ - по условию, то с основанием ML , то $\angle LMN = \angle MLN = 30^\circ$, то по теореме о сумме углов в треугольнике равно 180° , то $\angle MLN = 180^\circ - \angle LMN - \angle MLN = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$, то $\angle H$ - является высотой для $\triangle MLN$ - то $\angle MHN = 60^\circ$, тогда $\angle HMD = 30^\circ$, $\angle MDN = 90^\circ$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М А О О О 2 0 5 9 6 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



то по теореме о том что ~~сторона~~ ~~катет~~
 в прямоугольном треугольнике
 медианой против угла в 90° равен
 половине гипотенузы то из этого что $\triangle MDH$ - прямоугольный и $\angle DMH = 30^\circ$
 то $MH = 2 \cdot DH$, то есть $17 = 2 \cdot DH \Rightarrow DH = 8,5$, так как $MH = 17$ по условию
 и тогда $\angle AHD = 30^\circ$ так как $\angle AHC = 90^\circ$, а $\angle MHC = 90^\circ$
 $\angle AHC = \angle AHD + \angle MHC \Rightarrow 90^\circ = \angle AHD + 90^\circ \Rightarrow \angle AHD = 0^\circ$ то пусть MH -
 секущая, а ML и AN - прямые то ML и AN - параллельны так как несут соответ-
 ственные углы при секущей равные то AN - секущая, в $\triangle MNA$ три параллельны
 прямых ML и AB так как AN и ML - параллельны то ML и AB - параллельны
 то $\angle MLN = \angle HNB$ как соответственные углы и равны 30° , тогда $\triangle MNL$ и $\triangle HNB$
 подобны (по двум углам) подобие 2 так как $\angle L$ - общий и $\angle CAB$ и $\angle MLN$
 равны и $\angle CLM = \angle CBA$, а по подобиям подобие 2 так как $AC = 2 \cdot MC$
 по условию так как $MC = AM$ при медиане а $AC = MC + AM$, то знаем что
 $CH = 2 \cdot CD$ как высоту при подобии и потому как $CH = CD + DH$, то $CD = DH$
 и $DH = 8,5$, $CD = 8,5$ значит $CH = 17$ то знаем что LD - для $\triangle CLH$ -
 высотой медианой так как $\angle LHD = 90^\circ$ и $DH = CD$, то $\triangle CLH$ - равнобедренный
 и LD - медиана и высота то $\angle HLD = 2 \cdot \angle CLD$ и $\angle HLD = 30^\circ$, и тогда $\angle CLD = 15^\circ$
 и углы при основании равны $\angle CHL = \angle HCL = 60^\circ$, и $\triangle CLH$ - равнобедренный
 с треугольником $\triangle MHN$ то $\triangle CLH$ равно так как $CL = MH$ и $CH = LN$ и
 по условию $MH = HN$, то $CL = MH = HN = CL$, и углы не равны 90° , то знаем что
 $CL = 17$, и $AM = 17$, $CL = 17$ и так как $\triangle MCL$ и $\triangle ACB$ - подобны (по двум углам)
 подобие 2 то $\angle CLM = \angle CBA$, а $\angle CBA = 30^\circ$ и $\angle CLM = 30^\circ$, и углы $\angle CLM = \angle CBA = 30^\circ$
 и $\angle CLM = \angle CBA = 30^\circ$ и $\triangle ABC$ - равнобедренный ну а значит когда мы
 проведем высоту из точки B то будет треугольник с углами 60° и биссектриса
 34 равной 34 высота лететь будет против угла 30° значит она
 равна половине гипотенузы то есть 17 , значит сумма высот
 из точек A и B равно $17 + 17 = 34$, в треугольнике ABC
 Ответ: 34

08.

Вариант № _____

М А 0 0 0 2 0 7 0 2 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	0	0	x		40

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N2

Рассмотрим $-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n$ и т.д. Перепишем его в виде $\frac{4n - n^2}{3} + 20$. Разберём 3 случая: I: $\frac{4n - n^2}{3} > 0$. Тогда,

т.к. $20 \in \mathbb{N}$, то $\frac{4n - n^2}{3} \in \mathbb{N}$. Т.к. $3 \in \mathbb{N}$, то $4n - n^2 \in \mathbb{N}$ и $(4n - n^2) : 3$. Отсюда $n(4 - n) : 3$. Заметим, что

в этом случае $4n - n^2 > 0$ (т.к. $3 > 0$), а значит, ввиду $n \in \mathbb{N}$, $4 - n \in \mathbb{N}$, отсюда $4 - n > 0$. Значит,

$n < 4$ и возможны 3 варианта: $n = 1$, $n = 2$ и $n = 3$.

В том и в этом случае $n(4 - n) : 3$, а во втором — нет. $\Rightarrow$ Всего 2 варианта: $n = 1$ и $n = 3$.

II: $\frac{4n - n^2}{3} = 0 \Rightarrow 4n - n^2 = n(4 - n) = 0$. Т.к. $n \in \mathbb{N}$, то $4 - n = 0 \Rightarrow n = 4$. $\Rightarrow$ 1 вариант.

III: $\frac{4n - n^2}{3} < 0$. При этом, очевидно, $\frac{4n - n^2}{3} \in \mathbb{Z}$.

Т.к. $\frac{4n - n^2}{3} + 20 \in \mathbb{N}$, то $\frac{4n - n^2}{3} > -20$ (иначе $-20 + 20 = 0 \notin \mathbb{N}$). Отсюда $-20 < \frac{4n - n^2}{3} < 0$. Заметим, что

$4n - n^2 = -3k$, где $k \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow 2n^2 + 4n + 3k = 0 \Rightarrow a = -1$,

$b = 4$, $c = 3k$. $\Rightarrow D = b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot (-1) \cdot 3k = 16 + 12k$. Т.к. $k \in \mathbb{N}$, то $D > 0$. $\Rightarrow$ Дискриминант положительный и 2 корня:

$n_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 + \sqrt{16 + 12k}}{-2}$ и $n_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{16 + 12k}}{-2}$, а значит, D делится на 4.



Вариант № _____

Р	А	0	0	0	2	0	7	0	2	2	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

мень быть полными квадратами $\Rightarrow$

$$d = 16 + 12k - \text{полный квадрат.}$$

Рассмотрим $k = 15$, т.е. при $k = 20$:

$$4n - n^2 = -3 \cdot 20 \Rightarrow \frac{4n - n^2}{3} = -20 - \text{целочисленное.}$$

Значит, $16 + 12 \cdot 15 \leq d \leq 226 + 16$. Рассмотрим все полные квадраты в этом промежутке;

~~62, 82, 102, 122, 142, 162, 182, 202, 222~~ Т.е. $12k \div 4$ и $16 \div 4$, но эти квадраты еще $\div 4$. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 36, \text{ т.к. } 12k = 20 \Rightarrow k \notin \mathbb{N},$$

$$\Rightarrow 64, \text{ при этом } 12k = 48 \Rightarrow k = 4$$

$$\Rightarrow 100, \text{ при этом } 12k = 84 \Rightarrow k = 7$$

$$\Rightarrow 144, \text{ при этом } 12k = 128 \Rightarrow k \notin \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 196, \text{ при этом } 12k = 180 \Rightarrow k = 15.$$

Рассмотрим корни в каждом случае:

$$k = 4: n_1 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} = \frac{-4 + 8}{-2} = -2, \notin \mathbb{N}$$

$$n_2 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} = \frac{-4 - 8}{-2} = 6, \text{ подходит.}$$

$$k = 7: n_1 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} = \frac{-4 + 10}{-2} = -3, \notin \mathbb{N}$$

$$n_2 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} = \frac{-4 - 10}{-2} = 7, \text{ подходит.}$$

$$k = 15: n_1 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} = \frac{-4 + 14}{-2} = -5, \notin \mathbb{N}$$



Вариант № _____

И А О О О 2 0 7 0 2 1 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

12

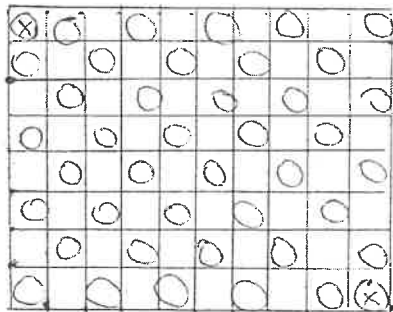
$$x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-2)}}{-2} = 9, \text{ подходит.}$$

Всего 3 варианта. $\Rightarrow$ всего $2 + 1 + 3 = 6$ вариантов ($n=1, n=3, n=4, n=6, n=8$ и $n=9$).

Ответ: 6 чисел n .

208.

13



Предположим, что наименьшее количество монет — 40. Рассмотрим наименьший вариант выкладки монет — через одну, как показано на рисунке. Но тогда

при этом никакие 2 монеты не лежат по соседству, но прямоугольник 3×1 получится не получится. Пусть монет 41. (монет 3×1 в левый вертикаль 1). Тогда прямоугольник 3×1 все равно не составился. Пусть монет 42. Тогда получится 3×1 монету в правый вертикаль 2. Но уж, прямоугольников 3×1 все равно нет.

Если же монет 43, тогда обязательно есть не менее, в любом случае будет составиться 3×1 прямоугольник, т.е. мы ее будем монеты строим между двумя другими монетами.

Предположим, что расстановка с 43-ми мо-

Олимпиада школьников «БЕЛЫЧОНОК»

Вариант № _____

М А О О О 10 7 0 2 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	7

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

монеты не канюжная.
 Пусть при каком-то разномонетном монетах между собой эти монетами будет чужие место. Но тогда монета 10, будь при этом каню-
 жается монета такая рассматривается с монетами. Противоречие. Значит, рассматривается с 3-мя монетами канюжная. $\Rightarrow$ Канюжные монеты — 13.

Ответ: 43 монеты. **ОБ.**

(N1) Нарисуем таблицу, в которой крестиками будем отмечать, когда девочки вместе не играют, а дружат — играют:

	Маша	Нина	Катя	Света	Лена	Хеня	Аня
Маша	(X)	(O)	(O)	(O)	(O)	(X)	(X)
Нина	(O)	(X)	(O)	(X)	(O)	(O)	(X)
Катя	(O)	(O)	(X)	(O)	(X)	(X)	(O)
Света	(O)	(X)	(O)	(X)	(X)	(O)	(O)
Лена	(O)	(O)	(X)	(X)	(X)	(O)	(O)
Хеня	(X)	(O)	(X)	(O)	(O)	(X)	(O)
Аня	(X)	(X)	(O)	(O)	(O)	(O)	(X)

Получаем максимальное количество пар у ~~двух~~ девочек, у которых больше всего крестиков. Это 5 пар. Но тогда общее количество пар будет $\frac{35}{2} \notin \mathbb{N}$.



Вариант № _____

Н А О О О 2 0 2 0 2 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Пусть будет 4 картины. Тогда это число удовлетворяет все условия задачи, и такое число картин тогда $\frac{27}{2} \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow$ Подождем.

Предположим, что каждая девочка имеет в 3-х картинах. Тогда это число удовлетворяет условию $\frac{3 \cdot 4}{2} \in \mathbb{N}$.

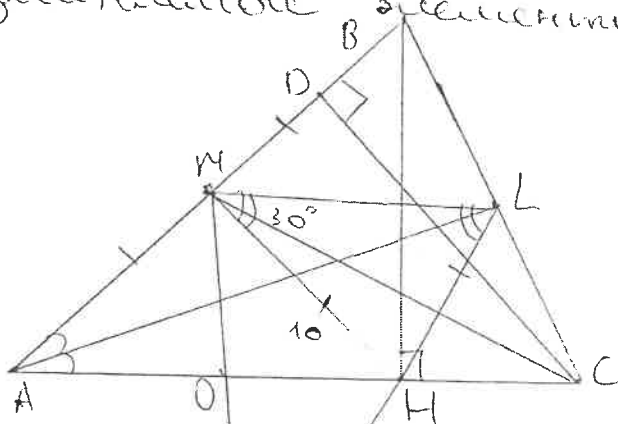
Меньше картин быть не может, так как по условию каждая девочка с Жаной, Катей и Светой, т.е. в 3-х картинах.

Ответ: 4 картины.

205

Пример см. на рис. (кружочки — иррациональные, крестики — не иррациональные в соседних значениях)

№3



А) Так как AM — мед., то $AM = MB$, а значит, OM — мед. в $\triangle ABN$, откуда по св-ву медианы, пров. из

Вариант № _____

М А О О О 2 0 7 0 2 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

Величины $\angle H$ и $\angle L$, $MH = AM = MB = HL = 10$. $\Rightarrow$

$$AB = 2 \cdot AM = 2 \cdot 10 = 20.$$

2) ~~Треугольник~~ $\triangle HML$ — равнобедренный, так как $MH = HL$ и $\angle H = \angle L$.

3) Так как $MH = HL$, то $\angle LHM = \angle LHL$.
Так как $MH = HL$, то $\angle HML = \angle HLM$. $\Rightarrow$

$$2(\angle LHM + \angle LHL) = 180^\circ \text{ (по теореме о сумме углов в } \triangle HML) \Rightarrow$$

$$\angle LHM + \angle LHL = 90^\circ \Rightarrow \angle LHM = 45^\circ, \text{ а}$$

$\triangle HML$ — равнобедренный, $\Rightarrow \triangle HML$ — $\triangle HML$ — $\triangle HML$.

4) Пусть $AM = MN = 10$. Из формулы косинусов

получим, что косинус угла $\angle HML$ равен

$$= \frac{10^2 + 10^2 - 10^2}{2 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}, \text{ откуда в треугольнике } \triangle HML$$

$HL = HM = 10$. По теореме косинусов

$$BL = \sqrt{10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{100 + 100 - 200 \cdot (-\frac{1}{2})} = \sqrt{400} = 20.$$

$$= \sqrt{100 + 100 - 200 \cdot (-\frac{1}{2})} = \sqrt{400} = 20.$$

$$= \sqrt{400 - 300} = \sqrt{100} = 10.$$

$$20^2 - (10\sqrt{3})^2$$

по теореме о косинусах, $\frac{AM}{HL} = \frac{2}{1} = 2$.

$$5) \text{ По теореме о косинусах, } \frac{AM}{HL} = \frac{AM}{HL} = \frac{MH}{HL} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{10}{10} = 2 \Rightarrow DC = 5, \Rightarrow BL + DC = 10 + 5 = 15.$$

Ответ: 15.

25



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 0 8 3 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	0	20	2		62

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2.

Разложим квадратный 3-х член на множители.

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 20 = \frac{16}{9} + \frac{80}{3} = \frac{16}{9} + \frac{240}{9} = \frac{256}{9}$$

$$D > 0 \Rightarrow 2 \text{ корня. } \sqrt{D} = \sqrt{\frac{256}{9}} = \frac{16}{3}$$

$$n_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-\frac{4}{3} + \frac{16}{3}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{12}{3}}{-\frac{2}{3}} = \frac{12}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -6$$

$$n_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-\frac{4}{3} - \frac{16}{3}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{-\frac{20}{3}}{-\frac{2}{3}} = \frac{20}{3} \cdot \frac{3}{2} = 10$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 = -\frac{1}{3}(n+6)(n-10) = -\frac{(n+6)(n-10)}{3}$$

$\Rightarrow$ значение будет натуральным, если $(n+6)(n-10) < 0$ и $(n+6)(n-10) : 3$ при $n \geq 10$ (здесь же) $(n+6)(n-10) \geq 0 \Rightarrow -\frac{(n+6)(n-10)}{3} \leq 0 \Rightarrow$ не натур. значений.

Значения n , при которых $(n+6)(n-10) : 3$, среди чисел от 1 до 9 (ведь n - натур.), это 3, 6, 9, 1, 4, 7. (ведь $(n+6)(n-10) : 3 \Leftrightarrow (n+6) : 3$ или $(n-10) : 3$. Если $n+6 : 3 \Rightarrow n=3, 6, 9$. Если $n-10 : 3$, то $n=1, 4, 7$). Значит, всего кол-во значений n — 6 штук. 208.

№4.

Применим диагональную раскраску в 3 цвета:

1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2

Всего клеток 1-го цвета 27, клеток 2-го цвета 27 и клеток 3-го цвета 26. Если у Влада кол-во монет ≤ 54 , то он может поставить все свои монеты на 1 и 2 цвета (т.е. не будет ни одной монеты на кл. 3-го цвета).

$\Rightarrow$ нет ни одного 1×3 или 3×1 , полностью покрытого монетками (ведь в 1×3 вст. каждый цвет по 1 разу, а монет на 3 цвета нет). Противоречие. Значит монет хотя бы 55.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

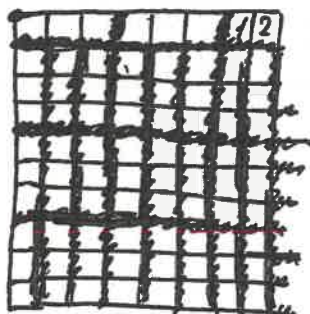
Вариант № 1

М А О О О 2 0 8 3 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Докажем, что при 55 монетах
всегда можно найти $1 \times 3/3 \times 1$.

~~Докажем~~ Разобьём 10×8 на



Всего 26 $1 \times 3/3 \times 1$ и 2 клетки (1 и 2).

Если мы в одной $1 \times 3/3 \times 1$ кет 3 монет, тогда
Всего монет на доске не более

$$26 \cdot 2 + 2 = 54. \text{ Но монет } 55. \text{ Противоречие.}$$

Значит, всегда найдётся

1×3 и 3×1 с 3 монетами. Ответ: 55. 208.

З1.

Представим граф, в котором девочка - вершина, а
партия между 2-мя девочками - ребро. Тогда:

Заметим, что у ^{Маша} хотя бы 3 игры. $\Rightarrow$ из усл.

след, что у всех девочек хотя бы 3 игры.

У Катю кет игры с Жерей, значит у неё не более

^(всего возмож 6 игр) $6 - 1 = 5$ игр. $\Rightarrow$ у всех девочек из усл. не более 5

игр (ведь кол-во игр у каждой девочки одина-
ковое). $\Rightarrow$ может быть по 3, 4, 5 игр у девочек.

Но, у нас кол-во игр то же самое, что степень
вершин ~~девочки~~. Вершин 7, а значит, если

игр по 3 или 5, то сумма степеней $\neq 7 \cdot 3$ или
 $7 \cdot 5$, т.е. 21 или 35. Но в любом графе сумма

степеней чётна. Противоречие. $\Rightarrow$ Каждая девочка
могла сыграть только 4 партии. Пример:

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 0 8 3 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

М	А	О	О	О	2	0	8	3	1	2	6
М	Х	В	В	В	Х	Х	В				
И	В	Х	В	Х	В	В	Х				
К	В	В	Х	В	В	Х	Х				
С	В	Х	В	Х	Х	В	В				
Л	Х	В	В	Х	Х	В	В				
Ж	Х	В	Х	В	В	Х	В				
А	В	Х	Х	В	В	В	Х				

В-~~жесткая~~
между девоч-
ками есть.
Х- и при не было. М, И... - девочки (первые буквы
имен).

208.

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

№5.

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3.$$

$$a^2 - 1 + b^2 - 1 + c^2 - 1 = 0$$

$$(a-1)(a+1) + (b-1)(b+1) + (c-1)(c+1) = 0.$$

$$\frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} = \frac{a+5}{a+5} + \frac{b+5}{b+5} + \frac{c+5}{c+5} - \frac{5}{a+5} - \frac{5}{b+5} - \frac{5}{c+5} = 3 - \frac{5}{a+5} - \frac{5}{b+5} - \frac{5}{c+5} =$$

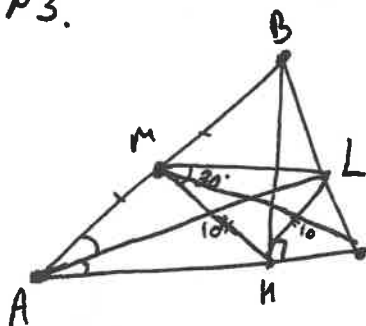
$$= a^2 + b^2 + c^2 - \frac{5}{a+5} - \frac{5}{b+5} - \frac{5}{c+5}.$$

$$\frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{6a}{a+5} + \frac{6b}{b+5} + \frac{6c}{c+5} \leq 3 = a^2 + b^2 + c^2$$

05.

№3.



МН-мед. у пр. $\angle A$ в пр. $\triangle ABH \Rightarrow$ по
св-ву пр. $\triangle \Rightarrow \frac{MH}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = 2MH = 20$ ($2 \cdot 10 = 20$).
 $\triangle MHL \Rightarrow \triangle MHL$ -р/д (по отр., $MH = HL$).
 $\Rightarrow$ по св-ву р/д $\triangle \angle HML = \angle MLH = 30^\circ$.
 $\Rightarrow$ по т. о $\angle \triangle MHL = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$.

05.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М А О О О 2 1 6 0 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача №1

Рассмотрим граф вершины:

девочки, ребра сыгранные партии, тогда условия означают граф простой и граф регулярный $\Rightarrow$

~~граф простой и граф~~ граф регулярный, каждая вершина одна и та же K (каждая сыграла

одинаковое число партий) всего вершин n , значит сумма степеней равна nK и должна быть четной. Поэтому

nK четное, $\Rightarrow K$ четное число. Маша играла с 3

девочками, значит $K \geq 3$, с учетом четности получаем, что $K \geq 4$, то есть $K \in \{4, 6\}$ $K=6$

означает, что каждая играла со всеми остальными,

то есть каждая пара сыграла по партии. По условию

сказано, что Женя не играла с Катей (противоречие).

Из этого следует что $K=4$.

Ответ: каждая девочка смогла сыграть по 4 партии.

158.

ВНИМАНИЕ! Проставляется только то, что написано с этой стороны листа и ранее списано



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

МАООО2160126

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача №2

Рассмотрим $-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20$

1. когда выражение целое
т.к. 60 : 3 и достаточно чтобы $(-\frac{n^2+4n}{3})$ принадлежит Z,

$$\text{то } \Leftrightarrow 3 \mid (n^2 - 4n) = n(n-4)$$

Проверим по модулю 3, если $n \equiv 0 \pmod{3}$, то
~~делится~~ делится

если $n \equiv 1 \pmod{3}$ то, $n-4 \equiv -3 \equiv 0 \pmod{3}$ делится

если $n \equiv 2 \pmod{3}$ то, $n-4 \equiv -2 \equiv 1 \pmod{3}$

Произведение $\equiv 2 \not\equiv 0$ не делится

Значит целое значение получается тогда и только
тогда, когда $n \not\equiv 2 \pmod{3}$

2. когда выражение натуральное

Нужно 9(n) разделить на $3 \geq 1$, так как

при целочисленности $g(n)$ кратно 3 это
равносильно $g(n)$ больше 0 $-n^2+4n+60 > 0$

$$\Leftrightarrow n^2-4n-60 < 0, \text{ то есть корни}$$

$$n = \frac{4 \pm \sqrt{16+240}}{2} = \frac{4 \pm 16}{2} = -6 \text{ и } 10$$

следовательно неравенство выполняется при

$-6 < n < 10$ для натуральных n это:

$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

исключаем те что $n \equiv 2 \pmod{3}$

это:

2, 5, 8.

Остаются:

$n = 1, 3, 4, 6, 7, 9$

Ответ: 6

188.

Вариант № 4

МАООО 2160126

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача №5

Дано

$$a, b, c > 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3$$

$$\text{нужно доказать } \frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} \leq \frac{1}{2}$$

1. Вспомогательное неравенство для 1 числа

Утверждение для любого $x > 0$

$$\text{верно } \frac{x}{x+5} \leq \frac{5x+1}{36}$$

$$\text{Док-во через } (x-1)^2 \geq 0 \text{ так } x+5 > 0$$

можно перемножить крест на крест

$$\frac{x}{x+5} \leq \frac{5x+1}{36} \Leftrightarrow 36x \leq (5x+1)(x+5)$$

~~тогда неравенство~~

$$36x \leq 5x^2 + 26x + 5 \Leftrightarrow 0 \leq 5x^2 - 10x + 5 = 5(x^2 - 2x + 1) = 5(x-1)^2$$

а $5(x-1)^2 \geq 0$ всегда утверждение доказано.2. Применим это к a, b, c подставим

$$x=a, x=b, x=c$$

$$\frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} \leq \frac{5a+1}{36} + \frac{5b+1}{36} + \frac{5c+1}{36} = \frac{5(a+b+c)+3}{36}$$

Значит достаточно доказать, что

$$a+b+c \leq 3$$

3. Докажем

$$a+b+c \leq 3 \text{ из условия } a^2 + b^2 + c^2 = 3$$

используем неотриц. суммы квадратов

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа и ниже строки

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

МАООО2160125

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Превращается только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №5

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 0$$

$$(a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) + (c^2 - 2c + 1) \geq 0$$

$$(a^2 + b^2 + c^2) - 2(a + b + c) + 3 \geq 0$$

но $a^2 + b^2 + c^2 = 3$, поэтому $3 - 2(a + b + c) + 3 \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 6 \geq 2(a + b + c) \Leftrightarrow a + b + c \leq 3$$

$$4. \frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} \leq \frac{5(a+b+c)+3}{36} \leq \frac{5 \cdot 3 + 3}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Доказали.

Когда достигается равенство

$$\frac{x}{x+5} \leq \frac{x+1}{36} \text{ при } x=1 \text{ (т.к. так получается } (x-1)^2 = 0 \text{)}$$

208.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М А 0 0 0 2 1 6 1 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

№	1	2	3	4	5	6	Σ
Пусть x - кол-во сыгранных партий для каждой девочки $\Rightarrow$ всего партий:	45	20	0	2	18		55

$\frac{4-x}{2}$, т.к. девочек 4 и каждую партию считали сразу, поэтому делим на 2.

Чтобы получить целое число x должно быть четным.
 1) знаем что Лана играла (Ланой, Катей и Светой) $\Rightarrow x \geq 3$
 $\Rightarrow x \neq 2$ остается варианты $x = 4, 6, 8, \dots$

3) максимальное число партий: $\frac{4-6}{2} = 2$, т.к. девочки сыграли не больше одной партии $\Rightarrow x \geq 6$. Но в этом случае все сыграли со всеми по одному разу, но мы знаем, что Лана не играла с Катей $\Rightarrow x \neq 6 \Rightarrow$ остается $x = 4$ (т.к. x - четное $x \geq 3$ и $x < 5$)

Ответ: 4

№2

n - натуральное $\Rightarrow n > 0$ и n - целое

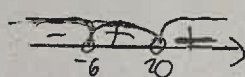
$$\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 = \frac{-n^2 + 4n + 60}{3} \Rightarrow \text{чтобы } -n^2 + 4n + 60 > 0 \text{ и } n^2 + 4n + 60 - \text{делится на 3.}$$

1) $-n^2 + 4n + 60 > 0$ - проверим

$$-n^2 + 4n + 60 = 0 \quad D = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 60 = 16 + 240 = 256 = 16^2$$

$$n_1 = \frac{-4 \pm \sqrt{16^2} - 4 + 16}{-2} = -6 \quad n_2 = \frac{-4 - \sqrt{16^2} - 4 - 16}{-2} = -10$$

$$-n^2 + 4n + 60 = -(n+6)(n-10) \Rightarrow -(n+6)(n-10) > 0$$



$$\text{при } n = -4 \quad -(-4+6)(-4-10) = -(-2) \cdot (-14) = -28 < 0$$

$$\text{при } n = 0 \quad -(0+6)(0-10) = -6 \cdot (-10) = 60 > 0$$

$$\text{при } n = 11 \quad -(11+6)(11-10) = -17 \cdot 1 = -17 < 0$$

$$\text{на } n > 0 \Rightarrow \oplus \rightarrow n \in (-6; 10) \text{ или } -6 < n < 10$$

$$\Rightarrow n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \text{ (т.к. } n > 0 \Rightarrow \text{ок } n < 10 \text{ и } n \text{ - целое)}$$

2) проверим $-n^2 + 4n + 60$ делится на 3.

и при дел на 3 ост 1, а $-n^2 + 4n + 60$ дел на 3

$$\Rightarrow -n^2 + n = n(1-n)$$

ост. 0
продолжение
на след листе

Лист 1 из 5

Лист 4 из 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М А О О О 2 1 6 1 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Прочитается только то, что написано с этой стороны листа и рядом с цифрой

Варианты:

при дел на 3 ост 0 $\Rightarrow n(7-n)$ может
0 $\Rightarrow$ дел

и при дел на 3 ост 1 $\Rightarrow n(7-n)$ может ост 0 $\Rightarrow$ делится

и при дел на 3 ост 2 $\Rightarrow n(7-n) \rightarrow$ не делится
 $2 \cdot 0 - 1 = -1$

$\Rightarrow 0^2 + 4 \cdot 0 + 60$ дел на 3, когда n делит ост 1 или 0 при дел на 3

из наших вариантов (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) подходят $n = 1, 2, 5, 6, 8, 9$

Ответ: 6

208.

и) Куклы

В строке из 10 клеток максимальное кол-во монет без
заполнения троек 4 (пример: 

$\Rightarrow$ в 3 строках максимум 56 монет.

В столбце максимум 6 (пример: 

$\Rightarrow 6 \cdot 10 = 60$ монет

минимальное из этих максимумов 56.

$\Rightarrow$ если 54, то тройки неизбежны.

3) Пример для 56: 1 монета, 0 пусто

110 110 110

101 101 101

011 011 011

110 110 110

101 101 101

011 011 011

110 110 110

101 101 101

011 011 011

110 110 110

101 101 101

011 011 011

110 110 110

101 101 101

011 011 011

110 110 110

101 101 101

011 011 011

110 110 110

101 101 101

011 011 011

110 110 110

101 101 101

011 011 011

Ответ: 54

28.

Лист 2 из 5

$$\Rightarrow AM = MB = \frac{12}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Лист 4 из 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М А О О О 2 1 6 1 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Поворачивается только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$a > 0, b > 0, c > 0; a^2 + b^2 + c^2 = 3$$

$$\text{Доить } \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \leq \frac{7}{2}$$

$$1) 1 - \frac{5}{a+b} = \frac{a+b-5}{a+b} = \frac{a}{a+b} \Rightarrow \text{аналогично } \frac{b}{b+c} = 1 - \frac{5}{b+c}, \frac{c}{c+a} = 1 - \frac{5}{c+a}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} = 1 - \frac{5}{a+b} + 1 - \frac{5}{b+c} + 1 - \frac{5}{c+a} = 3 - 5\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right)$$

$$\Rightarrow \text{надо доказать, что } 3 - 5\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \leq \frac{7}{2}$$

$$-5\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \leq \frac{7}{2} - 3 = -\frac{5}{2} \quad | -5 < 0 \Rightarrow \text{знак не меняется}$$

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{2} \quad \text{— докажем}$$

$$2) a^2 + b^2 + c^2 = 3$$

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) = a^2 + ab + ac + b^2 + ba + bc + c^2 + cb + ca = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 3 + 2(ab + bc + ca)$$

$$\text{Имеем } (a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

$$\text{аналогично } bc \leq \frac{b^2 + c^2}{2}, ac \leq \frac{a^2 + c^2}{2}$$

$$\Rightarrow ab + bc + ca \leq \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 + c^2}{2} = \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{2} = 3$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^2 = 3 + 2(ab + bc + ca) \leq 3 + 2 \cdot 3 = 9$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^2 \leq 9 \quad \text{пусть } a+b+c = x \Rightarrow x^2 \leq 9 \quad (x-3)(x+3) \leq 0$$

$$\Rightarrow -3 \leq x \leq 3 \Rightarrow -3 \leq a+b+c \leq 3 \quad \text{и } a > 0, b > 0, c > 0$$

$$\Rightarrow a+b+c > 0 \Rightarrow 0 < a+b+c \leq 3$$

3) Используем неравенство Коши:

для любых x, y, z справедливо $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$

продолж на след листе

$$\Rightarrow AM = MB = \frac{AB}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

продолж на след листе

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М А О О О 2 1 6 1 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа, в рамке справа



Возьмем пусть $x = a+5, y = b+5, z = c+5$:

$$(a+5+b+5+c+5) \cdot \left(\frac{1}{a+5} + \frac{1}{b+5} + \frac{1}{c+5} \right) \geq 9$$

$a+5+b+5+c+5 = a+b+c+15$, ранее доказали что $a+b+c \leq 3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow a+5+b+5+c+5 = a+b+c+15 \leq 3+15 = 18 \Rightarrow a+b+c+15 \leq 18$

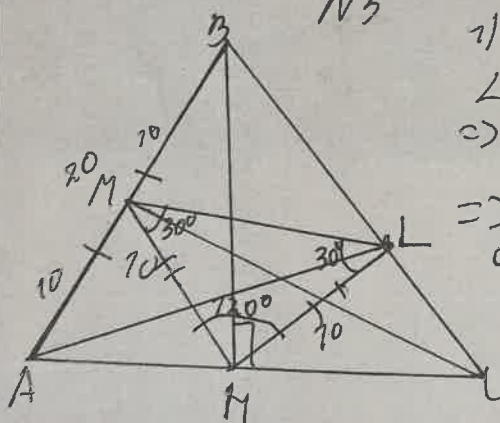
$$\frac{1}{a+5} + \frac{1}{b+5} + \frac{1}{c+5} \geq \frac{9}{a+5+b+5+c+5} = \frac{9}{a+b+c+15}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{a+b+c+15} \geq \frac{9}{18} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{9}{a+5+b+5+c+5} \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a+5} + \frac{1}{b+5} + \frac{1}{c+5} \geq \frac{1}{2} \rightarrow (*) - \text{доказано}$$

ч. н. г.
 $\sqrt{3}$

188.



1) Рассмотрим $\triangle MLN$

$$\angle LMN = 30^\circ, MN = LN = 10$$

$\Rightarrow \triangle MLN$ - равнобедренный (по определению равнобедр. $\triangle$)

$\Rightarrow \angle LMN = \angle MLN = 30^\circ$ (по св-ву равнобедр. $\triangle$)

$$\angle MNL + \angle LMN + \angle MLN = 180^\circ \text{ (по т. о. сум. } \angle \triangle)$$

$$\angle MNL = 120^\circ (\angle LMN + \angle MLN)$$

$$\angle MNL = 120^\circ - (30 + 30)$$

$$\angle MNL = 120^\circ$$

2) Рассмотрим $\triangle ABN$

$\angle BNA = 90^\circ$ т.к. BN - высота $\Rightarrow \triangle ABN$ - прямоугольный (по опред. прямоугол. $\triangle$)

$\Rightarrow MN$ - мед. $\triangle ABN$ (по опред. медианы), т.к. M - медиана $\Rightarrow$

$\Rightarrow M$ - серед. AB (по св-ву мед.)

$$\Rightarrow MN = \frac{AB}{2} \Rightarrow AB = MN \cdot 2 = 20 \text{ (по св-ву прямоугол. } \triangle)$$

$$\Rightarrow AM = MB = \frac{AB}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

продолж на след листе

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

МАООО2161126

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяться только то, что записано с этой стороны листа и ранее справа

$$3) \angle C = \angle A \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{BC} \text{ (по св-ву бис)} \\ \Rightarrow \frac{BC}{20} = \frac{AC}{BC} \text{ и } \angle BAC = \angle ACB \text{ (по св-ву бис)}$$

$$4) S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} h_B \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot h_C \cdot AB, \text{ где } h_B = BM, h_C = \text{высота из } C \\ \Rightarrow h_B \cdot AC = 20 \cdot h_C$$

$$h_C = \frac{AC}{20} \cdot h_B \Rightarrow h_C + h_B = \frac{AC}{20} \cdot h_B + h_B = h_B \cdot \left(\frac{AC}{20} + 1 \right) = h_B \cdot \frac{AC+20}{20}$$

$$5) \text{ Если в } \triangle MLN \text{ провести высоту } NH_1, \text{ то } \triangle MNH_1 \text{ — прямоугольный } \Rightarrow NH_1 = \frac{MN}{2} = \frac{20}{2} = 5, \text{ т. к. } \angle MNH_1 = 30^\circ \text{ (по св-ву прямоугол } \triangle) \\ \Rightarrow MH_1^2 + H_1M^2 = MN^2 \Rightarrow H_1M = \sqrt{MN^2 - NH_1^2} = \sqrt{20^2 - 5^2} = \sqrt{400 - 25} = \sqrt{375} = 25\sqrt{3} \\ \Rightarrow ML = 2 \cdot H_1M = 50\sqrt{3}$$

$$H_1M = HL; \text{ т. к. } NH_1 \text{ — высота, бис, и медиана (по св-ву равносторонн } \triangle) \Rightarrow ML = 2 \cdot H_1M = 50\sqrt{3}$$

Од.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М А О О О 2 1 7 5 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

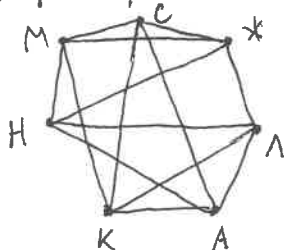
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 1.

Оценка: Представим задачу в виде графа, где девочки — вершины,

а сыгранные партии между двумя девочками — рёбра. Тогда посмотрим какое кол-во рёбер не может выходить из вершин. По лемме о рукопожатиях кол-во нечётных степеней — чётно, поэтому партий не может быть сыграно 3 или 5 (ведь тогда из всех вершин будет выходить нечётное кол-во рёбер и вершин $\Rightarrow$ возникнет противоречие). Тогда партий 4 или 6, но Женья не играла с Катей и у Жени уже меньше 6 рёбер $\Rightarrow$ Каждая девочка сыграла 4 партии (1 и 2 не может быть т.к. у всех одинаковое кол-во рёбер, а у Маши их уже хотя бы 3).

Пример:



Ответ: 4 партии

208.

Задание 2.

Перепишем ~~выражение~~ ^{значение} в более понятный вид: $12 + 2n - \frac{n^2}{4}$ т.к. значение этого выражения натурально, то все числа должны быть целыми. 12 и $2n$ точно целые числа, значит $\frac{n^2}{4}$ тоже целое число $\Rightarrow n^2 : 4 \Rightarrow n : 2$, также заметим, что $12 + 2n > \frac{n^2}{4} \Rightarrow 12 > \frac{n^2}{4} - 2n \Rightarrow 12 > \frac{n^2 - 8n}{4} \Rightarrow$ домножим на 4 $\Rightarrow 48 > n^2 - 8n \Rightarrow 48 > (n - 4)^2 - 16$ (добавили 16, собрали в квадрат, отняли 16 поэтому число не поменялось) $\Rightarrow 48 + 16 > (n - 4)^2 \Rightarrow 64 > (n - 4)^2$, поэтому если $n > 10$ то это условие не выполняется $\Rightarrow n \leq 10$, поэтому n может принимать только 5 значений (10, 8, 6, 4, 2)

Ответ: 5

188.

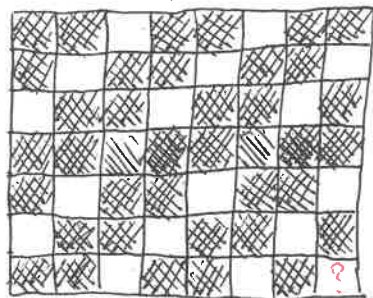
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М А О О О 2 1 7 5 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 4



Воспользуемся диагональной раскраской,

в ней каждый прямоугольник 1×3 имеет ровно 2 закрашенные клетки и ровно 1 незакрашенную. Поэтому если захотим покрасить ещё одну, то получится прямоугольник с 3 закрашенными клетками

Поэтому кол-во монеток у Влада совпадает с кол-вом чёрных клеток в 2ой раскраске и плюс одна. Тогда Ответ: $37+1=38$

Ответ: 38

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

58.

ВНИМАНИЕ! Проверяться только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 1 9 3 9 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	0	20	20		80

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



№1. (1)

Давайте заметим, что т.к. Женя не играла с Катей, то партий каждая девочка могла сыграть не больше 5, а т.к. Маша играла с Ниной, Катей и Соней, то партий хотел бы 3. Переведем задачу на язык графов. Вершины - девочки, ребра будем проводить, если 2 девочки сыграли между собой. Вершин 7. Тогда если каждая девочка сыграла 3 партии, то сумма степеней всех вершин графа равна 21. Но по лемме о рукопожатиях сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному кол-ву ребер, четна. Значит по 3 партии каждая девочка сыграть не могла. Аналогично по этой же причине девочки не могли сыграть по 5 партий. Значит возможно только по 4 партии

Лист 01 из 08

Олимпиада школьников «БЕЛЫЧОНОК»

Вариант № 1

М А 0 0 0 2 1 9 3 9 2 6

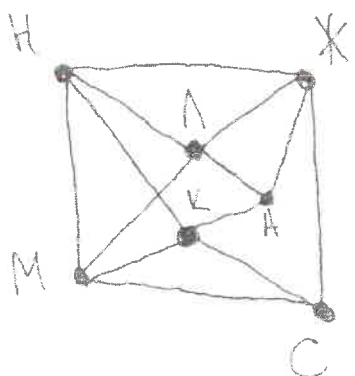
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 1(2)

Приведем пример. Также можно
камен в виде графа.



Как видно это
граф на 6 вер-
шинах, у всех
степень 4.

Буквы обозначают
имена девочек.

Как видим Маша ~~играла~~ ^{играла} с
Ниной, Катей и Светой, Лена -
с Женей и Аней, а Женя не
играла с Катей. Значит все
условие выполняется.

Ответ: 4 партии - 208.

Олимпиада школьников «БЕЛЫЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 1 9 3 9 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Прочитайте внимательно задание и ответьте на вопросы

N2.
 $-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 \in \mathbb{N}$. Для начала заметим, что тогда $-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 > 0$ $\Leftrightarrow$ $-n^2 + 4n + 60 > 0 \Leftrightarrow n^2 - 4n - 60 < 0$.
 Заметим, что $n^2 - 4n - 60 = (n+6)(n-10) < 0 \Rightarrow (n+6)(n-10) < 0$. Применим метод интервалов $(n+6)(n-10) < 0 \Rightarrow n = -6, n = 10$.



Значит нам подхо-

дет $n \in (-6; 10)$, но n -натуральное, мы сузили круг до $n \in [1; 10)$

$20 \in \mathbb{N} \Rightarrow -\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n \in \mathbb{N}$ $-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n = \frac{n(n-4)}{3}$. Чтобы $n(n-4)$ было кату-

ральным, нужно чтобы $n:3$ или $(n-4):3$.

$n-4:3$, если $n \equiv 1$, значит нам под-

ходят все числа $n \in [1; 10)$ которые либо дают остаток 0 по модулю, либо остаток 1. Т.е. нам подходит: 1, 3, 4, 6, 7, 9. - 6 чисел. Отв. 6 чисел. 208.

Олимпиада школьников «БЕЛЫЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 1 9 3 9 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

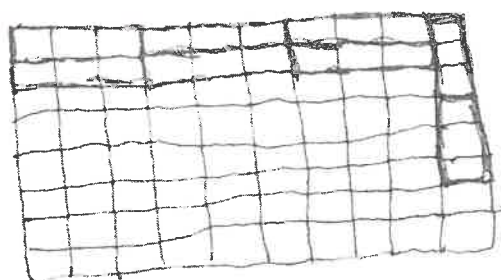
1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ ч.ч.)

Ответ: 55.

Докажем, что 55 подходит



Разобьём
первые 9 клеток
каждой строки
на такие
прямоугольники
 1×3 .

А последний столбец разобьём
на 2 таких прямоугольника
 3×1 и останется ещё 2 клетки.

~~Вывод~~ Предположим
55 не хватит. Тогда в каждом про-
ямоугольнике 1×3 не больше 2-х монет.

Всего прямоугольников - $3 \cdot 8 + 2 = 26$.
Т.е. монет всего не больше 52 и
в оставшихся 2-х клетках макс. 2 мо-
неты. Тогда всего монет не больше
 54 , но у нас их 55. Противоречие.
Значит 55 подходит.

Олимпиада школьников «БЕЛЫЧОНОК»

Вариант № 1

МАООО2193926

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

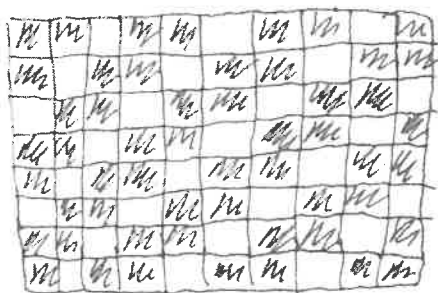
1	2	3	4	5	6	Σ

Эта таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 4(2)

Теперь докажем, что при ≤ 54 монетах есть раскладка когда во всех прямоугольниках 1×3 не больше 2х монет.

Пример для 54х монет.



На примере видно, что во всех прямоугольника 1×3 и 3×1 не больше 2х монет. Их тут ровно 54.

Для примера на меньшее кол-во монет просто убирают монеты с этого примера. Таким образом ≤ 54 монет не хватит.

и.т.д.

205.

Лист 05 из 08

Олимпиада школьников «БЕЛЫЧОНОК»

Вариант № 1

МАООО2193926

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N 5(1)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Доказ-ть: $\frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} \leq \frac{1}{2}$

$a^2 + b^2 + c^2 = 3$

$\frac{a}{a+5} = 1 - \frac{5}{a+5}$, $\frac{b}{b+5} = 1 - \frac{5}{b+5}$, $\frac{c}{c+5} = 1 - \frac{5}{c+5}$

Тогда $\frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} = 3 - \left(\frac{5}{a+5} + \frac{5}{b+5} + \frac{5}{c+5} \right)$

Тогда равносильно тому что надо доказать - доказать, что

$\frac{5}{a+5} + \frac{5}{b+5} + \frac{5}{c+5} \geq \frac{5}{2} \quad | : 5 \quad \frac{1}{a+5} + \frac{1}{b+5} + \frac{1}{c+5} \geq \frac{1}{2}$

Применим Лемму титу. Получим, что $\frac{1}{a+5} + \frac{1}{b+5} + \frac{1}{c+5} \geq \frac{(1+1+1)^2}{a+b+c+15} = \frac{9}{a+b+c+15}$

Докажем, что если $a^2 + b^2 + c^2 = 3$, то

$a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c$. $a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c \quad | \times 2$

$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2a - 2b - 2c \geq 0 \quad \Leftrightarrow$

$a^2 + b^2 + c^2 + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) + (c^2 - 2c + 1) - 3 \geq 0$

$a^2 + b^2 + c^2 = 3 \Rightarrow$ данное утверждение равносильно: $(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 0$ - верно всегда.

Олимпиада школьников «БЕЛЫЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 1 9 3 9 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N5(2)

1	2	3	4	5	6	Σ

Листов таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Значит $a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c$, т.е. $3 \geq a + b + c$.

А тогда $\frac{a}{a+b+c+1} \geq \frac{a}{3+1} = \frac{1}{2}$. т.е.

мы получим, что $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \geq \frac{3}{a+b+c+1} \geq$

$\frac{1}{2}$. Значит $\frac{5}{a+1} + \frac{5}{b+1} + \frac{5}{c+1} \geq \frac{5}{2} \Rightarrow$

$3 - \left(\frac{5}{a+1} + \frac{5}{b+1} + \frac{5}{c+1} \right) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} \leq \frac{1}{2}$ и.т.д.

208.

Олимпиада школьников «БЕЛЫЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 1 9 3 9 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

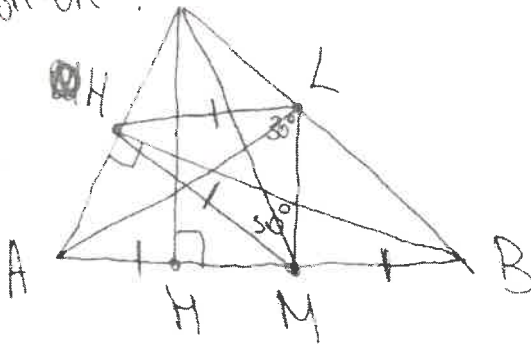
Листов таблица выполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$MK = LH = 10$$

$$\angle LMH = 30^\circ$$

Найти:
 $BH + CH = ?$

№ 4.



Давайте
замечим, что
в $\triangle ANB$
HM — медиана
на гипотенузу $\Rightarrow$

$$HM = AM = MB = LH = 10$$

Т.к. $\angle LMH = 30^\circ$, то и $\angle MLH = 30^\circ$

~~Заметим, что $BK = \frac{1}{2}AB$ и $AK = \frac{1}{2}AB$ — медианы~~

~~на AB , отсюда $AK = BK$ — медиана~~

По т. синусов $\frac{LH}{\sin 30^\circ} = \frac{MK}{\sin 30^\circ} =$

$$= \frac{ML}{\sin 120^\circ} \quad \frac{LH}{\sin 30^\circ} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20 \Rightarrow ML =$$

$$= 10\sqrt{3}$$

08

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А 0 0 0 2 1 9 5 0 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	X	20	0		60

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ЗАДАЧА 1

Ответ: 27, 36

Решение:

Представим задачу в виде графа, где девочки - вершины, переписки - ребра.

Пусть y - количество девочек x переписок. Тогда сумма степеней вершин графа yx . П.к. сумма степеней вершин всегда четна $\Rightarrow yx:2$. П.к. $y/2$

$\Rightarrow x:2$. П.к. Маша переписывается с 5ю девочками $\Rightarrow \min x=5$ но т.к. мы доказали что $x:2$

$\Rightarrow \min x=6$. Заметим, что $\max x=8$ (т.к. очевидно, что $\max$ кол-во переписок у девочки будет, если она переписывается со всеми краями себя)

$\Rightarrow x$ может быть равно 6, 7, 8. П.к. $x:2$ x может быть равно 6, 8.

1) Если $x=6$, то ребер в графе сумма степеней верш. / 2, т.е. $\frac{9 \cdot 6}{2} = 27$. Пример переписок для $x=6$:

~~Маша~~ (обозначим всех девочек как букву их имени кроме Алены и Ани. Аня будет АН; Алена - АЛ)

тогда переписки:

М: К, Л, АН, С, Н, Ж

Н: М, Ж, В, АЛ, С, АН

К: М, В, АЛ, С, АН, Л

Л: К, М, Ж, В, АЛ, АН

АН: Л, К, Н, М, Ж, С

С: АН, К, М, В, АЛ, Н

АЛ: С, Л, К, Н, В, Ж

В: АЛ, С, Л, К, Н, Ж

Ж: В, АЛ, АН, Л, М, М

ВНИМАНИЕ: Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в ранке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А 0 0 0 2 1 9 5 0 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ЗАДАЧА 1
(продолжение)

2) Если $x=8$, то ребер в графе $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$
 Пример для $x=8$: каждый вершина соединяется с каждой другой вершиной
 $\Rightarrow$ перепинок можно быть 36.
 208.

ЗАДАЧА 2

Ответ: 4

Решение:

Пусть:

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = m$$

$$-\frac{n^2}{5} + \frac{6n}{5} + \frac{55}{5} = m$$

$$\frac{-n^2 + 6n + 55}{5} = m$$

$$\frac{n^2 - 6n - 55}{-5} = m$$

п.к. m - натуральное $\Rightarrow n^2 - 6n - 55 \div 5$. п.к. $55 \div 5$
 $\Rightarrow n^2 - 6n \div 55$ и $n^2 - 6n - 55 \leq 0 \Rightarrow n^2 - 6n \leq 55$

Начнем проверять n ки:

1) $n=1$; подходит; $m=12$

2) $n=2$; не подх.; $n^2 - 6n = 4 - 12 = -8 \not\div 5$

3) $n=3$ $\times$ $n^2 - 6n \not\div 5$

4) $n=4$ $\times$ $n^2 - 6n = 16 - 24 \not\div 5$

5) $n=5$ $\checkmark$ $m=12$

Рассмотрим остатки при делении $n^2 - 6n$ на 5, если:

1) $n \equiv 0 \pmod{5}$ $n^2 - 6n \equiv 0 \pmod{5}$ 2) $n \equiv 1 \pmod{5}$ $n^2 - 6n \equiv 0 \pmod{5}$

3) $n \equiv 2 \pmod{5}$ $n^2 - 6n \equiv 2 \pmod{5}$ 4) $n \equiv 3 \pmod{5}$ $n^2 - 6n \equiv 1 \pmod{5}$ 5) $n \equiv 4 \pmod{5}$ $n^2 - 6n \equiv 2 \pmod{5}$

ВНИМАНИЕ! Проверьте только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А 0 0 0 2 1 9 5 0 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа
в рамке справа

ЗАДАЧА 2

(продолжение)

~~Значит~~ $\Rightarrow$ нам подходят только $n \equiv 0$; $n \equiv 1$

Зная это проведем перебор.

6) $n=6$ ~~не подходит~~ $\checkmark m=11$

7) $n=7$ $\times$ $n \equiv 2$

8) $n=8$ $\times$ $n \equiv 3$

9) $n=9$ $\times$ $n \equiv 4$

10) $n=10$ ~~не подходит~~ $\checkmark m=3$

11) $n=11$ $\times$ $n^2 - 6n = 55$.

Следующие значения n тоже не будут подходить, т.к. $n^2 - 6n = n(n-6)$ n будет только увеличиваться и $n-6$ будет только увеличиваться $\Rightarrow n^2 - 6n$ будет только увеличиваться $\Rightarrow n^2 - 6n$ будет $\neq 55$.

$\Rightarrow$ нам подходят $n = 1, 5, 6, 10$. Т.е. 4 значения n

108

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А 0 0 0 2 1 9 5 0 2 6

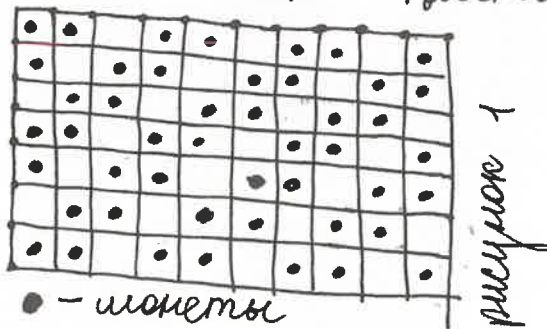
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ЗАДАЧА 4

Ответ: 48 монет.

Решение:

Покажем расстановку 47 монет, такую, что не найдется прямоугольника 1×3 или 3×1 , во всех клетках которого лежат монеты и таким образом докажем, что у Влада min ~~48~~ $47+1=48$ монет. Расстановка (рисунок 1):



Теперь докажем, что 48 монет как не расставь, найдется прямоугольник с тремя монетами. Для этого разобьем таблицу на прямоугольники 1×3 и 3×1 и одну клетку, как показано на рисунке 2.

Отбросим 1 монету, которая может лежать или не лежать в правой нижней клетке. Оставшиеся монеты нам нужно разложить по прямоугольникам.



Для удобства пронумеруем.

Итак в 23 прямоугольника по принципу Дирихле найдется как минимум 1 монета. И.Т.О. всегда найдется прямоугольник 1×3 или 3×1 во всех клетках которого будет лежать по 1 монете. Если раскладывать 48 монет в таблицу 7×10 , $\Rightarrow$ 48 монет минимум может быть у Влада.

208

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 1 9 5 0 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа

ЗАДАЧА 5

a, b, c - взаимно заменяемые. Пусть $a^4 \geq b^4 \geq c^4$
 Заметим, что если выполняется $\frac{1}{a^4+3} + \frac{1}{b^4+3} + \frac{1}{c^4+3} \geq \frac{3}{4}$,
 то и должно будет выполняться $\frac{1}{a^4+3} + \frac{1}{b^4+3} + \frac{1}{c^4+3} \geq \frac{3}{4}$
 (заметим, все заменят на более большой,
 тем самым уменьшив дробь, вопреки
 условию, орудием)
 $a^4 \leq 1$
 Пусть неравенство и условия не выпол-
 нятся тогда

$\Rightarrow a^3 \geq 1 \Rightarrow a^4 \geq 1$ (т.к. если $a^3 < 1$, то $b^3 < 1$
 и $c^3 < 1$, тогда $a^3 + b^3 + c^3 < 3$, что противоречит
 условию). $\Rightarrow b^3 + c^3 \geq 2$
 Пусть неравенство и условия неверно тогда
 верно неравенство.

$$\frac{1}{a^4+3} + \frac{1}{b^4+3} + \frac{1}{c^4+3} \geq \frac{3}{4}$$

Можно допустить, что $\frac{1}{a^4+3} + \frac{1}{b^4+3} + \frac{1}{c^4+3} < \frac{3}{4}$
 без на "орудие" и заменим на более большое
 $\frac{1}{a^4+3} + \frac{1}{b^4+3} + \frac{1}{c^4+3} < \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \quad \frac{3}{4} \leq \frac{3}{2b^3+2c^3}$

Нужно доказать:

$$\frac{1}{a^4+3} + \frac{1}{b^4+3} + \frac{1}{c^4+3} \geq \frac{3}{2(b^3+c^3)}$$

$$\frac{1}{a^4+3} + \frac{2(c^4+3)(b^3+c^3)+2(b^3+c^3)(b^4+3)-(b^4+3)(c^4+3)}{2(b^4+3)(c^4+3)(b^3+c^3)} \geq 0$$

$$\frac{1}{a^4+3} + \frac{2c^4+6+2b^3+2c^3+c^4b^3+c^7+2b^3+2c^3+2b^3+2c^3+2b^4+6+b^7+3b^3+b^4c^3+3c^3}{2(b^4+3)(c^4+3)(b^3+c^3)} \geq 0$$

$$\frac{1}{a^4+3} + \frac{-c^4+3-b^4+10c^3+c^4b^3+c^7+10b^3+b^7+b^4c^3-b^4c^4}{2(b^4+3)(c^4+3)(b^3+c^3)} \geq 0$$

$$3+10c^3+c^4b^3+c^7+10b^3+b^7+b^4c^3-c^4-b^4-b^4c^4 \geq 0$$

это очевидно верно

не очевидно.

ОД.

Вариант № 1

М	А	О	О	О	2	2	0	0	7	2	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	10	0	10	0		40

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

21.

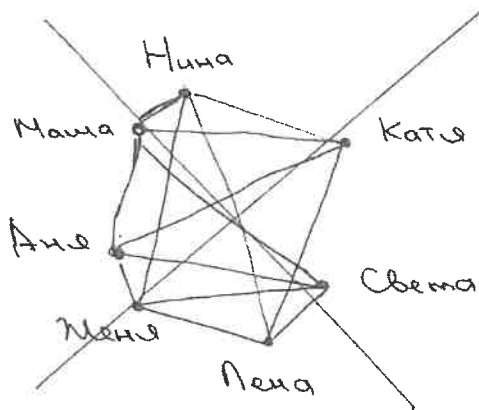
Минимальное кол-во страниц партий $\leq$ ^{командой} деловой равно 3 (т.к. все деловые ~~страницы~~ ^{страницы} ~~приводятся~~ ^{приводятся} к числу партий), а Мама страница $\leq$ ~~партий~~ ^{командой} ~~приводятся~~ ^{приводятся} к числу партий (Мама, Катя и Света). Максимальное кол-во равно 5 (т.к. Мама не играет с Катей, она играет ≤ 5 партий)

Все кон-во страниц партий равно ~~7k~~ $\frac{7 \cdot k}{2}$, где k - кон-во страниц партий каждой девочки. Мы делим $7k$ на 2, так как каждая партия - состоит из 2-х девочек (Маша и Паша, Маша и Катя, Маша с Катей).

$\Rightarrow m, k \neq \frac{1}{2}$, k должно быть кратно 2.

$$\Rightarrow K=4.$$

Проверим, ~~имеет ли~~ ~~то~~ что существует пример, где $k=4$:



150

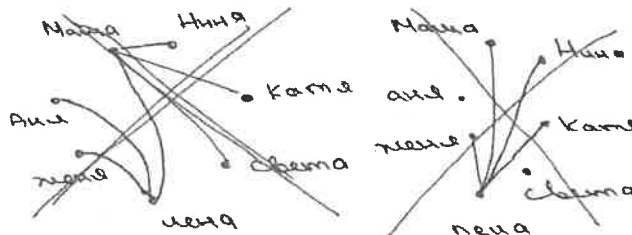
~~Townes (Kandy, Charn)~~

Тома с ~~имената~~^{си} - девојка с ~~имената~~^{имената}

Петро - еден и тука го добивам
компани бележките.

Чесноко известно, что данный пример удовлетворяет условию.

Определ.: 4 партии



Вариант № 1

М А О О О 2 2 0 0 7 2 6

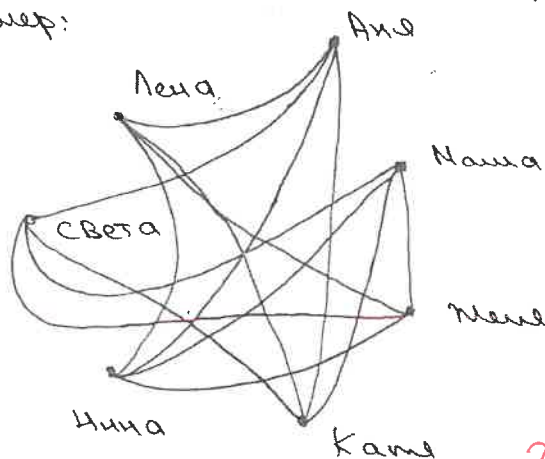
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1 (продолжи)

Пример:



208.

№4

Заметим, что 54 монет это минимальное кол-во монет при котором не найдется прямоугольник 1×3 или 3×1 , во всех клетках которого лежат монетки.

Докажем это:

Оценка: Максимальное кол-во монет может лежать попарно равно 2.

⇒ Если мы поделим этот прямоугольник на прямоугольники 1×3 (которые не накладываются друг на друга) то получим, что в каждом прямоугольнике 1×3 может лежать не более 2 монет.

почему может поделить? сколько их получится?

⇒ Макс. кол-во $\frac{8 \cdot 10}{3} \cdot 2 = \frac{160}{3} = 53 \frac{1}{3}$ — неверно. очень сильно зависит от того, как разобьём, а разобьём монет как угодно.

⇒ 54

Будет важно, чтобы эти монеты не нарушали условия

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

Н А О О О 2 1 0 0 2 2 6

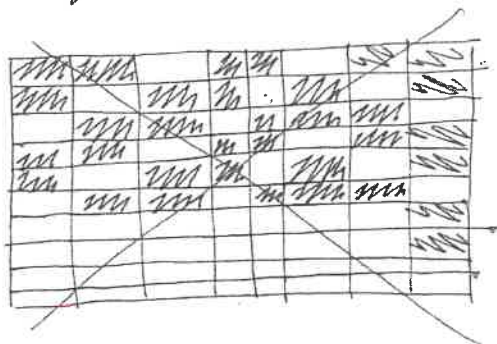
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4 (продолжение)

Пример:



m		m	m		m	m		m	m
m	m		m	m		m	m		m
	m	m		m	m	m	m		
m		m	m		m	m		m	m
m	m		m	m		m	m		m
	m	m		m	m	m	m		
m		m	m		m	m		m	m
m	m		m	m		m	m		m

Закрась клетки -
клетки с монетой

⇒ Минимальное кол-во монет у Влада равно 55.

Т.к. это на одну больше макс. кол-ва монет, при котором условие задачи не выполняется.

Ответ: 55

105

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

Н А О О О 2 2 0 0 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	7

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 2

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20$$

Так $-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20$ - нат. число, $-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 > 0$

Таким $-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n$ - целое, так как тогда $-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20$

не будет целым. (20 - целое число, целое число - целое число = целое число)

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}(n^2 + 4n) - \text{целое}$$

$$\Rightarrow -n^2 + 4n \text{ должно быть кратно } 3$$

$$\Rightarrow -n^2 + 4n \equiv 0$$

$$\Rightarrow n(n+4) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \text{либо } n \equiv 0 \text{ либо } n \equiv 4 \pmod{3} \Rightarrow n \equiv 1$$

Вспомогательное, когда $n \equiv 0$:

$$\Rightarrow n = 3k, \text{ где } k - \text{натуральное число}$$

$$\Rightarrow -k^2 + 4k + 20 > 0$$

$$-\frac{1}{3}n^2 = -\frac{1}{3}(3k)^2 = -\frac{1}{3} \cdot 9k^2 = -3k^2$$

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 = -k^2 + 4k + 20$$

$$\text{Так } -k^2 + 4k + 20 > 0$$

$$k^2 < 4k + 20$$

$$\Rightarrow (k-2)^2 - 24 < 0$$

Так $k > 0$, $(k-2)^2 - 24 < 0$ и оба целыми, нам подходит k такие

k , что:

$$k=3, \text{ так } 1^2 - 24 < 0$$

$$k=4, \text{ так } 4 - 24 < 0$$

$$k=2, \text{ так } -24 < 0$$

$$k=5, \text{ так } 9 - 24 < 0$$

$$k=3, \text{ так } -23 < 0$$

$$k=6, \text{ так } 16 - 24 < 0$$

Олимпиада школьников «БЕЛЫЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 2 0 0 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 2 (продолжение)

$k > 6$ не подходит, так при $k > 6$

$$(k-2)^2 - 24 > 0$$

1. $k=7$:

$$5^2 - 24 > 0,$$

$$\Rightarrow n=3$$

$$n=6$$

$$n=9$$

$$n=12$$

$$n=15$$

$$n=21$$

Во втором случае:

$$n=3k+1, \text{ где } k - \text{натуральное число} \Rightarrow -\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 =$$

$$-\frac{1}{3}(3k+1)^2 + \frac{4}{3}(3k+1) + 20 = -3k^2 - 2k + 21 + 4k =$$

$$= -3k^2 + 2k + 21$$

$$-3k^2 + 2k + 21 > 0$$

$$\Rightarrow 3k^2 - 2k - 21 < 0$$

$$\Rightarrow \left(k - \frac{1}{3}\right)^2 - 7\frac{1}{9} < 0$$

$$\Rightarrow k - \frac{1}{3} > 0, \text{ при } k \geq 1$$

$$\Rightarrow k - \frac{1}{3} < \sqrt{\frac{64}{9}}$$

$$\Rightarrow k - \frac{1}{3} < \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow k < 3$$

$$\Rightarrow \text{нам подходят } k=1, k=2$$

$$\Rightarrow n=4$$

$$n=7$$

~~Всего~~

при $k=0$, неравенство тоже выполняется (так $\frac{2}{9} - 7\frac{1}{9} < 0$)
 $\Rightarrow n=1$ тоже подходит $\Rightarrow$ всего таких n - 3 шт. Ответ: 9



Олимпиада школьников «БЕЛЫЧОНОК»

Вариант № 1

И 1 0 0 0 2 2 0 0 7 2 6

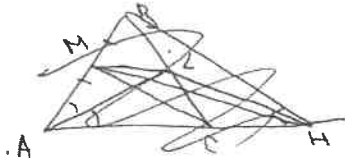
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

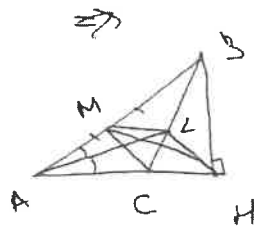
N 3

Заметим, что $\triangle ABC$ ^{может быть} остроугольным и тупоугольным, (тупой угол C или A)

Если $\triangle ABC$ - тупоуг., с ~~тупым~~ тупым углом C :



Тогда ~~BM~~ ~~и~~ ~~AL~~ ~~пересекаются~~ т.н. линия пересечения ~~BM~~ ~~и~~ ~~AL~~ ~~за м.с.~~



$$\text{Так } \angle MN = \angle LN = 10^\circ$$

$$\triangle MLN - \text{н.б.}$$

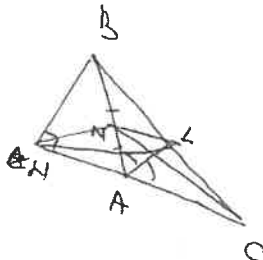
$$\angle MLN = \angle LNM = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \angle MNL = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ANB = \angle ANM + \angle MNL + \angle LNB$$

$$\Rightarrow 90^\circ = 120^\circ + \angle ANM + \angle LNB$$

$\Rightarrow \triangle ABC$ с тупым $\angle A$:



$\Rightarrow$ точка N лежит на продолжении AC за м.А. Так $MN = LN = 10$

$$\text{тогда } \triangle MLN - \text{н.б.}$$

$$\Rightarrow \angle MNL = \angle LNM = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \angle MNL = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \text{но } \angle ANB = \angle MNL + \angle BNM + \angle LNA$$

$$\Rightarrow 90^\circ = 120^\circ + \angle ANM + \angle LNB$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABC$ - остроугольный, а что если тупой угол B ?

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

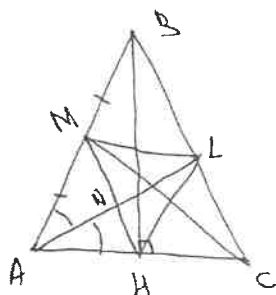
М А О О О 2 2 0 0 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 3 (продолжение)



~~В~~ м.к. AL - бис

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}$$

м.к. AL - бис

$$\frac{AM}{AH} = \frac{MN}{NH}$$

$$\frac{BM}{AH} = \frac{MN}{NH}$$

ВНИМАНИЕ! Проверяться только то, что записано с этой стороны листа
и рамки справа



Вариант № 1

Н А О О О 2 2 0 0 4 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	7

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

$$\frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} \leq \frac{1}{2}$$

При $a=1, b=1, c=3$

$$\frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

В.

! ~~При~~ $a \neq 1, b \neq 1, c \neq 3$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} < \frac{1}{2}$$

2².

$$\text{так } 2ab \leq a^2 + b^2$$

$$\frac{2ab + 5a + 5b + 25}{(a+5)(b+5)} + \frac{c}{c+5} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{a^2 + b^2 + 3a + 5b + 25}{(a+5)(b+5)} + \frac{c}{c+5} < \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2 + 3a + 5b + 25)(c+5) + c(a+5)(b+5) < \frac{1}{2}(a+5)(b+5)(c+5) \\ & 7a^2 + 2b^2 + 35a + 35b + 25c < \frac{1}{2}(a+5)(b+5)(c+5) \\ & 14a^2 + 14b^2 + 70a + 70b + 50c < abc + 5ab + 5ac + 25b + 25c + 25 \\ & 14a^2 + 14b^2 + 45a + 45b - 25c + 25 < abc + 5ab + 5ac + 5bc \end{aligned}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 2 0 6 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

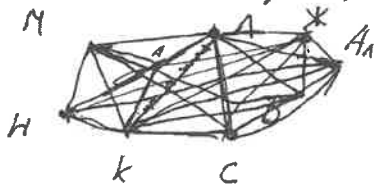
Задача №1.

Заметим, что Мама переписывалась хотя бы с 5 людьми.

По теме о хороводах: степень каждой вершины четна, т.к. вершин - нечетно.

Рассмотрим граф, где вершины - девочки, а ребро проводится, если они переписывались. Рассмотрим 2 варианта, когда все переписывались 6 или 8 раз.

1) 6 раз, пример: кол-во ребер:



$$\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$$

2) 8 раз (полный граф на 9 верш.): кол-во ребер: $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$

Ответ: 27 и 36.

208.

Задача №2.

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = x, \text{ где } x \in \mathbb{N} \text{ (х5)}$$

$$-n^2 + 6n + 55 = 5x \rightarrow 6n - n^2 : 5 \rightarrow n(6-n) : 5 \rightarrow$$

$$\rightarrow n \equiv_5 0 \text{ или } n \equiv_5 1$$

Если $n \geq 11$, то

$$\frac{55 + 6n - n^2}{5} \neq 0, \text{ т.к. } \frac{55 + 6 \cdot 11 - 11^2}{5} = 0. \text{ и}$$

$$\frac{55 + 6 \cdot 10 - 10^2}{5} < 0, \text{ значит } x \leq 0, \text{ но } x \in \mathbb{N}.$$

Значит $n < 11$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 2 0 6 8 2 6

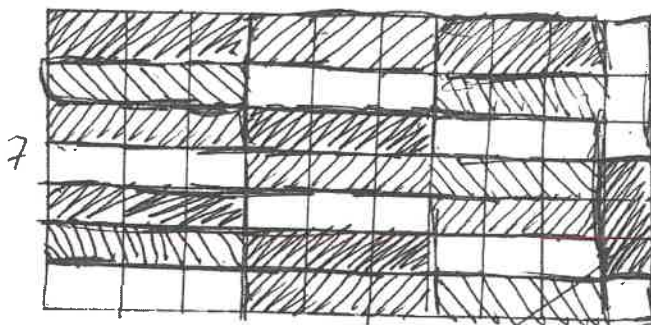
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Ответ: 1, 5, 6, 10.

165.

Задача №4.

10



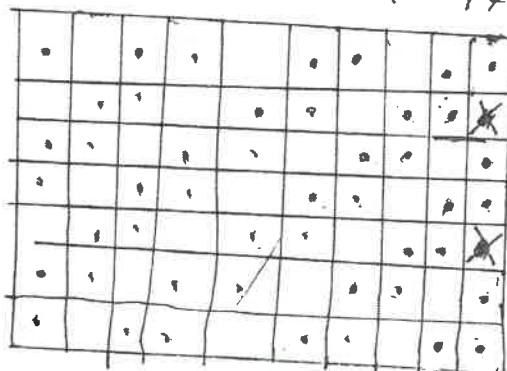
монетки, то возникает противоречие с условием. Значит, нужно хотя бы 23 монетки, ~~иначе~~

Разобьем доску 7x10 на прямоугольники 1x3 (23).

Посмотрим на макс. кол-во монет, при котором условие не выполняется: их ~~46~~ $46+1=47$ (в каждом 1x3-ике 2 монетки).

Ответ: 48.

125.



• - монетка.

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 2 3 3 5 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	18	0	12	x		50

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 1

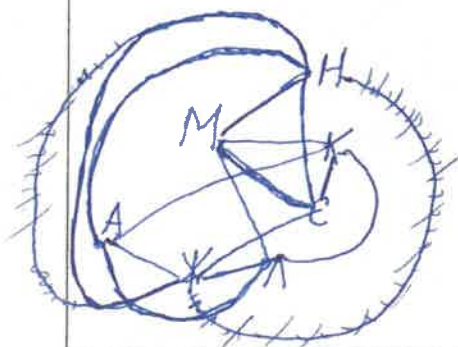
Представим все игры в виде графа, где вершины — девочки, рёбра — партии. Мысленно уберём все партии, которые были даны в условии. Пусть партий у каждой девочки — n . Тогда, назвав вершины первыми буквами имён девочек, из «М» должно выходить $n-3$ рёбра, из «А» — $n-2$, из остальных — $n-1$. Пусть рассмотрим 2 случая:

1) $n:2 \Rightarrow n-3$ и $n-1:2$, $n-2:2 \Rightarrow$ всего рёбер нечётно т.к. каждая игра считается дважды, удвоенное кол-во игр — чётное число, что не может быть, т.к. $n \in \mathbb{N}$!!!

2) $n:2 \Rightarrow n-3$ и $n-1:2$, $n-2:2 \Rightarrow$ т.к. сумма 6-ти нечётных и 1 чётного — чётное число, значит, удвоенное число партий чётно, что может быть, т.к. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n:2$. Заметим, что $3 \leq n \leq 7 \Rightarrow n = \{4, 6\}$

При $n=6$ каждая девочка играла с другой, что неверно, т.к. Меля не играла с Катей $\Rightarrow n=4$.

Пример на 4:



Ответ: 4.

208.



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А 0 0 0 2 2 3 3 5 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 2

П.к. $-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 \in \mathbb{N}$, то $-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 \geq 1$,
 $\frac{4}{3}n - \frac{1}{3}n^2 \geq -19$ и $\in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{3}n(4-n) \geq -19$$

В выражении $\frac{1}{3}n(4-n)$ происходит деление на 3 $\Rightarrow$ либо $n:3$,
 либо $4-n:3$, т.е. $n \equiv 4 \pmod{3} \Rightarrow n \equiv 1 \pmod{3}$ либо $n \equiv 0 \pmod{3}$.

П.к. $n \in \mathbb{N}$, будем перебирать все натуральные значения n ,
 где n либо $:3$, либо даёт остаток 1 от деления на 3

Заметим, что при $n=9$ $\frac{1 \cdot 9}{3}(4-9) = 3(-5) = -15$,
 а при $n=10$ $\frac{1 \cdot 10}{3}(4-10) = \frac{10(-6)}{3} = -20 < -19 \Rightarrow$

$n = 1 \leq n \leq 9$:

$$n=1 \quad \frac{1}{3}(4-1) = \frac{3}{3} = 1 \quad \text{OK} \rightarrow 19$$

$$n=3 \quad \frac{3}{3}(4-3) = 1 \quad \text{OK} \rightarrow 19$$

$$n=4 \quad \frac{4}{3} \cdot (4-4) = \frac{4}{3} \cdot 0 = 0 \quad \text{OK} \rightarrow 19$$

$$n=6 \quad \frac{6}{3}(4-6) = \frac{6 \cdot (-2)}{3} = -4$$

$$n=7 \quad \frac{7}{3}(4-7) = \frac{7 \cdot (-3)}{3} = -7$$

$$n=9 \quad \frac{9}{3}(4-9) = \frac{9}{3} \cdot (-5) = -15$$

Каждое из значений $\geq -19 \Rightarrow$ все они подходят, их - 6.

Ответ: 6.

188.



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 2 3 3 5 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 3

$\triangle MHN$ — прямоугольный ($\angle H = 90^\circ$),
 MN — медиана $\Rightarrow MN = \frac{1}{2} AB$,

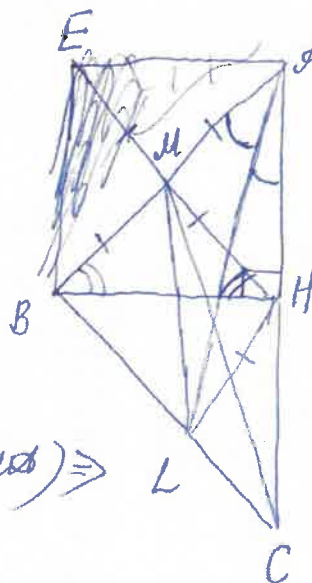
$$AB = 20.$$

Удвоим MN , продолжив ее
 за точку M ($HM = ME$).

Получился ~~пр. $\triangle EBN$~~ ($\angle E = 90^\circ$).

квадрат $EBHN$ ($EM = MN = NB = ME$) $\Rightarrow L$

$$\angle MBN = \angle MNB = 45^\circ, BM = MN$$



08.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа
 в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 2 3 3 5 2 6

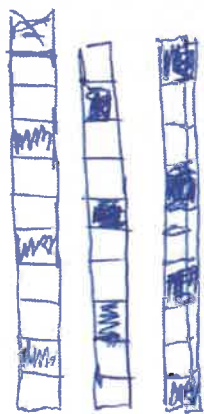
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 4

Найдем наименьшее кол-во пустых клеток, при котором возможно, что не найдется гр-ка 1×3 , во всех клетках которого лежат фишки.

Заметим, что пустые клетки располагаются на расстоянии ≤ 2 клеток друг от друга в одном направлении (по вертикали либо по горизонтали).

Рассмотрим столбцы 1×10 . Всего таких столбцов 8, причем они бывают 3-х видов покрытия, которые все время чередуются, т.е. пустые клетки должны располагаться на расстоянии ≤ 2 клеток по горизонтали.



На рисунке слева изображены 3 вида покрытия: черные клетки — пустые, белые — с фишкой.

В 2-х видах пустых клеток по 3, в 1-м — 4. Каждый вид > 2 раза. Тогда наименьшее число пустых клеток почему мы должны их использовать?

$3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 26$. Пример такого расположения на рисунке выше. Заметим, что если поставить фишку на любое пустое поле, то образуется гр-ка 1×3 со всеми заполненными фишками клетками.

Значит, пустых полей у Влада ≤ 25 , фишек — $> 8 \cdot 10 - 25 = 55$, наиб. кол-во фишек — 55.

Ответ: 55.

128



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 12

M	A	0	0	0	2	2	8	5	1	2	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

21

Будем рассматривать

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	x	20	1		60

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Это как граф соответствует девочки верши,
переноски - ребра.

Из каждой верш. степени всех вершин одинакова
и одна из них хотя бы 5 $\Rightarrow$ все хотя бы 5
 $\Rightarrow$ наши вар. 5; 6; 7; 8

Но по лемме о рукопожатиях у нас не
может быть неч. кол-во верш. с неч. степенями.
 $\Rightarrow$ варианты 5 и 7 не подходят $\Rightarrow$

Вывести все стр. либо 6 либо 8

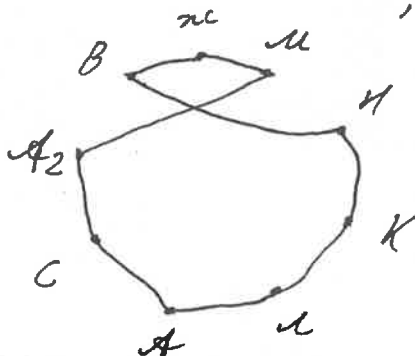
⇒ всего переносов $\frac{6-9}{2} = 24$ или $\frac{8-9}{2} = 36$

Ответ: 74.

Отвѣт: 27 или 36

Пример:

Для 6 - это полный граф на 9 верш.
а для 6 - покажем антиграф (т.к. его удоб-
нее рисовать) K_2 - Алекса, - А - Аня
не



205

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 2 8 5 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$n^2 - \frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 \in \mathbb{N}$$

найдем все nat. n где это > 0

$$1) -\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 > 0$$

$$-n^2 + 6n + 55 > 0$$

$$-n^2 + 6n - 9 + 9 + 55 > 0$$

$$-(n^2 - 6n + 9) + 64 > 0$$

$$-(n-3)^2 + 64 > 0$$

$$64 > (n-3)^2$$

$$8 > |n-3|$$

$$8 > n-3 > -8$$

$$11 > n > -5$$

но есть ли раскраски-
ваши n до 11.

2) теперь будем проверять
при каких n это целое

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 - \text{цел.}$$

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n - \text{цел.}$$

$$\frac{-n^2 + 6n}{5} - \text{цел.}$$

$$\frac{n(6-n)}{5} - \text{цел.}$$

⇓

при натурал. n таких,
что

$$n(6-n) \div 5$$

⇓

$$\begin{cases} n \div 5 \Rightarrow 5 \text{ и } 10 \\ 6-n \div 5 \Rightarrow 1 \text{ и } 6 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$n \in \{1; 5; 6; 10\}$$

Ответ: 4

208.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа
в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	2	2	8	5	1	2	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

24

Для того, чтобы найти ответ оценим МАКС ка-
во, которое можно распечатать так чтобы таких
кряи-ов не было. Для этого разобьем все на об-
ласти 1 на 3. У нас
получатся 23 кря-ка
и еще 1 клеточка в коне-
цной кря-к не больше 2-х
матр ~~и~~ и еще одну-в
к-летачку $\Rightarrow$ всего не больше 47 матр.

Пример. на таи ас...

[illegible]

Пример. на таи все рисунке x - монетки
 $\Rightarrow$ доказали $\Rightarrow$ при любом кол-ве ≤ 44
 $\frac{1}{2}$ условие не работает $\Rightarrow$ мин из
 условие работает это 48 монет

Отвѣтъ: 48 черен

208.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М А О О О 2 3 3 7 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

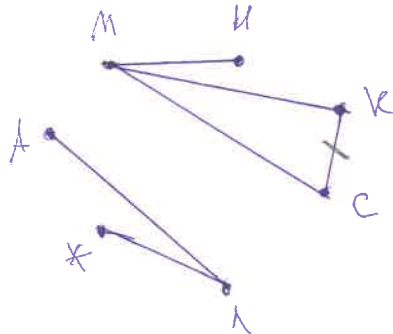
1	2	3	4	5	6	Σ
20	16	0	5	0		41

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

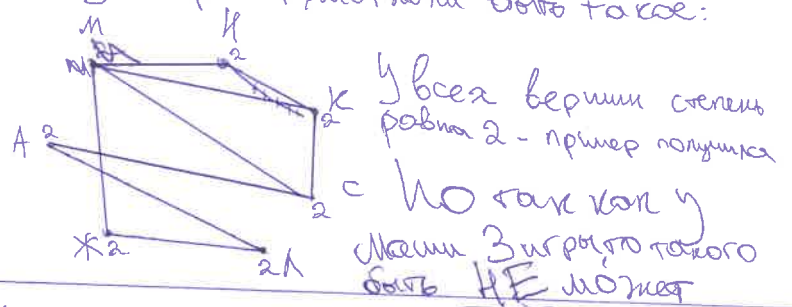
№1

Представим условия задачи в виде графа:



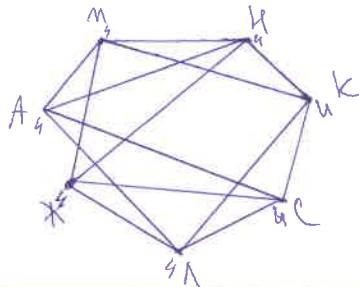
Так как всего девочек 4 - нечет по "лемме о Рукопожатиях" степень вершин не должна быть нечетной $\Rightarrow$ при нечет кол-во вершин

Так как Лена ~~поиграла~~ сыграла 2 игры, то наименьшая возможная степень вершины равна 2. Приведем пример, который мог бы быть таким:



У всех вершин степень равна 2 - пример получается. Но так как у Лены 3 игры, то такого быть НЕ может.

Степень 3 быть не может ($3 \cdot 7 = 21/2$), значит рассмотрим степень вершин:



У всех вершин степень равна 4 - пример получается.

Степень 5 быть не может ($5 \cdot 7 = 35/2$), но и степень 6 быть не может, так как если у всех вершин будет степень равна 6, то этот граф будет полным, а так как Жена не играла с Катей, значит граф полным быть не может.

Ответ: ~~4~~ 4.

206

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М А О О О 2 3 3 7 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяться только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Рассмотрим пример:

$$-\frac{1}{4}n^2 + 2n + 12$$

Так как чтобы число стало натуральным, нужно чтобы это число было кратно числу 4, иначе его $\Rightarrow n^2$ делить на 4, тогда $-\frac{1}{4}n^2 + 2n + 12$ будет не натуральным.

Значит нужно рассмотреть только чет. числа.

Теперь приравняем этот пример к нулю, чтобы показать, какое n будет или больше или меньше нужно найти в задаче:

$$-\frac{1}{4}n^2 + 2n + 12 = 0, \text{ Решим через дискриминант:}$$

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot (-\frac{1}{4}) \cdot 12 = 16 = 4^2$$

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm 4}{-\frac{1}{2}}$$

$$n_1 = -4$$

$$n_2 = 12$$

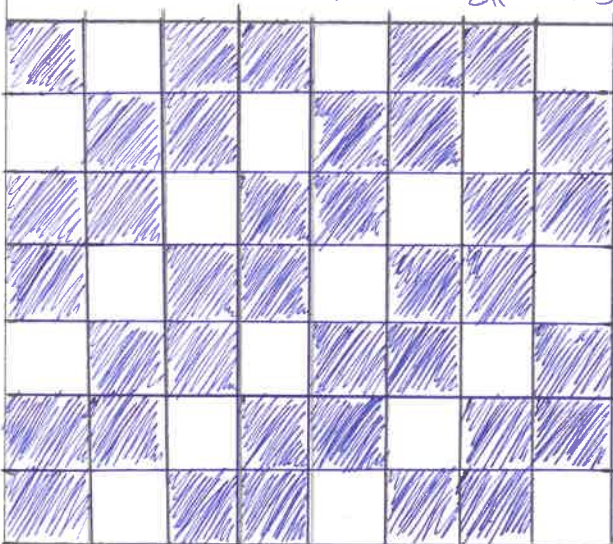
n может равняться всем чет. от -4 до 12 (НЕ включительно), но -2 и 0 не могут, они не натуральные

Значит n может принимать значения: ~~1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12~~ 2, 4, 6, 8, 10, 12

Ответ: 5 натуральных чисел **165**

1/4

Перефразирую задачу: не найдется ни одного прямоугольника 1×3 , где во всех его клетках лежат монетки, но 1 монетку Вадя не положил. (1 монетка, так как найдется в условии задачи 1 прямоугольник $1 \times 3, 3 \times 1$). Теперь можно принять раскраску "2 через 1", покажу на примере:



Закрашенные - монетки.

В такой раскраске нет ни одного прямоугольника 1×3 или 3×1 в котором все закрашены.

Значит ответ кол-во закрашенных клеток $n = 37 + 1 = 38$

Ответ: 38 монет

58.

$$5 + 4 + 5 + 3 + 4 + 6 + 5 + 4 = 25 + 12 = 37$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

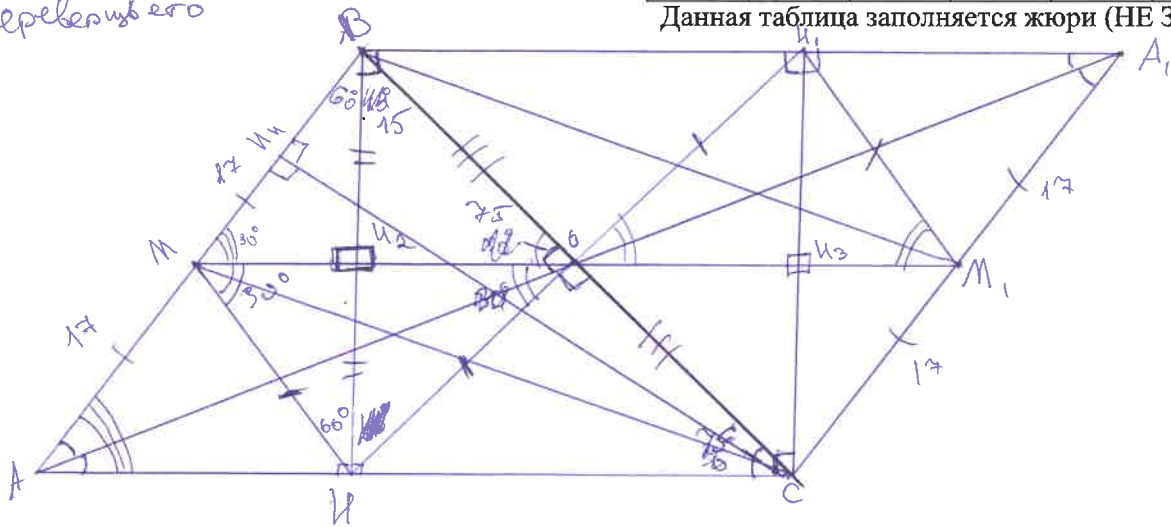
М А О О О 2 3 3 7 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

НЗ
Нарисуй такой же треугольник перевернув его



Заметим что MI и M_1I_1 - медианы из угла $90^\circ \Rightarrow$ равно $\frac{1}{2}$ гипотенузы.
 Так как мы построили до параллельно грани (так как $BA=AC, AB=CA, \Rightarrow \triangle BAC$ равнобедренный)
 Значит MM_1 - средняя линия $\Rightarrow AC \parallel MM_1 \parallel BA_1 \Rightarrow BI_2$ и I_1I_3 - тоже высоты.
 Рассмотрим $\triangle ABI_2$ и $\triangle MB_1I_2$ - подобны по 2 углам ($\angle AIB_1 = \angle M_1I_2B = 90^\circ$
 $\angle BAI_2 = \angle B_1MI_2$ - соответств.)
 Значит $BI_2 = I_2I_1 \Rightarrow \triangle BI_2O$ подобен $\triangle B_1CI_2$ по 2 углам ($\angle BI_2O = \angle B_1CI_2 = 90^\circ$
 $\angle BOI_2 = \angle B_1CI_2$ - соответств.)
 Значит $BO = OC \Rightarrow AO$ биссектриса и медиана $= AB = AC$

Так как $\angle KMO = \angle KOM = 30^\circ \Rightarrow \angle MI_2I_1 = \angle I_2I_1O = 90^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 60^\circ \Rightarrow$
~~Катет лежащий против угла 30° равен половине гипотенузы $\Rightarrow$~~

$$I_2I_1 = \frac{17}{2} \Rightarrow BI_2 = \frac{17}{2} + \frac{17}{2} = 17. \text{ Найдём } \perp \text{ высоту}$$

Так как $BO = OC$ и $2IO = AB \Rightarrow OI$ - средняя линия $\triangle ABC \Rightarrow$
 $IO \parallel AB \Rightarrow \angle I_2IO = \angle I_2BA$ (накрест лежащие) $\Rightarrow$

$$\text{Так как } S_{\triangle} = h \cdot a = BI_2 \cdot AC = EI_2 \cdot AB$$

$$S_{\triangle} = 17 \cdot (17 + 17) = EI_2 \cdot (17 + 17)$$

$$17 = EI_2 \Rightarrow \text{Сумма высот равна: } 17 + 17 = 34 \quad \text{Of.}$$

Ответ: 34

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М А О О О 2 3 3 7 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

√5

Так как $a+b+c=1$ и

a, b, c положительные $\Rightarrow$ ~~они~~

$$a^4+b^4+c^4 < a^6+b^6+c^6 \Rightarrow \frac{a^4+b^4}{a^6+b^6} + \frac{b^4+c^4}{b^6+c^6} + \frac{c^4+a^4}{c^6+a^6} < 1$$

Так как $a+b+c=1 \Rightarrow a \cdot b \cdot c < 1$

$\Rightarrow$

$$\frac{a^4+b^4}{a^6+b^6} + \frac{b^4+c^4}{b^6+c^6} + \frac{c^4+a^4}{c^6+a^6} \leq \frac{1}{a \cdot b \cdot c} \quad (\text{Так как } a \cdot b \cdot c < 1 \Rightarrow \frac{1}{a \cdot b \cdot c} > 1)$$

чт.д.

Ож.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 3 5 4 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Центр каждой из 7 девочек это вершины графа, а ребро графа это факт игры между парой девочек. По условию все девочки сыграли одинаковое число партий $\Rightarrow$ степени всех вершин графа одинаковы. Рассмотрим возможные степени вершин.

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	0	5	7		45

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

① Степень каждой вершины ≥ 3 , но < 7 , т.к. по условию точно есть девочка, сыгравшая минимум 3 партии, (Маша), а маме известно, что любая пара девочек сыграла между собой не больше 1 партии $\Rightarrow$ Максимально кол-во партий, сыгранных одним человеком, равно 6.

② Степень каждой вершины ~~не может быть~~ четной (кратна 2), т.к. в любом графе ~~то~~ кол-во вершин четной степени четно (лемма о рукопожатиях), а в графе построению по условию ^{четное кол-во} $\neq$ вершин, с одинаковыми степенями $\Rightarrow$ Если эти степени четны, то лемма о рукопожатиях не выполняется - Противоречие.

③ Степень каждой вершины $\neq 6$, т.к. это означает, что каждая девочка сыграла со всеми другими девочками, т.к. если бы степень каждой вершины была равна 6, то это означало бы, что каждая девочка сыграла со всеми другими девочками, но по условию Маша не играет с Катей.

||

Единственная возможная степень каждой вершины равна 4. Построим

Пример.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в ранее справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

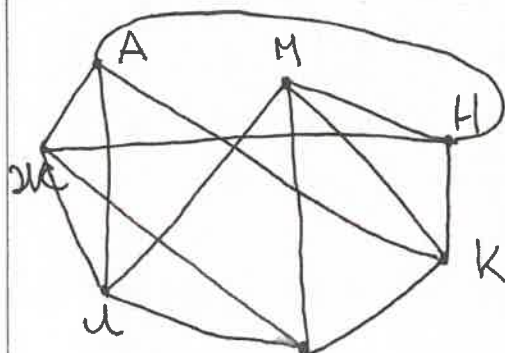
М А О О О 2 3 5 4 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1 (подсказка)

Пример:

Обозначим каждую девочку за 1-ую букву её имени



Все кривые с указанием в задании выполнены

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Вершины

Парти ~~соединённые~~, соединённые ребрами.

M - H	K - C
M - K	C - J
M - C	C - A
M - A	J - K
H - A	J - A
H - K	K - A
H - C	
K - A	

208

Ответ: Каждая девочка могла сыграть только 4 партии

$$n \geq 2$$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$(-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20) \in \mathbb{N}$$

⇓

$$n > 0$$

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 > 0 \quad | \cdot 3$$

⇓

$$-n^2 + 4n + 60 > 0$$

$$-(n^2 - 4n - 60) > 0$$

$$-(n^2 - 4n + 4 - 64) > 0$$

$$-(n-2)^2 - 64 > 0$$

$$-(n-2)^2 + 64 > 0 \quad | -64$$

$$-(n-2)^2 > -64 \quad | : -1$$

$$(n-2)^2 < \frac{64}{8} \quad | \sqrt{}$$

$$|n-2| < 8$$

$$\begin{cases} n-2 \geq 0 \\ n-2 < 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \geq 2 \\ n < 10 \end{cases} \Rightarrow n \in (-6; 2) \cup [2; 10]$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	В	В	В	2	3	5	4	1	2	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2 (продолжение)

$$\begin{cases} n \in (-6; 2) \cup [2; 10) \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow n \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

Подставим все возможные n в $-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20$ и проверим для каких n $(-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20) \in \mathbb{N}$

① $n = 1$

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 = -\frac{1}{3} \cdot 1^2 + \frac{4}{3} \cdot 1 + 20 = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + 20 = \frac{3}{3} + 20 = 21 \in \mathbb{N}$$

$n = 1$ подходит

② $n = 2$

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 = -\frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{4}{3} \cdot 2 + 20 = -\frac{4}{3} + \frac{8}{3} + 20 = \frac{4}{3} + 20 = 21\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$$

$n = 2$ не подходит

③ $n = 3$

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 = -\frac{1}{3} \cdot 9 + \frac{4}{3} \cdot 3 + 20 = -3 + 4 + 20 = 21 \in \mathbb{N} \quad n = 3 \text{ подходит}$$

④ $n = 4$

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 = -\frac{1}{3} \cdot 16 + \frac{4}{3} \cdot 4 + 20 = -\frac{16}{3} + \frac{16}{3} + 20 = 20 \in \mathbb{N}$$

$n = 4$ подходит

⑤ $n = 5$

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 = -\frac{1}{3} \cdot 25 + \frac{4}{3} \cdot 5 + 20 = -\frac{25}{3} + \frac{20}{3} + 20 = -\frac{5}{3} + 20 = -1\frac{2}{3} + 20 = 18\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$$

$n = 5$ не подходит

⑥ $n = 6$

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 = -\frac{1}{3} \cdot 36 + \frac{4}{3} \cdot 6 + 20 = -12 + 8 + 20 = 16 \in \mathbb{N}$$

$n = 6$ подходит

⑦ $n = 7$

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 = -\frac{1}{3} \cdot 49 + \frac{4}{3} \cdot 7 + 20 = -16\frac{1}{3} + 9\frac{1}{3} + 20 = -8 + 20 = 12 \in \mathbb{N}$$

$n = 7$ подходит

⑧ $n = 8$

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 = -\frac{1}{3} \cdot 64 + \frac{4}{3} \cdot 8 + 20 = -21\frac{1}{3} + 10\frac{2}{3} + 20 = -10\frac{2}{3} + 20 = 9\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$$

$n = 8$ не подходит

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А В О О О 2 3 5 4 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2 (подсказка)

9) $n=5$

$$-\frac{1}{3} \cdot n^2 + \frac{4}{3} n + 20 = -\frac{1}{3} \cdot 25 + \frac{4}{3} \cdot 5 + 20 = -\frac{25}{3} + \frac{20}{3} + 20 = -\frac{5}{3} + 20 = 5 \in \mathbb{N}$$

$n=5$ подходит

Все возможные n рассмотрены

~~Ответ~~. Порядок чисел $n=1; 3; 4; 6; 7; 9$, т.е. 6

чисел

Ответ: 6 чисел **208**

№4

Изобразим фигуру (рис. 1).

Рассмотрим прямоугольник

6×9 , у которого одна из

числовых шесток совпадает с

числовой шесткой прямоугольной

фигуры, которую поместим на

на прямоугольной фигуре. Без ограничения

сдвига будем считать, что это

$ABCD$. Разобьем $ABCD$ на

квадраты 3×3 (рис. 2).

Чтобы заполнить этот квадрат

монетами, нам нужно не

более трех монет 1×3 или 3×1 ,

и в которых нет хотя одной

монеты, шириной этой в нашей строке

и столбца. Заполним одна хотя одна

монета $\Rightarrow$ чтобы заполнить квадрат

3×3 по числу ширины m , n 3 монеты.

Пример на рис. 3 $\Rightarrow$ в квадрате

3×3 прямоугольнике ~~или~~ 6×9 m, n

кол-во квадратов в прямоугольнике $6 \times 9 \cdot 3 = 6 \cdot 3 = 18$

рис. 1

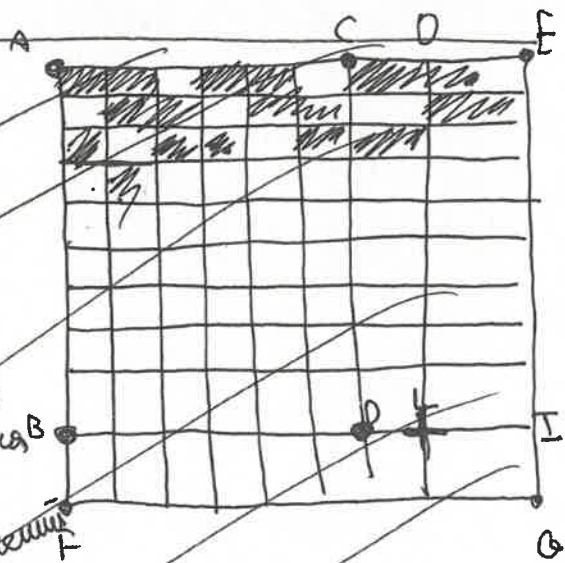


рис. 2

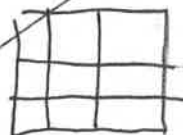
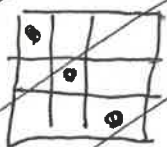


рис. 3



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 3 5 4 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа

в рамке справа



№4

Можно переформулировать задачу так: «Вам дана $m \times n$ кон.-во монет x мон в каждой прямоугольнике 1×3 ~~или~~ 3×1 дано 2 монеты и прибавить к результату 1, т.е. вывести себе одну монету на день и заплатить один из прямоугольников поименов!»

Для решения этой задачи рассмотрим $m \times n$ кон.-во монет так чтобы в каждой 1×3 или 3×1 было 1 монета, выведем это число из $8 \cdot 10 = 80$ т.е. инвертируем каждую шестую строку и прибавим 1 к результату.

Используем форму (рис. 1)

Рассмотрим прямоугольник 6×5 , у которого одна из угловых клеток совпадает с угловой клеткой первой строки.

Без ограничения общности

будем считать его за ABCD. рис. 2

Разобьем ABCD на квадраты 3×3 без самопересечения (рис. 3)

Получим 6 квадратов.

Чтобы в каждом 1×3 или 3×1 рис. 3

этот квадрат 3×3 было 1 монета, нужно чтобы в каждой строке и столбце было по 1 монете.

Это достигается т.н. за 3

монеты (рис. 2) $\Rightarrow$ для

заполнения ABCD так

чтобы в каждом 3×1 ~~или~~

1×3 было 1 монета, нужно

$m \cdot n \cdot 3 \cdot 6 = 8$ монеток.

рис. 1

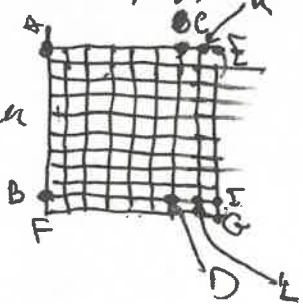


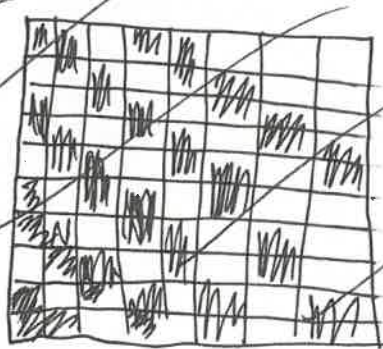
рис. 2



рис. 3



рис. 4



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 3 5 4 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Телематрикс оставил приходящий 10x8, ~~и~~ входящий в ADDC. Пусть это BDCEGF.

Телематрикс его телематрикс: ~~и~~

BIGF - ~~и~~

CKDL

KEIL

BIGF заменяется ~~и~~ монетами так чтобы в монетах 1x3 и 3x1 была ровно 1 монета m:n

~~и~~ за $\lceil \frac{8}{3} \rceil = 3$, м.н. BIGF это

приходящий 1x8.

CKDL { заменяется монетами так чтобы

KEIL

в монетах 1x3 и 3x1 была ровно 1 монета m:n

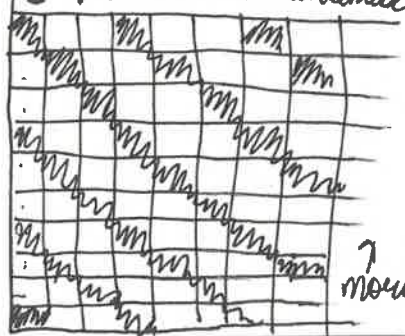
за $\lceil \frac{9}{3} \rceil = 3$

$\lceil x \rceil$ - округление x до ближайшего целого числа $\geq x$.

Вся графа заменяется монетами по числу m:n за за сумму m:n заменяющей его телематрикс, м.н. за 27. Пример:

Инвертируем графу, м.н. заменяем монеты на монеты, а пунктиры на монеты и пунктиры

■ - заменяющие монеты



7 точек

80 - 27 = 53 монеты, для замены себе 4 монеты, получаем ответ по графе при 2 монетах в каждой 3x1 и 1x3 ставим себе одну монету и получаем m:n 1 1x3 или 3x1 заменяем

заменяющей монетами

Ответ: 54 монеты

58

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 3 5 4 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



№3

Условие:

① ~~МН~~ МН медиана
прямоугольного $\triangle ABL$



МН = половина гипотенузы 10

$\triangle ABL \Rightarrow MN = AM = BM = 10$



$LN = AM = BM = 10$

② $\angle MLN = 180 - 30 - 30 = 120^\circ$ по теореме о сумме углов $\triangle$

③ Пусть $\angle BAL = x = \angle LAN$ ~~по свойству~~

$\angle MNB = \angle MBN = y$ по свойству равнобедр. $\triangle$



$\angle ANM = 2x$ по свойству равнобедр. $\triangle$



$2x + y = 90$ по свойству прямоугольного $\triangle$

④ Построим высоту $\triangle ABC$ CH_1



$\angle ACH_1 = y$ по сумме углов $\triangle$



$\angle H_1OC = \angle H_1OB = 2x$ по сумме углов $\triangle$

~~⑤ AL также является медианой $\triangle ABC$~~
 ~~ML средняя линия $\triangle$~~

⑤ $ML \parallel AC \Rightarrow BL \perp ML \Rightarrow \angle MLO_1B = \angle BO_1L = \angle LO_1H = \angle MO_1H = 90^\circ \Rightarrow y = 60^\circ$ по сумме углов $\triangle$; $2x = 30^\circ \Rightarrow x = 15^\circ$

$CH_1 = \frac{1}{2} AC = 10$; $BL = \frac{1}{2} AB = 10 \Rightarrow CH_1 + BL = 20$

Ответ: 20

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 7

М А О О О 2 3 6 1 9 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

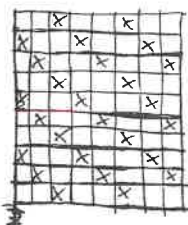
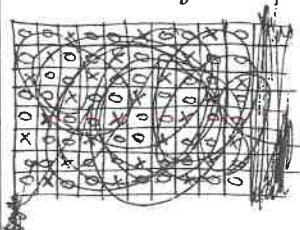
ВНИМАНИЕ! Проверьте только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

иных 9 клетках не хватит 2 п.м.
(всего $3 \cdot 2 = 6$ монет уместит) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ в столбцах с.м. в самой нижней строке минимум ч.м., а на такие условия есть пример: х-м.м.

1	2	3	4	5	6	Σ
15	5	x	20	0		40

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)



$\Rightarrow$ Если есть хотя бы 26 п.м. то прямоугольник из монет не гарантирован $\Rightarrow$ при 25 п.м. и меньше прямоугольник гарантирован $\Rightarrow$ мин. число монет: $80 - 25 = 55$ монет

Ответ: 55.

208.

Пусть $x \leq y \leq z$ и при этом х-мин. из $a; b; c$; z-макс. из $a; b; c$, а y-среднее. Тогда $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 3$ и $\frac{a}{x+5} + \frac{b}{y+5} + \frac{c}{z+5} = \frac{x}{x+5} + \frac{y}{y+5} + \frac{z}{z+5}$

~~$x \leq y \leq z$~~

$$x \leq y \leq z < \sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z} > \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{x+5} \geq \frac{1}{y+5} \geq \frac{1}{z+5} > \frac{1}{\sqrt{3}+5}$$

$$\sqrt{3} > 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}+5} > \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{x+5} + \frac{1}{y+5} + \frac{1}{z+5} \geq 3 \cdot \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{x+5} + \frac{1}{y+5} + \frac{1}{z+5} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{x+5} + \frac{1}{y+5} + \frac{1}{z+5} \right) \cdot 5 \geq \frac{5}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5 \left(\frac{1}{x+5} + \frac{1}{y+5} + \frac{1}{z+5} \right) \leq -\frac{5}{2} \Rightarrow 3 - 5 \left(\frac{1}{x+5} + \frac{1}{y+5} + \frac{1}{z+5} \right) \leq 3 - \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{x+5}{x+5} - \frac{5}{x+5} + \frac{y+5}{y+5} - \frac{5}{y+5} + \frac{z+5}{z+5} - \frac{5}{z+5} \leq \frac{7}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+5} + \frac{y}{y+5} + \frac{z}{z+5} = \frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} \leq \frac{7}{2}$$

08.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 7

[illegible]

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

27

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Будем обозначать девочек по первой букве имени и представим задачу в виде графа, где вершины это игроки, а ребра - сыгранные игры.

Тогда т.к. все девочки сыграли одинаковое число матчей степень каждой из 7 вершин ≥ 3 и

≤ 6 (Зина играла Маша, а 6 — макс.) Но в графе всегда четное кол-во вершин с нечетной степенью $\Rightarrow$ степень вершин $\in \{4, 6\}$.
Пот.к. Маша не играла с Катей её степень вершины $\neq 6 \Rightarrow$ степень всех вершин 4, то есть каждая девочка сыграла по 4 партии.

Ambern: 4.

158.

N2

$$(-\frac{7}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20) \in \mathbb{N} \Rightarrow -\frac{n^2}{3} + \frac{4n}{3} + 20 > 0 \Rightarrow \cancel{4n - n^2 + 60 > 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 - 4n - 60 \leq 0 \Rightarrow n^2 - 4n - 2^2 - 64 \leq 0 \Rightarrow (n-2)^2 - 8^2 \leq 0 \Rightarrow (n-10)(n+6) \leq 0$$

еще $n \geq 70 \Rightarrow \begin{cases} n-70 \geq 0 \\ n+6 \geq 76 \end{cases} \Rightarrow (n-70)(n+6) \geq 0 !!!$ м.к. $(n-70)(n+6) < 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow n < 70 \Rightarrow n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Index: 9.

58.

14

(по клеткам)

Сначала решим небольшой вопрос - сколько мин. число пустых клеток необходимо, чтобы ни 7 прямоугольнику не образовалось? Δ 1 столбец - вне то ясно, что нужно изобразить от прямоугольников 2 пустыми местами. Если между п. и. и графиками более 2 монет - то это прямоугольник, всего монет в столбце с 2 п. и. 8 шт., а пространство ~~то~~ между стенками и п. и. 3- могут уместиться только 6 монет. $\Rightarrow$ В каждой строке не менее 3 п. и.

~~то~~ Δ 7 строк, внешней аналогичным методом 7 п. и. не хватит ~~всего~~, ~~($i=2$)~~ ($i=2$) = 4 монеты уместить, $8-1=7$ всего), ~~значит~~ значит в каждой строке не менее 2 п. и. Δ столбец с п. и. в самой нижней строке - встав-

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 3 7 4 9 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
18	16	X	18	X		52

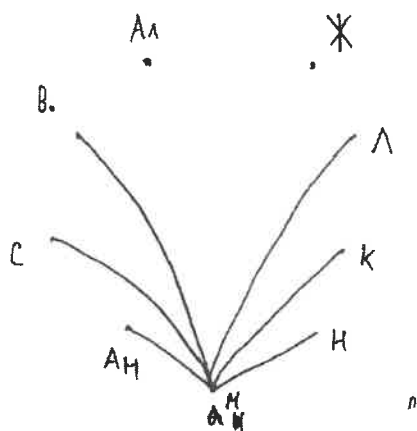
Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1. Пусть n кол-во ^{первичных} разговоров одной девочки. По условию для

всех девочек n одинаковое. Пусть девочки это верш. в графе, а ребро между ними проводится если между 2-мя девочками есть переписка. Сумма степеней всех вершин $n \Rightarrow$ сумма степеней вершин $9n$ т.к. вершин всего 9. Тогда $n:2$ т.к. сумма степеней вершин четна, а $9:2$. $n \geq 5$ т.к. Маша переписывается с 5 мальчиками но $n \leq 8$ т.к. вершин 9 $\Rightarrow$

$5 \leq n \leq 8$ и $n:2 \Rightarrow n$ либо 6 либо 8. $\Rightarrow 9n$ либо 54 либо 72

Пример на $n=6$. $9n=54$



Расставим вершины по кругу и будет соед. с 3 близк. и 3и по часовой и с 3 близк. против часовой стрелки. Порядок людей и пример для Маши показан (казаны т.)

условие для

вершины 6 и

Пример $n=8$ $9n=$

верш. 8, а сумма

очев. выполн. $\Rightarrow 1$

$$\text{№2. } -\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11$$

$$\frac{n(6-n)}{5} + 11 \text{ т.к. } n:5$$

нецелое, а тогда и вся и рассмотрим $n=1$ $n=5$ и не сравн. с 1 по я. и



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 3 7 4 9 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$n=1 \quad \frac{n(6-n)}{5} + 11 = 12 \in \mathbb{N}$$

$$n=5 \quad \frac{n(6-n)}{5} + 11 = 12 \in \mathbb{N}$$

$$n=6 \quad \frac{n(6-n)}{5} + 11 = 11 \in \mathbb{N}$$

$$n=10 \quad \frac{n(6-n)}{5} + 11 = 3$$

При $n > 10$ ~~разрешается~~ что, $n \geq 11 \Rightarrow \frac{n(6-n)}{5} \leq -11$ и при больших

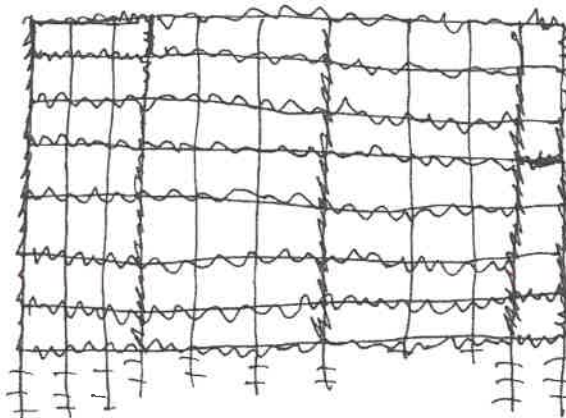
n значение очевидно будет уменьш. $\Rightarrow$ при $n \geq 11 \quad \frac{n(6-n)}{5} \leq -11 \Rightarrow$

$$\frac{n(6-n)}{5} + 11 \leq 0 \Rightarrow \text{значения не катят.}$$

Ответ: $n=1; n=5; n=6; n=10$

168.

НЧ. Разобьем прямоугольник 7×10 на прямоугол. 7×9 и 4×1 .
 Прямоуг. 7×9 ~~я~~ очевидно можно разбить на прямоугол. 1×3 .
~~В каждом из них не более~~ Предположим, что 46 монет не хватит.
 Тогда суц. расстановка 46 монетам при которой не в один
 прямоугол. 1×3 или 3×1 ^{3-х} монет. Прямоуг. 7×9 можно разбить
 на 21 прямоугол. $1 \times 3 \Rightarrow$ в нем не более $21 \cdot 2 = 42$ монет (т.е. в
 каждом 1×3 не более 2-х монет) $\Rightarrow$ в оставшемся прямоугол. 1×7
 должно быть ≥ 4 монеты.



Рассмотрим данное разби-
 ние и расстановку с макс. кол-вом
 монет без 3-х монет в прямоугол.
 1×3 или 3×1 . (Внешней линией
 выдел. 2-й прямоугол. 1×3 ; 2-й прямоугол.
 3×1 и одна клетка 1×1 .)
 В такой расст. в каждом из пра-
 могол. не более 2-х монет и еще



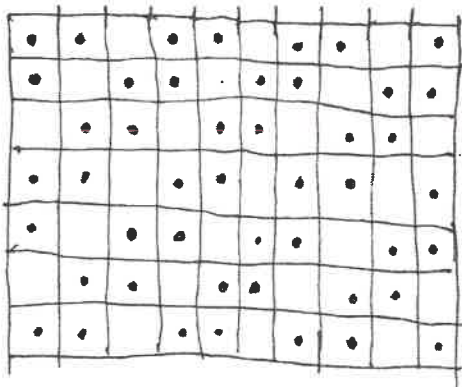
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 3 7 4 9 2 6

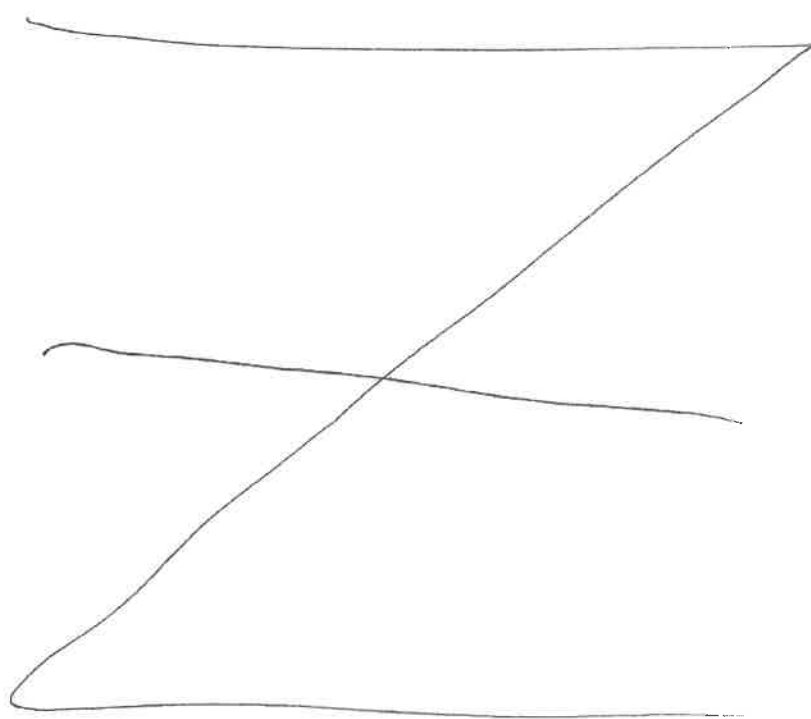
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Есть 1 клетка $\Rightarrow$ монета
можно расставить не бо-
лее $23 \cdot 2 + 1 = 47$. $\Rightarrow$ Если монет ≥ 48 то такой прямой
найдется. Пример, что 44 монет не хватает



Почками отмечены монеты, все-
го их 44, и никакие 3 очев.
не создаю прямой. 1×3 или
 $3 \times 1 \Rightarrow$ пример подх. Ответ: 44?

~~185~~ 185



ВНИМАНИЕ! Проверьте только то, что записано с этой стороны листа
в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 4 0 8 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	15	0	20	0		55

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

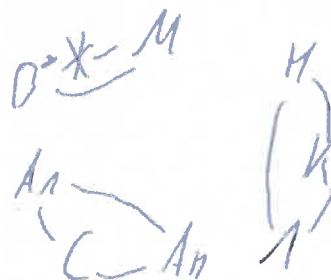
№1

И.к. Мама перешивала

Книжки, карей, Лекции, Аней и Светой и каждая девочка ушивала в определенном числе пересты, = 7 каждая девочка ушивала ленточку в 5 пересты.

И.к. девочек 9, но: $9 \cdot 5 = 45$. Но в каждой пересты ушивали 2 девочки, а 45 - нечетное, $\Rightarrow 2 (45 : 2 = 22,5)$.

И.к. 22,5 пересты девочке не может быть, $\Rightarrow$ у каждой девочки не может быть по 5 пересты. Если у каждой девочки 6 пересты, каждая девочка не ушивалась ленточкой с двумя:



И.к. мама перешивала со всеми, кроме Дуня и Реня, Лекция - со всеми, кроме Светы и Аней и а.к.г. Всего было $9 \cdot 6 = 54$ $54 : 2 = 27$ - всего пересты.

И.к. 27 пересты не может быть, и.к. $63 : 2$.

Если у каждой девочки 8 пересты с каждой, то это по 8, но: $9 \cdot 8 = 72$. $72 : 2 = 36$.

Значит, всего может быть либо 27, либо 36 пересты.

Ответ: Всего может быть или 27 пересты, или 36 пересты.

208.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 4 0 8 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

$$\frac{6}{5}u = \frac{1}{5} \cdot 6u$$

$$-\frac{1}{5}u^2 + \frac{1}{5} \cdot 6u + 11 = \frac{1}{5}u^2 + \frac{1}{5} \cdot 6u - 11 = \frac{1}{5}u \cdot u + \frac{1}{5}u \cdot 6 - 11$$

или $u > 11$, но результат отрицательный, или $u < 11$, но результат отрицательный, или $u = 11$, но результат = 0

или же, тогда u должно делиться на 6. $6 \cdot \frac{11}{6} u \leq u < 11$.

$$\left(-\frac{121}{5} + \frac{66}{5} + 11 = \frac{-55}{5} + 11 = -11 + 11 = 0\right) \Rightarrow \text{Значит, тогда результат для отрицательных, и тогда должно } < 11.$$

Так как 11-й год прошёл, но надо $u:5$, надо $(u^2 - 6u):5$.
 Так как u в $-\frac{1}{5}u^2$ и $\frac{6}{5}u$ значащие 5, $\Rightarrow u:5$ или $(u^2 - 6u):5$.

u , кратные 5 и промежуточные им: 5; 10.

тогда $(u^2 - 6u):5$, возможные $u = 7; u = 8$.

Если рассмотреть u от 1 до 10 (выяснено) не дано отрицательное число в ответе, $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ возможно u , равные 1; 5; 6; 10 или наоборот;

$$u = 1: \frac{6}{5} - \frac{1}{5} + 11 = 12.$$

$$u = 5: 6 - 5 + 11 = 12.$$

$$u = 6: \frac{36}{5} - \frac{36}{5} + 11 = 11$$

$$u = 10: 12 - 10 + 11 = 3$$

всего 4 ответа, тогда надо проверить u .

Ответ: всего 4 натуральных числа u , для которых значение $-\frac{1}{5}u^2 + \frac{6}{5}u + 11$ тоже натуральное.

158.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

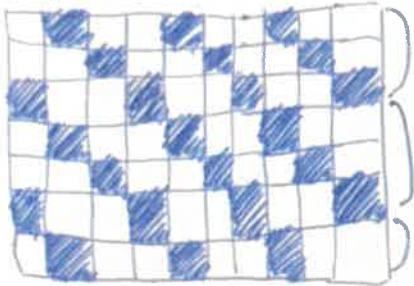
М А О О О 2 4 0 8 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4



№1

№2

№3

Задача №4 на 3 задачи:
(математико-логические задачи)

В 1-й партии 10 белых и 3 черных
хода. После них в партии белых не

было убитых фигур 1х3, т.е. в партии белых
оставилась одна незабитая фигура.

Во второй партии белые ходят в 1-й, 2-й и 3-й, и
в третьей партии белые ходят в 1-й, 2-й и 3-й, и
в четвертой партии белые ходят в 1-й, 2-й и 3-й, и
в пятой партии белые ходят в 1-й, 2-й и 3-й, и
в шестой партии белые ходят в 1-й, 2-й и 3-й, и
в седьмой партии белые ходят в 1-й, 2-й и 3-й, и
в восьмой партии белые ходят в 1-й, 2-й и 3-й, и
в девятой партии белые ходят в 1-й, 2-й и 3-й, и
в десятой партии белые ходят в 1-й, 2-й и 3-й, и

3-2 ход - 1х10, всего ходов мин. 3 ходами (сразу).

Значит, всего на поле может быть максимум 23

незабитых фигур, т.е. можно сразу вырезать

фигуру 1х3 из забитых фигур. Минимум

ходов: (сразу) т.е. мин. 23 ходами, => max 47

ходов: т.е. максимум ходов 47 забитых

фигур, но нельзя вырезать фигуру

1х3 из забитых фигур, а

т.е. как бы сразу не вырезали все фигуры

(математико-логические задачи) т.е. всегда есть

возможность вырезать фигуру 1х3 из забитых

фигур, значит, у Влада максимум 48 ходов.

Ответ: у Влада может быть максимум 48
ходов.

208.

Олимпиада школьников «БЕЛЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 4 0 8 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

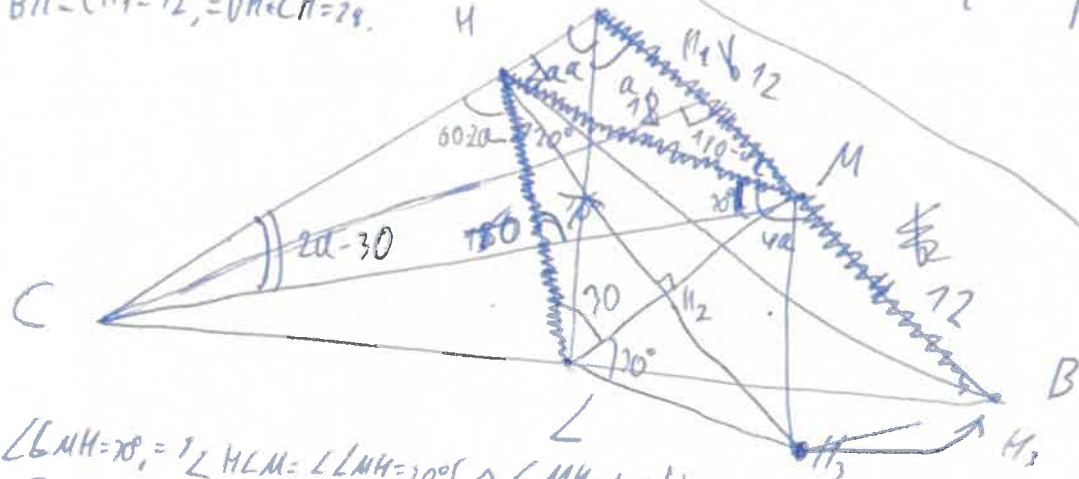
Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

Две вершины $\triangle H_1$. $H_1B = H_1H_3 = 12$.
 $H_1H_2 = CH_1 = 12$, $\angle H_1H_2H_3 = 70^\circ$.

и

$\angle H_1 = \angle H_1H_2 = 12$ (мм)



$\angle BMH_1 = 70^\circ$, $\angle H_1LM = \angle LMH_1 = 70^\circ$ ($\triangle LMH_1$ - μ id).

Вспомогательный $\triangle H_1AO$: $\angle H_1AO = 90^\circ$ (по условию), $\angle H_1AO = 90^\circ$ (по условию), $\Rightarrow HM = AM = MB$ (по свойству медианы к гипотенузе в прямоугольном треугольнике, $\Rightarrow$

$\angle MOH_1 = 180 - 70 - 70 = 40^\circ$.

$\angle MMH_1 = \angle MHA = 2a$ (по условию, $\angle MAL = \angle LAC = a$ (по условию)).

Также $\angle AMH_1 = 180 - 4a$, $\angle H_1MB = 4a$.

$\angle MLC = 180 - [2a + 180 - 4a + 30] = 180 - 2a - 180 + 4a - 30 = -30$ ($2a = 2a - 30$)

В $\triangle CHM$: $\angle CHM = 70^\circ$, $\angle H_1CM = 70^\circ$, $\angle H_1CM = 70^\circ$, $\angle H_1CM = 70^\circ$.

$\Rightarrow \angle CHM = 180 - [2a - 30 + 70] = 180 - 2a$

$\angle COH_1 = \angle MOH_1 = 40^\circ - \angle MOH_1 = 180 - 50^\circ = 130^\circ$ (по условию).

В $\triangle COH_1$: $2a - 30 + 130 + 60 - 2a = 2a - a = 110 + 70 + 60$

Треугольники $\triangle CH_1$, $\triangle CH_1$ и $\triangle BH_1$ - подобные, $\Rightarrow$

$\frac{CH_1}{OH_1} = \frac{AH_1}{OH_1} = \frac{AL}{OH_1}$

$\angle M = 12\sqrt{3}$

Треугольники $\triangle H_1H_2 = 6$, $\angle H_1H_2 = 70^\circ$ (по условию).

Треугольники $\triangle H_1H_2 = 6$, $\angle H_1H_2 = 70^\circ$ (по условию).

Ответ: 24

ОБ

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 4 0 8 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

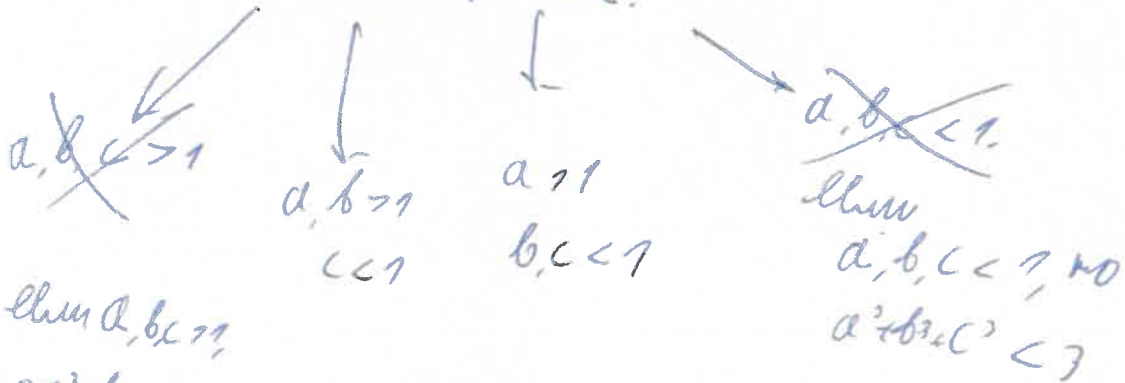
N5

Если $a=b=c$, то: $a=b=c=1$.

$$a^3+b^3+c^3 = 1+1+1=3$$

$$\frac{1}{a^4+3} + \frac{1}{b^4+3} + \frac{1}{c^4+3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Рассмотрим 4 случая:



или $a, b, c \geq 1$

то $a^3+b^3+c^3 \geq 3$.

Значит, верно 2 сл. Вывод: одно из a, b, c равно 1, а другие больше.

или два из них ≥ 1 , а третий меньше.

Рассмотрим 2 случая. Он упрощается. Пусть, $\frac{1}{a^4+3} + \frac{1}{b^4+3} + \frac{1}{c^4+3} < \frac{3}{4}$.

Тогда: $a^4, b^4, c^4 \geq 1$ (и.к. если увелич. знамен. то

дробь уменьшается). Но когда $a^3+b^3+c^3 \geq 3$.

Рассмотря, тогда $\frac{1}{a^4+3} + \frac{1}{b^4+3} + \frac{1}{c^4+3}$ должно $< \frac{3}{4}$ верно,

но a^4, b^4, c^4 должны > 1 но когда $a^3+b^3+c^3 \geq 3$

(и.к. если одно > 0 , но оно в левой части > 2 дробь

> 0 , а если одно < 0 , то в левой части > 2 дробь < 0).

Значит, $\frac{1}{a^4+3} + \frac{1}{b^4+3} + \frac{1}{c^4+3} \geq 0$.

Ответ: $\frac{1}{a^4+3} + \frac{1}{b^4+3} + \frac{1}{c^4+3} \geq 0$. т.к.г.

О.Ф.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	О	О	О	2	4	5	1	7	2	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
15	18	x	12	x		45

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Семь девочек играли в шахматы, значить кол-во игр, которые сыграла каждая девочка ~~от~~ возможно от 0 до 6, но т.к. по условию Маша не играла с Катей, то каждая девочка не сможет сыграть 6 игр, также по условию Маша сыграла с Ниной, Катей и Светой, тогда каждая девочка не сможет сыграть меньше 3 игр, получается, что останется сыграть каждой девочке либо 5 игр, либо 4, либо 3 игры

Рассмотрим, когда каждая девочка сыграет 5 игр:

Тогда общее число партий равно $\frac{7 \cdot 5}{2} = 17,5$ - ~~невозможно~~, значит остается девочка, которая не сыграет такое же кол-во игр как другие

Рассмотрим, когда каждая девочка сыграет 4 игры:

Тогда общее число партий равно $\frac{7 \cdot 4}{2} = 14$ - подходит

Рассмотрим, когда каждая девочка сыграет 3 игры:

Тогда общее число партий равно $\frac{7 \cdot 3}{2} = 10,5$, значит опять одна девочка остается, которая не сыграла такое же кол-во игр как другие

Ответ: 4.

158.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 4 5 1 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

Найдём значение n , при котором значение ~~выражения~~ квадратного трёхчлена равно 0:

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 = 0 \quad | \cdot (-3)$$

$$n^2 - 4n - 60 = 0$$

$$D_1 = k^2 - ac$$

$$D_1 = 4 - 1(-60) = 64$$

$$n = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$$

$$n = \frac{2 \pm 8}{1}$$

$$\begin{cases} n = 10 \\ n = -6 \end{cases}$$

По т.к. $n \in \mathbb{N}$, то при $n = 10$, значение $-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 = 0$, значит, что при n от 1 до ~~10~~ значение выражения $-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 > 0$, рассмотрим n от 1 до 9:

$$n=1 \quad -\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{4}{3} \cdot 1 + 20 = 21, 21 \in \mathbb{N}$$

$$n=2 \quad -\frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{4}{3} \cdot 2 + 20 = 21\frac{1}{3}, 21\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$$

$$n=3 \quad -\frac{1}{3} \cdot 9 + \frac{4}{3} \cdot 3 + 20 = 21, 21 \in \mathbb{N}$$

$$n=4 \quad -\frac{1}{3} \cdot 16 + \frac{4}{3} \cdot 4 + 20 = 20, 20 \in \mathbb{N}$$

$$n=5 \quad -\frac{1}{3} \cdot 25 + \frac{4}{3} \cdot 5 + 20 = 18\frac{1}{3}, 18\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$$

$$n=6 \quad -\frac{1}{3} \cdot 36 + \frac{4}{3} \cdot 6 + 20 = 16, 16 \in \mathbb{N}$$

$$n=7 \quad -\frac{1}{3} \cdot 49 + \frac{4}{3} \cdot 7 + 20 = 13, 13 \in \mathbb{N}$$

$$n=8 \quad -\frac{1}{3} \cdot 64 + \frac{4}{3} \cdot 8 + 20 = 9\frac{1}{3}, 9\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$$

$$n=9 \quad -\frac{1}{3} \cdot 81 + \frac{4}{3} \cdot 9 + 20 = 5, 5 \in \mathbb{N}$$

Ответ: 6.

188.



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	О	О	О	2	4	5	1	7	2	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4
Чтобы найти наименьшее кол-во монеток ^{которое} может быть у Влада, можно найти сначала наибольшее кол-во монеток, которых можно расставить, так, чтобы не было треугольника 1×3 или 3×1 , расставим на таблице:

○	×	○	○	×	○	○	×	○	○
○	○	×	○	○	×	○	○	×	○
×	○	○	×	○	○	×	○	○	×
○	×	○	○	×	○	○	×	○	○
○	○	×	○	○	×	○	○	×	○
×	○	○	×	○	○	×	○	○	×
○	×	○	○	×	○	○	×	○	○
○	○	×	○	○	×	○	○	×	○
○	○	×	○	○	×	○	○	×	○

Всего максимальное кол-во монет 54, а значит, что наименьшее кол-во монет которое может быть у Влада равно $54+1=55$

Ответ: 55

125.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

МАООО 2472926

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



12

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	X	20	2		62

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Ответ: 4

Примеры: пусть $f(n) = -\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11$.

$$f(1) = -\frac{1}{5} + \frac{6}{5} + 11 = 12 \in \mathbb{N},$$

$$f(2) = -\frac{4}{5} + \frac{12}{5} + 11 = 12 \in \mathbb{N},$$

$$f(5) = -5 + 6 + 11 = 12 \in \mathbb{N},$$

$$f(6) = -\frac{36}{5} + \frac{36}{5} + 11 = 11 \in \mathbb{N},$$

$$f(10) = -\frac{100}{5} + \frac{60}{5} + 11 = -20 + 12 + 11 = 3 \in \mathbb{N}.$$

Как видно, все 4 примера удовлетворяют условию. Докажем, что других нет.

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = f(n) \in \mathbb{N}.$$

$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + (11 - f(n)) = 0$. Это квадратное уравнение относительно n ($ax^2 + bx + c = 0$; $x = n$, $a = -\frac{1}{5}$, $b = \frac{6}{5}$, $c = 11 - f(n)$).

Воспользуемся формулой дискриминанта:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad n_{1,2} = \frac{-\frac{6}{5} \pm \sqrt{\frac{36}{25} + 4 \cdot \frac{1}{5} (11 - f(n))}}{-\frac{2}{5}} =$$

$$= \frac{-6 \pm 5 \sqrt{\frac{36}{25} + \frac{4}{5} (11 - f(n))}}{-2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 20(11 - f(n))}}{2} =$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{256 - 20f(n)}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{64 - 5f(n)}}{2} = 3 \pm \sqrt{64 - 5f(n)}.$$

Значит, для любого n , такого что $f(n) \in \mathbb{N}$ верно, что $n_0 = 3 \pm \sqrt{64 - 5f(n)}$; $n_0 - 3 = \pm \sqrt{64 - 5f(n)}$; $n_0 - 3 \in \mathbb{N}$, значит, $\pm \sqrt{64 - 5f(n_0)} \in \mathbb{N}$. т.е. $64 - 5f(n_0)$ — полный квадрат делится на 2

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 4 7 2 9 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

n_2 (продолжит.)
т.к. $f(n_0) \in \mathbb{N}$, $5f(n_0) \in \mathbb{N}$.

значит, $64 - 5f(n_0) < 64$. Так как это полный квадрат,

$$64 - 5f(n_0) \in \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$$

1) $64 - 5f(n_0) = 1$;

$5f(n_0) = 63/5$, левая часть :5, значит, случай невозможен.

2) $64 - 5f(n_0) = 4$.

$5f(n_0) = 60$; $f(n_0) = 12$; тогда $n_0 = \pm 4$; $3 \pm \sqrt{4}$;

$n_{01} = 3 - 2 = 1$; $n_{02} = 3 + 2 = 5$. Эти примеры уже приведены

3) $64 - 5f(n_0) = 9$;

~~64~~ $5f(n_0) = 55$; $f(n_0) = 11$; тогда $n_0 = 3 \pm \sqrt{9}$;

$n_{01} = 3 - 3 = 0 \notin \mathbb{N}$. $n_{02} = 3 + 3 = 6$. Этот пример уже приведен

4) $64 - 5f(n_0) = 16$; $5f(n_0) = 48 \neq 5$, противоречие. Сл. невозможен

5) $64 - 5f(n_0) = 25$; $5f(n_0) = 39 \neq 5$, противоречие. Сл. невозможен

6) $64 - 5f(n_0) = 36$; $5f(n_0) = 28 \neq 5$, противоречие. Сл. невозможен

7) $64 - 5f(n_0) = 49$; $5f(n_0) = 15$; $f(n_0) = 3$. Тогда $n_0 = 3 \pm \sqrt{49}$;

$n_{01} = 3 - 7 = -4 \notin \mathbb{N}$; $n_{02} = 3 + 7 = 10$, этот пример уже приведен. При $64 - 5f(n_0) > 49$ число $\sqrt{64 - 5f(n_0)}$ нецелочисленное, значит, все случаи рассмотрены, и новых примеров обнаружено не было, т.е. мы нашли все.

200.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 4 7 2 9 2 6

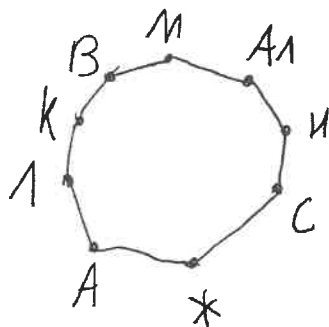
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

М1
Ответ: 27 или 36.

Если Маша переписывалась с 5-ю девочками, значит, все девочки переписывались хотя бы с 5-ю. Так как их 9, но лишние рукопожатия у каждой должны быть четное кол-во переписок, т.е. было 8 (если < 6, то не больше 4-х переписок, а у М. их 5). В 1-м случае каждая не списывалась с 2-мя другими. Обозначим каждую девочку по 1-й букве её имени, Алену как А1, а Аню как А. Нарисуем граф, в котором вершины – девочки, а ребра соединяют тех, кто не списывался:



По условию, М не списывается с ~~В~~ В и А1, а А1 – с М и И. Значит, данная схема антиребер не противоречит условию, и случай возможен.

Во 2-м случае (где у кажд. дев. 8 переписок) каждая девочка списывается с каждой, по условию это возможно (н.к. не показано, что кто-то с кем-то не переписывается), значит, он тоже возможен.

20б.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 4 7 2 9 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

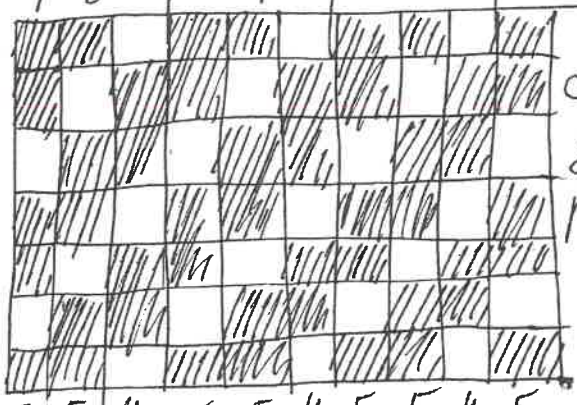
№4

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Ответ: 48

Допустим, ~~макет~~ у кого можно быть меньше. Но тогда можно разместить эти не более 47 монет следующим образом (закрашенные клетки — монеты):



5 5 4 5 5 4 5 5 4 5

Под каждым столбцом указано, сколько в нем монет.

Нетрудно убедиться, что на рисунке нет прямоугольников 1×3 или 3×1 с 3-мя закрашенными клеточками. А в сумме их $5 \cdot 7 + 4 \cdot 3 = 47$. Если же монет меньше 47, то уберем одну монету с рисунка, из-за чего условие все-таки не будет выполняться. Значит, монет хотя бы 48.

Докажем, что ≥ 48 монет никак нельзя разместить на доске так, что нет прямоуго. 1×3 и 3×1 с 3-мя монетами. Пусть (неизменная общность) в столбце 7 к. ~~тогда в нем монет будет не больше 5 монет (иначе в одной из двух пересекающихся прямоуго. 1×3 этого столбца нет пустой к. т.е. условие нарушится).~~ Допустим, что в 3-х подряд ~~идущих~~ столбцах по 5 монет. Тогда в них суммарно $(7-3) \cdot 3 = 6$ свободных пустых клеток, но также в них можно выделить 7 пересекающихся прямоуго. 3×1 (по 1 в строке), а значит, хотя бы в 1 из них не будет пустой клетки, т.е. будет 3 монеты, противоречие условию. Значит, среди любых 3-х подряд идущих столбцов будет хотя бы 1 столбец с не более, чем 4-мя монетами, а тогда всего в доске такие столбцы хотя бы 3 (т.к. её можно поделить на 3 части по 3 столбца). Т.е. всего монет можно разместить по условию не более $4 \cdot 3 + 5 \cdot 7 = 47$, и при большем кол-ве возникнет противоречие условию.

208

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 4 7 2 9 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Дано:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3$$

$$\frac{1}{a^4+3} + \frac{1}{b^4+3} + \frac{1}{c^4+3} \geq \frac{3}{4} \text{ (доказать)}$$

Решение: Воспользуемся неравенством Седрика:*

$$\frac{a^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \frac{a_3^2}{b_3} \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{b_1 + b_2 + b_3}, \quad \frac{1}{a^4+3} + \frac{1}{b^4+3} + \frac{1}{c^4+3} \geq$$

$$\geq \frac{(1+1+1)^2}{a^4+b^4+c^4+9} = \frac{9}{a^4+b^4+c^4+9}. \text{ Пусть } \frac{9}{a^4+b^4+c^4+9} < \frac{3}{4};$$

$$36 < 3(a^4+b^4+c^4) + 27;$$

$$a^4+b^4+c^4 > 3 = a^3+b^3+c^3.$$

Упорядочим (не убывая близости, т.к. числа симметричны) данные нам числа: $a \geq b \geq c \geq 0$.

Тогда, $c \leq 1$, т.к. при $c > 1$ $a^3 \geq b^3 \geq c^3 > 1$, т.е. $a^3+b^3+c^3 > 3$,

причем при $c = 1$ $b = 1$ и $a = 1$, т.к. если $a > 1 = c$, то $a^3 > b^3 > 1$, $a^3+b^3+c^3 > 3$, если же $a = 1$, то $a^3+b^3+c^3 = a^3+b^3+1 > 3$, противоречие.

Если же $a = b = c$, то $\frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$.

Поэтому, раз $a^4+b^4+c^4 > 3$, $a \neq 1 \Rightarrow c < 1$.

$$a \leq \sqrt[3]{3} < 1.5;$$

28.

* Это возможно, т.к. все наши числа неотрицательны по условию, значит, и a^4+3 , b^4+3 , c^4+3 неотрицательны.



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А 0 0 0 2 4 9 6 4 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ: Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



1	2	3	4	5	6	Σ
15	20	x	20	0		55

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

~~$(-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20) \text{ — кат.} \Rightarrow$~~
 ~~$(-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20) \geq 1 \Rightarrow -\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n - 19 \geq 0 \Rightarrow -n^2 + 4n - 57 \geq 0$~~

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 = \frac{-n^2 + 4n + 60}{3} = -\frac{n^2 - 4n - 60}{3} = -\frac{(n+6)(n-10)}{3}$$

2) $(-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20) \text{ — кат.} \Rightarrow (-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20) > 0 \Rightarrow$

$$-\frac{(n+6)(n-10)}{3} > 0 \Rightarrow -(n+6)(n-10) > 0 \Rightarrow (n+6)(n-10) < 0$$

3) $n \text{ — кат.} \Rightarrow n > 0 \Rightarrow n+6 > 0; (n+6)(n-10) < 0 \Rightarrow n-10 < 0 \Rightarrow$

~~$n < 10$~~

4) ~~n~~ $0 < n < 10$ и n — целое (т.к. n — кат.) $\Rightarrow$ для n могут подходить только числа: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.

5) $n=1 \Rightarrow -\frac{1}{3} \cdot 1^2 + \frac{4}{3} \cdot 1 + 20 = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + 20 = 1 + 20 = 21$ — кат., подходит

$n=2 \Rightarrow -\frac{1}{3} \cdot 2^2 + \frac{4}{3} \cdot 2 + 20 = -\frac{4}{3} + \frac{8}{3} + 20 = \frac{4}{3} + 20 = (21 + \frac{1}{3})$ — не кат. $\Rightarrow$ не подходит

$n=3 \Rightarrow -\frac{1}{3} \cdot 3^2 + \frac{4}{3} \cdot 3 + 20 = -3 + 4 + 20 = 21$ — кат. $\Rightarrow$ подходит

$n=4 \Rightarrow -\frac{1}{3} \cdot 4^2 + \frac{4}{3} \cdot 4 + 20 = -\frac{16}{3} + \frac{16}{3} + 20 = 20$ — кат. $\Rightarrow$ подходит

$n=5 \Rightarrow -\frac{1}{3} \cdot 5^2 + \frac{4}{3} \cdot 5 + 20 = -\frac{25}{3} + \frac{20}{3} + 20 = -\frac{5}{3} + 20 = (19 + \frac{1}{3})$ — не кат. $\Rightarrow$ не подходит

$n=6 \Rightarrow -\frac{1}{3} \cdot 6^2 + \frac{4}{3} \cdot 6 + 20 = -12 + 8 + 20 = 16$ — кат. $\Rightarrow$ подходит

$n=7 \Rightarrow -\frac{1}{3} \cdot 7^2 + \frac{4}{3} \cdot 7 + 20 = -\frac{49}{3} + \frac{28}{3} + 20 = -\frac{21}{3} + 20 = 13$ — кат. $\Rightarrow$ подх.

$n=8 \Rightarrow -\frac{1}{3} \cdot 8^2 + \frac{4}{3} \cdot 8 + 20 = -\frac{64}{3} + \frac{32}{3} + 20 = -\frac{32}{3} + 20 = (9 + \frac{1}{3})$ — не кат. $\Rightarrow$ не подх.

(продолжение на листе 2)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 4 9 6 4 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

(продолжение задачи №2)

$$n=9 \Rightarrow -\frac{1}{3} \cdot 9^2 + \frac{4}{3} \cdot 9 + 20 =$$

$$= -27 + 12 + 20 = 5 - \text{нат.} \Rightarrow \text{подходит.}$$

Получается, подходят под n только числа 1; 3; 4; 6; 7; 9 — 6 чисел.

Ответ: 6 чисел. **20б.**

Оценка: Допустим возможно расставить ^{монеты так} ~~то~~, чтобы

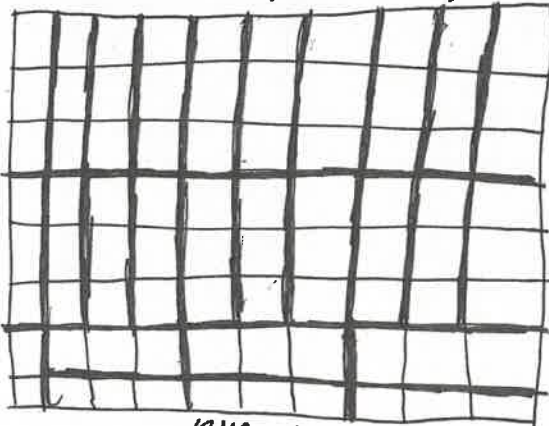


рис. 1

или в одном прямоугольнике 1×3 и 3×1 не были заняты все клетки.

Разделим доску на области как на рис. 1 слева. Тогда ~~каждой~~ каждой из 26 областей 1×3 или 3×1 не более 2-х монет и в оставшихся 2-х клетках не более 2-х монет $\Rightarrow$ всего монет не более $26 \cdot 2 + 2 = 54 \Rightarrow$ если

будет 55 монет или более, то в какой-то области 1×3 или 3×1 на рис. 1 окажется 3 монеты обязательно, т. е. эта область будет полностью занята.

Контрпример: расставим 54 в закрашенных клетках.

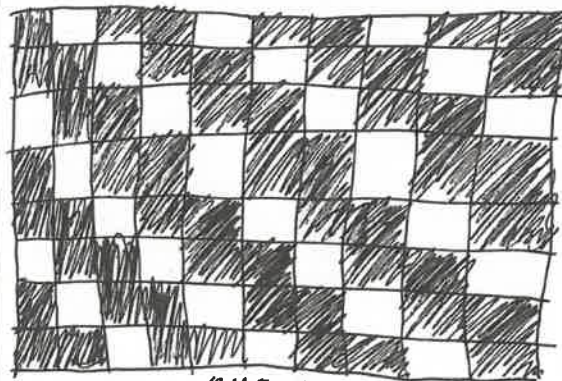


рис. 2

~~тогда не будет ни одной области 1×3 или 3×1 в которой в каждой клетке стоит монета.~~
Тогда нет ни одного упр. 1×3 или 3×1 в котором в каждой клетке стоит монета.

Получается, наиб. кол-во монет чтобы такое обязательно произошло — 55.

Ответ: 55 монет. **20б.**

ВНИМАНИЕ! Проверьте только то, что записано с этой стороны листа в ранее справа

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 7

M	A	0	0	0	2	4	9	6	4	2	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяться только то, что записано с этой стороны листа
в рамке справа

~~Максимович~~ ^{№1}

1) Пусть x — кол-во игр каждой девочки

~~Handwritten signature~~

~~Меня~~ Меля не играла с собой и с

Катей $\Rightarrow$ для меня макс. кол-во игр $- 7 - 2 = 5 \Rightarrow$

$$X \leq 5.$$

Лена ~~то~~ играла с Женей и Аней обязательно

$\Rightarrow$ для мин. мин. кол-во игр $- 2 \Rightarrow x \geq 2$.

2) Представим задачу как граф: девочки — вершины; игры — рёбра.

Каждая ~~ст~~ ~~вершина~~ степень вершины -
х и вершин всего 7 $\Rightarrow$ сумма степеней вершин - $7x$.

По лемме о рукопожатиях сумма степеней верш. — четная $\Rightarrow \sum_{i=1}^n d_i$ — четное.

Чётна $\Rightarrow 7x$ - чётно $\Rightarrow$ т. к. 7 - нечётное, то x - чёт.

Получается $2 \leq x \leq 5$ и x - чёт. $\Rightarrow$ под x подхо-
дят 2 и 4.

[Handwritten notes, mostly illegible due to extreme cursive.]

$x=2$. Пример: Маша — с Никой и Светой; Нина — с Машей и Катей;
Катя — с Никой и Светой; Света — с Катей и Машей;
Лена — с Женей и Аней; Женя — с Леной и Аней; Аня — с
Женей и Леной.

$x=4$: Пример: (обозначения: Маша-М; Нина-Н; Света-С; Катя-К; Меля-Ж; Аня-А; Лена-Л) М-с Ж, С, Н, К; К-с М, А, Л, С; Н-с М, Л, Ж, С; С-с Н, К, М, А; Ж-с Н, М, А, Л; А-с Ж, Н, К, А; А-с Л, Ж, С, К.

Ответ: 2 партии или 4 партии.

158

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	2	4	9	6	4	2	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



$\sqrt{5}$

1) $a > 0; b > 0; c > 0 \Rightarrow a^2 > 0; b^2 > 0; c^2 > 0$

2) $a^2 + b^2 + c^2 = 3 \Rightarrow a^2 = 3 - b^2 - c^2 < 3 - 0 - 0 = 3 \Rightarrow a^2 < 3$

Если $a \geq \sqrt{3} \Rightarrow a^2 \geq 3$ — противоречие $\Rightarrow a < \sqrt{3} < 1,8$

~~Аналогично~~

~~$a^2 + b^2 + c^2 = 3 \Rightarrow b^2 = 3 - a^2 - c^2 < 3 - 0 - 0 = 3 \Rightarrow b^2 < 3$~~

Аналогично $b < \sqrt{3} < 1,8; c < \sqrt{3} < 1,8$

$$\frac{a}{a+5} = \frac{a+5-5}{a+5} = 1 - \frac{5}{a+5} < 1 - \frac{5}{6,8} = \frac{1,8}{6,8} = \frac{18}{68} = \frac{9}{39}$$

Аналогично $\frac{b}{b+5} < \frac{9}{39}; \frac{c}{c+5} < \frac{9}{39}$

$$\frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} < \frac{3 \cdot 9}{39} = \frac{27}{39}$$

~~Аналогично~~

05.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 9

M	A	0	0	0	2	5	0	8	8	2	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Информация только для сотрудников с правом доступа к данной информации

42

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	0	20	x		60

Движная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 1.1.1. Если

$$n \geq 12, \text{ me } -\frac{1}{4}n^2 + 2n + 12 \leq 0 \text{ u } -\frac{1}{4}n^2 + 2n + 12 \in \mathbb{N}$$
$$\text{et } 2n + 12 \leq \frac{1}{4}n^2 \quad 8n + 48 \leq n^2 \quad n \in \mathbb{N}$$

Выяснить, имеет ли уравнение $K(x, y)$ решение из
заданного семейства $y = 3x + 49$ и $y = x^2$ при $x = 12$
 $y = 144$ ~~и $y = 200$~~ ~~иных~~ ~~точек~~ ~~функции~~ ~~Бернштейна~~

$n = 12$ $12 + 48 \leq 12^2$ $104 + 48 \leq 169$ $152 \leq 169$
 $36 + 48 \leq 144$ $114 \leq 144$

6940

Вспомогательное неравенство $8K + 48 < K^2$ - монотонно.

$$8(K+1) + 48 \leq (K+1)^2 \quad 8K + 8 + 48 \leq K^2 + 2K + 1$$

$8k + 48 \leq k^2$ в левую часть мы добавим $+8$

k правей $2k+1$ $k \geq 12 \Rightarrow 2k+1 > 25$ $25 > 8 \Rightarrow 2k+1 > 8$

Значит $n \leq 12$ и $n \equiv 0, 2 \pmod{4}$ либо $n \equiv 1, 3 \pmod{4}$

$$n^2 = 4 \Rightarrow -\frac{1}{4}n^2 \notin \mathbb{Z} \text{ u } -\frac{1}{4}n^2 + 2n + 12 \notin \mathbb{Z}$$

$$n = 2 - \frac{2^2}{4} + 2 \cdot 2 + 12 = 15 \quad 15 \in \mathbb{N}$$

$$n=4 \quad \frac{4^2}{4} + 4 \cdot 2 + 12 = 16 \in \mathbb{N}$$

$$n = 6 \cdot \frac{6^2}{2} + 6 \cdot 2 + 12 = 15 \in \mathbb{N}$$

$$11 = 8 - \frac{4 \cdot 8^2}{2} + 8 \cdot 2 + 12 = 12 \in \mathbb{N}$$

$$n = 10 - \frac{10^2}{4} + 10 \cdot 2 + 12 = 6 \in \mathbb{N}$$

Answer 5

205.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М А О О О 2 5 0 8 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Покрасить ёлочку в
заданиями в 3 цвета

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2

Клетка цвета 1 19

цвета 2 19

цвета 3 18

Прямоугольник 1x3 или 3x1
закрасить все 3 цвета

Если у нас меньше чем 39 монет то он
может покрасить монеты на клетках 1 и 2
и тогда прямоугольника не с монетами во всех
клетках не найдётся.

Если ~~каждый~~ монет 39 то тогда прямоугольник
3x3 монет не найдётся

Второй прямоугольник 3x8 не более 16 монет
если будет больше то по принципу Дирихле
в 1 столбце попадет 3 монеты и будет прямоугольник
1x3 размещено можно (клетки цвета 2 и 1 нарисованы
закрашены) Если займётся на 2 таких
прямоугольника и на полоску 1x8. В прямоуголь-
никах 3x8 не более 24 32 (Итого прямоугольников
1x3 находится) $39 - 32 = 7$ уйдёт в полоску 1x3
(или в прямоугольнике 3x8 и тогда там монеты
будут прямоугольник 1x3) в полоске 1x8
будет 2 цвета из монет в сумме длина 2
и один из них будет больше или равен 3. 208

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М А О О О 2 5 0 8 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа и рядом сирова



Если записывать игру в таблицу, то количество партий девочек "х" (Отсутствующие партии) будет четным т.к. таблица симметрична относительно главной диагонали + 7 крестов на главной диагонали. Если девочки сыграли некоторое количество партий, то крестов ~~будет~~ в каждой строке будет $7-k$ и $(7-k):2$ ~~партий~~ значит во всей таблице $2 \cdot (7-k)$ и $7(7-1):2$ что противоречит количеству крестов. Значит девочки сыграли четное число партий n . $n < 6$ т.к. Женя не играла с Катей. Остается 2 варианта: $n=4$ и $n=2$. $n=2$ не подходит т.к. Мама сыграла с Витней, а Катей и Светой. В итоге на $n=4$ ("✓" - наличие партии "х" - отсутствующие партии)

	М	Н	К	С	В	Ж	А	А
М	х	✓	✓	✓	✓	✓	х	х
Н	✓	х	✓	х	х	х	✓	✓
К	✓	✓	х	✓	✓	✓	х	х
С	✓	х	✓	х	х	х	✓	✓
В	✓	х	✓	х	х	х	✓	✓
Ж	х	✓	х	✓	✓	х	х	х
А	х	✓	х	✓	✓	✓	х	х

208.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

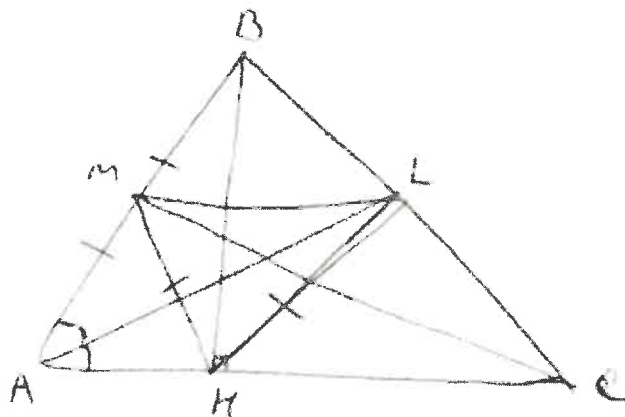
Вариант № 2

М А 0 0 0 2 5 0 8 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)



$$MH = \frac{AB}{2} \quad (\text{медiana прилежит к стороне } AB \text{ и делит ее пополам})$$

$$MH = AM = MB = NH = 1$$

$$\angle MHL = 180^\circ - \angle MHL - \angle HML = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$$

$$(\angle MLH = \angle HML = 30^\circ, MH = HL)$$

О.С.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано в этой строке, по та
и решат строго



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М А О О О 2 5 2 3 2 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



1	2	3	4	5	6	Σ
15	16	x	0	15		46

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

	1	Ж	А	К	М	Н	С
1	x	V	V				
Ж	V	x		x			
А	V		x				
К		x		x	V		
М					x	V	V
Н					V	x	
С					V		x

записи известных данных в таблицу.

Итак, если возмем количество у нас 42 (т.е. каждая девочка не могла играть сама с собой. т.е.

К и М. не ~~могут~~ играть друг с другом, $\Rightarrow$

макс кол-во сыгранных партий = $5(7-2)$ для

По условию Маша сыграла по крайней мере с 3-мя мальчиками, $\Rightarrow$

мин кол-во сыгранных партий $n = 3$ для

Каждо девочки составим систему:

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 5 \end{cases} \quad (x - \text{кол-во сыгранных партий для каждой девочки}).$$

Р-ция кол-во двусторонних партий:

$$42 - 2 = 40.$$

чтобы соблюдалось условие, нужно чтобы кол-во сыгранных партий: на 7 и на кол-во партий.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М А О О О 2 5 2 8 2 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяться только то, что записано с этой стороны листа

в рамке справа



и (прозвучи)

Но Р-милли секунд с 5-ю партиями на деб.

Если было не соот. партий = $2 \cdot 7 = 14$

$49 - 14 = 35$ $35 : 7$ и $35 : 5$, $\Rightarrow$ число 5 возможно.

Р-милли секунд с 3-ми партиями на ^{деб.}

Если было не соот. пар. = $8 \cdot 7 = 28$.

$49 - 28 = 21$ $21 : 7$ и $21 : 3 \Rightarrow$ число 3 возможно.

Р-милли секунд с 4-мя партиями на деб., если было не соот. пар. = $3 \cdot 7 = 21$

$49 - 21 = 28$ $28 : 7$ и $28 : 4$, $\Rightarrow$ число 4 возможно.

~~Значит 3, 4, 5~~ так как у нас есть

3, 4 и 5. Но если бы партий

было больше, т.е. они

считались 2 раза (или больше)

(как Ю и Катя играют с мамой, это

1 партия но считается 2 раза)

иногда не одно число, а несколько.

Значит.

Ответ: 4.

158

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М А 0 0 0 2 5 2 9 2 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



~~$$x^2 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 20$$~~

~~$$- \frac{1}{3}x^2 + 4\left(\frac{1}{3}x + 5\right)$$~~

№ 2. Тригонометрия $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 20$ и выше

$$\frac{1}{3}(-x^2 + 4x) + 20$$

выполнение условия:

$$\begin{cases} -x^2 + 4x \geq -20 \\ -x^2 + 4x \leq 3 \end{cases}$$

Найдем макс x условия
этого условия.

$$\begin{cases} -100 + 40 = -60 \\ \frac{-60}{-3} = -20 \\ -20 + 20 = 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [1; 10]$$

То есть, обобщаясь можно, что
если x и y — числа
были 1000000000.

Итак, можно: $x \cdot x + x \cdot z \cdot x + \Gamma$

$$(x \cdot x + \Gamma) - (z \cdot x + \Gamma) = (x - z) \cdot x, \text{ что}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М А О О О 2 5 2 9 2 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



$n=2$ (предполож.) остается 1 шт; из этого 1 шт. аналог. при $\frac{4}{3}$ еще есть 1, но тогда остается, ~~еще~~, что не может быть. Значит, $n=2$ не подходит. Тогда получим, что есть еще одна $n=3$ $\frac{4}{3} = 1$ и еще 0.

Докажем: пусть $n=2$, тогда есть еще $3=2$.

$n=4$ есть еще одна $3=1$, но т.е. есть периметром. то получим, что

$-\frac{1}{3} \cdot 4 - \frac{4}{3} \cdot 2 = -\frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$, то и найдем все ранее числа: ~~4, 3, 4~~; ~~6, 7, 8~~; от 1 до 9: 1, 3, 4, 6, 7, 8.

Проверим: ~~$n=1$~~ ~~(1^2+4n)~~

$n=1$	$-1+4=-3 \checkmark$	$-\frac{3}{3}=-1$
$n=3$	$-9+12=-3 \checkmark$	$-\frac{3}{3}=-1$
$n=4$	$-16+16=0 \checkmark$	$\frac{0}{3}=0$
$n=6$	$-36+24=-12 \checkmark$	$-\frac{12}{3}=-4$
$n=7$	$-49+28=-21 \checkmark$	$-\frac{21}{3}=-7$
$n=9$	$-81+36=-45 \checkmark$	$-\frac{45}{3}=-15$

тогда в скобках.

ответ: 6.

168.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М А О О О 2 5 2 8 2 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

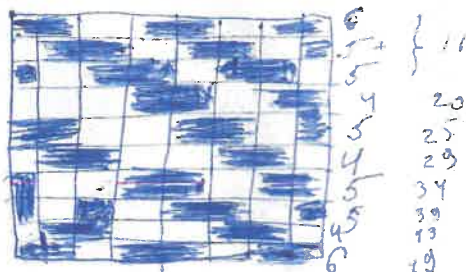
1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



М 4



ответ: 50.

Кругом сгруппировать сумму невозможную
расстановку и она будет вычитаться
как. Сумма 49 записанных ответов и
ответом получится 11 или 12 кругом 50
ответ: 50.

О.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М А О О О 2 5 2 9 2 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



$$\sqrt{a+5} + \sqrt{b+5} + \sqrt{c+5} =$$

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$= \frac{a+5-5}{a+5} + \frac{b+5-5}{b+5} + \frac{c+5-5}{c+5} = 3 - 5 \left(\frac{1}{a+5} + \frac{1}{b+5} + \frac{1}{c+5} \right)$$

$$- 5 \left(\frac{1}{a+5} + \frac{1}{b+5} + \frac{1}{c+5} \right) \leq \left(-3 + \frac{1}{2} \right)$$

По диммуса: $\frac{1}{a+5} + \frac{1}{b+5} + \frac{1}{c+5} \geq \frac{1}{2}$

Неравенство Коши - Бунковского

~~$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$~~

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{a+5}} \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{b+5}} \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{c+5}}$$

$$y_1 = \sqrt{a+5} \quad y_2 = \sqrt{b+5} \quad y_3 = \sqrt{c+5}$$

Неравенство Коши - Бунковского

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$$

Подставим: $x_1 y_1 = \frac{1}{\sqrt{a+5}} \cdot \sqrt{a+5} = 1$

$$x_2 y_2 = \frac{1}{\sqrt{b+5}} \cdot \sqrt{b+5} = 1$$

$$x_3 y_3 = \frac{1}{\sqrt{c+5}} \cdot \sqrt{c+5} = 1$$

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$x_1^2 = \frac{1}{a+5} \quad (\text{аналог для } b, c)$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

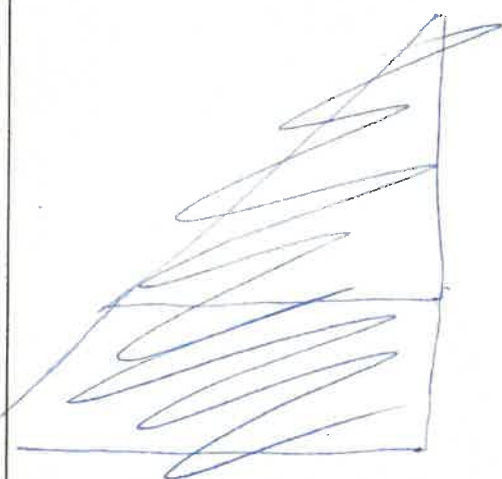
М А О О О 2 5 2 3 2 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



15 (предположение)

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \frac{1}{a+5} + \frac{1}{b+5} + \frac{1}{c+5}$$

$y_1 = a+5$ (аналогично для b, c)

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = a+5 + b+5 + c+5 = a+b+c+15$$

Положим в неравенство

$$3^2 \leq \left(\frac{1}{a+5} + \frac{1}{b+5} + \frac{1}{c+5} \right) (a+b+c+15)$$

$$9 \leq \left(\frac{1}{a+5} + \frac{1}{b+5} + \frac{1}{c+5} \right) (a+b+c+15) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{a+5} + \frac{1}{b+5} + \frac{1}{c+5} \geq \frac{9}{a+b+c+15}$$

т.ч. $a^2 + b^2 + c^2 = 5$

что за неравенство?

$$a+b+c \leq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} = \sqrt{3 \cdot 5} = 3$$

$$\frac{1}{a+5} + \frac{1}{b+5} + \frac{1}{c+5} \geq \frac{9}{a+b+c+15} \geq \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

т.ч. г.

158.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 5 3 6 9 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
16	16	×	12	0		44

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



М с Н, К, Л, А, С. ^{№1}

А с В и Ж.

Если каждая девочка участвовала в одинаковом числе переписок, то каждая девочка участв. в 5 или 6 или 7 или 8 переписках, т.к. нам известно, что Маша переписывалась с уже 5 девочками

Если в 5 переп.: всего - $\frac{5 \cdot 9}{2} = 22,5$ - нецелое

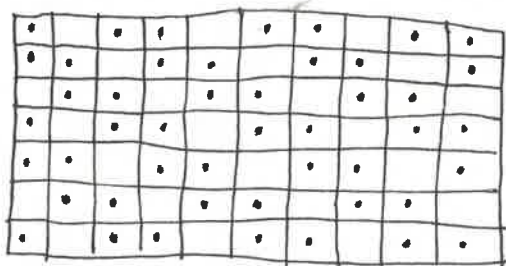
Если в 6 переп.: всего - $\frac{6 \cdot 9}{2} = 27$ - целое (подходит)

Если в 7 переп.: всего - $\frac{7 \cdot 9}{2} = 31,5$ - нецелое

Если в 8 переп.: всего - $\frac{8 \cdot 9}{2} = 36$ - целое (подходит)

Ответ: 27; 36 переписок 165.

Вот пример лая где в каждом прямоугольнике 1 на 3 лежит 2 монетки: ^{№2}



тут всего $5 \cdot 7 + 4 \cdot 3 = 35 + 12 = 47$ монет, значит мин. кол-во монеток, чтобы хотя бы в 1 прямоу. было 1 на 3 было 3 монеты равно $47 + 1 = 48$ монет

Ответ: 48 монет. 128.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 5 3 6 9 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



N2

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 > 0$$

$$\frac{1}{5}n(6-n) + 11 > 0$$

$$\frac{1}{5}n(6-n) > -11$$

Если $n=1$ ~~ошибка~~ $\frac{1}{5} \cdot 5 = 1 > -11 \checkmark$

...

Если $n=10$ $-4 \cdot 2 = -8 > -11 \checkmark$

Если $n=11$ $-5 \cdot (\frac{1}{5} \cdot 11) = -11 \not> -11 \times$

$\Rightarrow$ Чтобы результат был > 0 , то $n \in [1; 10]$

Рассмотрим все 10 случаев:

Если $n=1$: $\frac{1}{5} \cdot 5 + 11 = 12 \checkmark (\in \mathbb{N})$

Если $n=2$: $\frac{2}{5} \cdot 4 + 11 = 12,6 \times (\notin \mathbb{N})$

Если $n=3$: $\frac{3}{5} \cdot 3 + 11 = 12,8 \times$

Если $n=4$: $\frac{4}{5} \cdot 2 + 11 = 12,6 \times$

Если $n=5$: $1 \cdot 1 + 11 = 12 \checkmark$

Если $n=6$: $\frac{6}{5} \cdot 0 + 11 = 11 \checkmark$

Если $n=7$: $\frac{7}{5} \cdot (-1) + 11 = 9,6 \times$

Если $n=8$: $\frac{8}{5} \cdot (-2) + 11 = 7,8 \times$

Если $n=9$: $\frac{9}{5} \cdot (-3) + 11 = 5,6 \times$

Если $n=10$: $2 \cdot (-4) + 11 = 3 \checkmark$

Всего подходит 4 случая $n=1; n=5; n=6; n=10$.

Ответ: 4

165.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 5 3 6 9 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

самая "невыгодная" ситуация, когда ¹⁵ $a=b=c=1$, тогда

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \geq \frac{3}{4} \checkmark$$

Ответ: Доказано 05.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 5 4 5 6 2 6

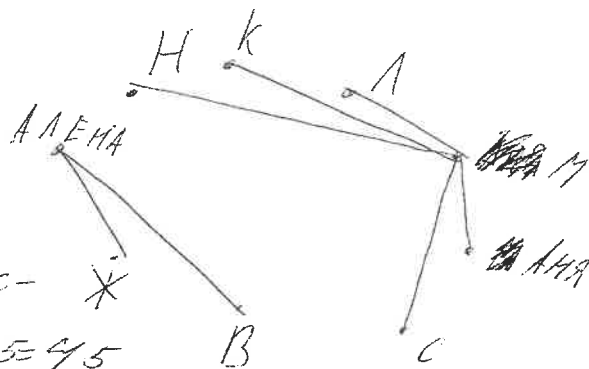
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	18	x	12	0		50

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Поскольку Маша переписывалась с не менее чем с 5 девочками, то количество переписок для каждой из них не может быть меньше 5.



Если каждая девочка участвует в 5 переписках, то всего будет $9 \cdot 5 = 45$ переписок. Но каждое ребро соответствует двум перепискам, значит, число переписок должно быть четным. Поэтому тогда каждая девочка участвовала в 6 переписках.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А 0 0 0 2 5 4 5 6 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в ранее справа



	Ника 1	Катя 2	Лена 3	Дня 4	Маша 5	Света 6	Варя 7	Киря 8	Аня 9
1			+	+	1	+	+	+	
2				+	1	+	+	+	+
3	+				1	+	+	+	+
4	+	+			1		+	+	+
5	1	1	1	1					+
6	+	+	+		1			+	1
7	+	+	+	+				+	1
8	+	+	+	+		+	1		
9		+	+	+	+	1	1	1	

Возможен также вариант, что перериску были все девочки между собой, то есть каждая перерисовалась с 8 девочками. В условии сказано, что перерисовались некоторые. Если это означало, что каждая с каждой не могла перерисовываться, то остался вариант с единственным вариантом.

В случае, если каждая девочка была в перериске, то всего перерисок было $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № _____

М А 0 0 0 2 5 4 5 6 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Если переписка велась между каждой звонкой парой звонков, то переписок было

$$\frac{8 \cdot 9}{2} = 36$$

208.

Ответ: 27; 36

N 2

$$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{6}{5}x + 11$$

Рассмотрим функцию $y(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{6}{5}x + 11$.

Ее графиком является парабола ветвями вниз. Найдем ее корни.

$$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{6}{5}x + 11 = 0$$

$$D = \frac{36}{25} + \frac{6}{5} \cdot 11 = \frac{36}{25} + \frac{40}{5} = \frac{36 + 200}{25} = \frac{236}{25}$$

$$x_1 = \frac{-\frac{6}{5} + \frac{16}{5}}{-\frac{2}{5}} = \frac{-6 + 16}{-2} = -5 \quad x_2 = \frac{-\frac{6}{5} - \frac{16}{5}}{-\frac{2}{5}} = -11$$

Значит только при $x \in (-5; 11)$ $y(x)$ положительна и может принимать натуральные значения. Когда следует рассмотреть возможные натуральные

$1 \leq n \leq 10$, при остальных натуральных n результатом будет не натуральное.

$$n=1: -\frac{1}{2} + \frac{6}{5} + 11 = 12 \in \mathbb{N}$$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в разное время



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № _____

М А О О О 2 5 4 5 6 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$n=2: -\frac{4}{5} + \frac{12}{5} + 11 = 14 + \frac{8}{5} \notin \mathbb{N}$$

$$n=3: -\frac{9}{5} + \frac{18}{5} + 11 = \frac{9}{5} + 11 \notin \mathbb{N}$$

$$n=4: -\frac{16}{5} + \frac{24}{5} + 11 = \frac{8}{5} + 11 \notin \mathbb{N}$$

$$n=5: -\frac{25}{5} + 6 + 11 = 12 \in \mathbb{N}$$

$$n=6: -\frac{36}{5} + \frac{36}{5} + 11 = 11 \in \mathbb{N}$$

$$n=7: -\frac{49}{5} + \frac{42}{5} + 11 = -\frac{7}{5} + 11 \notin \mathbb{N}$$

$$n=8: -\frac{64}{5} + \frac{48}{5} = -\frac{16}{5} + 11 \notin \mathbb{N}$$

$$n=9: -\frac{81}{5} + \frac{54}{5} + 11 = -\frac{27}{5} + 11 \notin \mathbb{N}$$

$$n=10: -20 + 12 + 11 = 3 \in \mathbb{N}$$

Значит, натуральный результат получится при $n = 5, 6, 10$. Всего 4 значения

Ответ: 4 188.

н4

Всего на доске 70 клеток.

Если у Вовы 41 или меньше монет, то он всегда может их разложить так,



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № _____

М А О О О 2 5 4 5 6 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

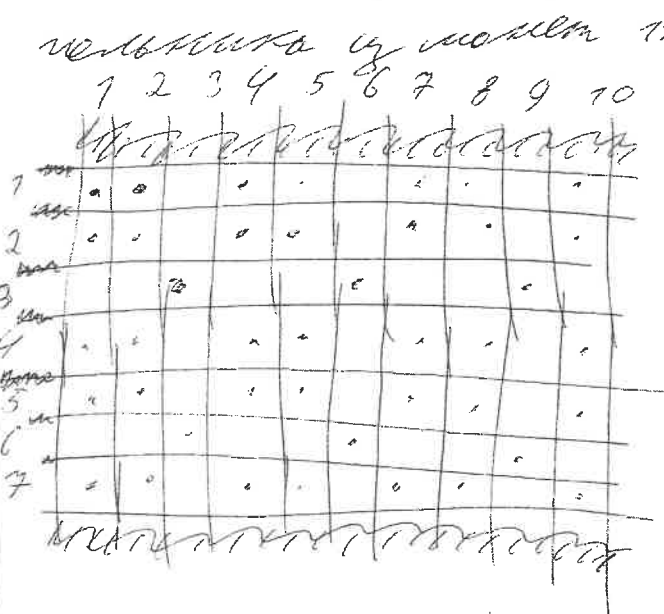
1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



чтобы не занимать клетки, соседние по сторонам (например как на шахматной доске только в черные клетки). То есть, как можно разложить 41 монету без образования приращиваемых из монет 1+3 или 3+1;



Ответ 42

продолжи
разме

N5

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3$$

$$\frac{1}{a^2+3} + \frac{1}{b^2+3} + \frac{1}{c^2+3} \geq \frac{3}{4}$$

Известно, что $\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}} = 1$, тогда $a+b+c \leq 3$

$a^4+3 = a^4+1+1+1 \geq a^4 \sqrt[4]{4} = 4a$, аналогично $b^4+3 \geq 4b$

среднее
квадратическое? $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № _____

М А О О О 2 5 4 5 6 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$c^4 + 3 \geq 4c$$

Тогда:

$$\frac{1}{a^4+3} + \frac{1}{b^4+3} + \frac{1}{c^4+3} \leq \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c}$$

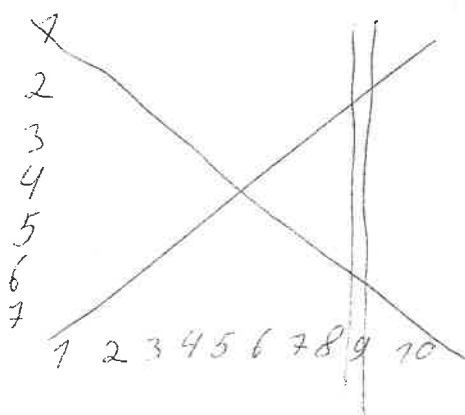
Воспользуемся КБЛШ для оценок

$$\frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c} \geq \frac{9}{4(a+b+c)} \geq \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

≤ 3
нч

ч.т.в. ОБ.

Предложить диагональную раскраску доски следующего образца:



2	1	2	7	3	2	7	3	2	7	3	2
7	2	7	3	2	7	3	2	7	3	2	7
3	3	3	2	7	3	2	7	3	2	7	3
2	4	2	7	3	2	7	3	2	7	3	2
7	5	7	3	2	7	3	2	7	3	2	7
3	6	3	2	7	3	2	7	3	2	7	3
2	7	2	7	3	2	7	3	2	7	3	2
3 2 7 3 2 7 3 2 7 3 2 7											
7 7 6 5 4 3 2 1											

свем
каб-ка

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № _____

М А О О О 2 5 4 5 6 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Клеток цвета:

$$1. 7 + 6 + 3 + 5 + 2 = 23$$

$$2. 7 + 4 + 7 + 7 + 4 + 7 = 24$$

$$3. 3 + 6 + 7 + 5 + 2 = 23$$

Заметим, что в каждой строке

$7 + 3$ или $3 + 7$ входит по 1 клетке
каждого цвета (1, 2, 3). Тогда можно
разместить на доске монеты во

всех клетках цветов 7 и 2 и не класть
в клетки цвета 3, тогда ни один
прямоугольник не будет собран.
Тогда на доске будет $23 + 24 = 47$ монет.

Добавив хотя бы еще 1 монету
мы соберем прямоугольник

Ответ: ~~48~~ 48

128.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа
в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 5 5 1 9 2 6

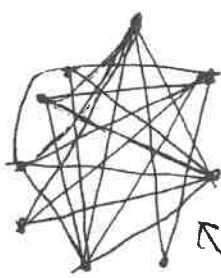
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
18	20	0	10			48

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача №1

Если известно, что каждая из девочек переписывалась с одинаковым кол-вом других девочек. Можно представить каждую девочку как вершину графа, а каждую переписку - ребром. Известно, что Маша переписывалась как минимум с 5-ыми подругами. Но при этом равно с 5 она не может переписываться, ведь по теории графов $\text{кол-во ребер} = \frac{\text{вер. ребер} \times 2}{2} = 22,5$ ребра, чего быть не может. Аналогичная ситуация для 7 ребер. Значит кол-во ребер либо 6 либо 8. Для 8 пример легко построить (все со всеми). А для 6 можно попробовать нарисовать полный граф и убрать ребра из которых ~~получится~~ образуют 9-ти угольник.



← граф для 6



А где какие девочки?

← убранные ребра для 6

Ответ: 6 или 8

188.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 5 5 1 9 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача №2

Ослабили условие. Рассмотрим случай вы-
ше, где $-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 > 0$

$$\text{н.р. } -\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = 0$$

$$-0,2n^2 + 1,2n + 11 = 0$$

$$(n+5)(n-11) = 0$$

$$n = -5$$

$$n = 11$$

построим параболу

Нас интересуют толь-
ко $y > 0 \Rightarrow$

$-5 < n < 11$ и при этом
 n - натуральный $\Rightarrow$

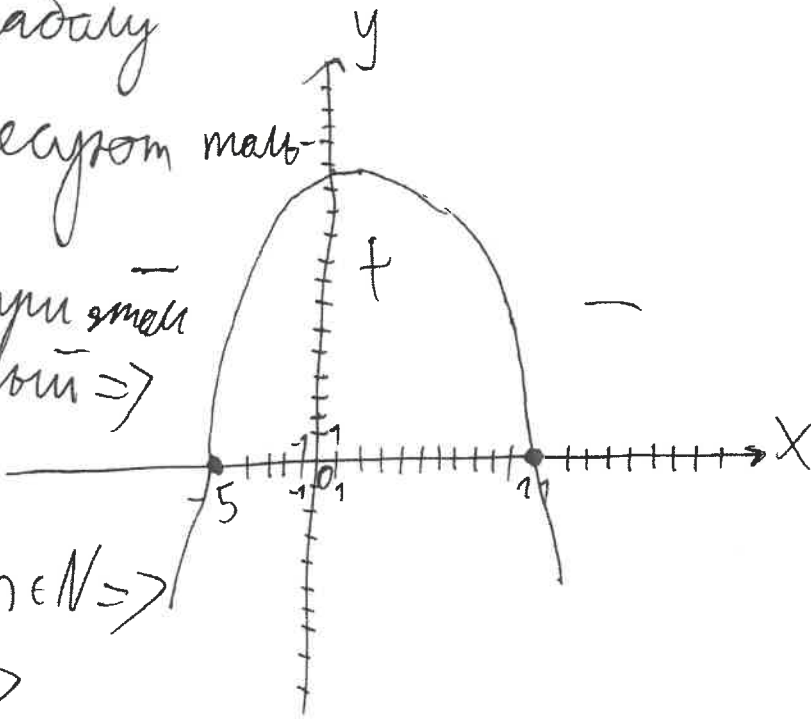
$$0 < n < 11$$

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\left(-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n\right) \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{5}n(n-6) \in \mathbb{N} \Rightarrow n:5 \text{ или } (n-6):5 \text{ в диапазоне}$$

от ~~1 до 10~~ нам подходит 1, 5, 6, 10
ответ: 4 числа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 5 5 1 9 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание № 4

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Нам нужна такая раскраска, чтобы ^{детали 1*3} ~~детали 1*3~~ всегда лежала на клетках 1, 2, 3. Пример: (рис. 1)

У нас получится

$$\begin{array}{r} 24 - "1" \\ + 23 - "2" \\ + 22 - "3" \\ \hline 69 \end{array} \Rightarrow$$

если он возьмет 47 монеток, то он сможет разместить их так, чтобы не было $1*3 \Rightarrow$ у него как минимум 48 монеток

1	2	3	1	2	3	1
3	1	2	3	1	2	3
2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1
3	1	2	3	1	2	3
2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1
3	1	2	3	1	2	3
2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1

рис. 1

Ответ: 48 монеток

105.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	О	О	О	2	5	5	1	9	2	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача №3

Продли медиану на
своей длины

т.к. $BM = MA$
 $CM = MC_1$

$\Rightarrow BCAC_1$ —
пар./м $\Rightarrow CA = BC_1$; B
 $CA \parallel BC_1$; $AC_1 = CB$; $AC_1 \parallel CB$
 $\angle C = \angle C_1$; $\angle A = \angle B$

проведи высоту AN_1 на BC_1
т.к. $CA \parallel BC_1$

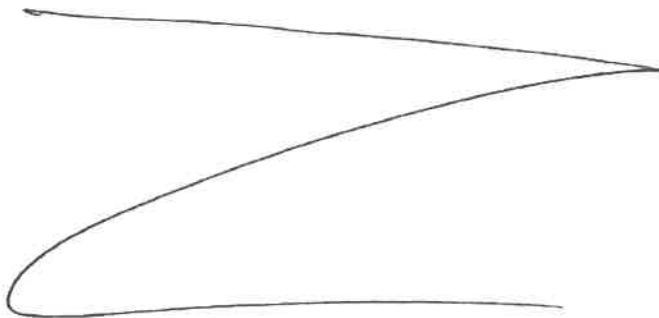
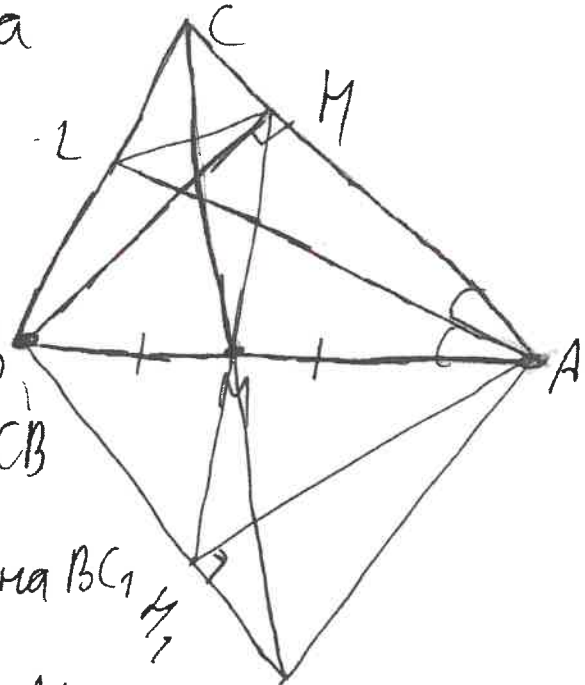
BN_1, AN_1 — высоты $\Rightarrow BN_1 \perp AN_1$ — прямо C_1

углы $\Rightarrow MN_1 = AB \Rightarrow MM + MN_1 = BM + MA$

$MM = MN_1$ (симмет.) $= 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow BM = MA = 12$

ОД.



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № _____

М 1 0 0 0 2 5 6 1 1 2 6

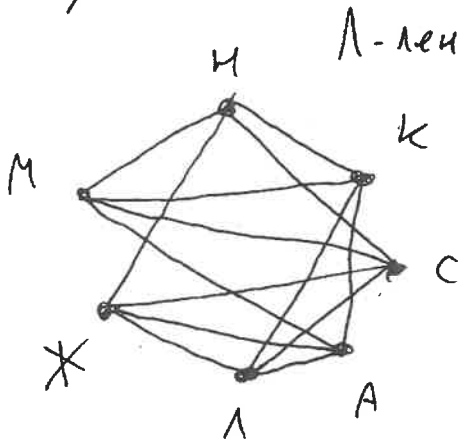
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
18	15	x	0	18		51

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

заметила что ~~мама~~ ~~мама~~
 мама уже играла ~~минимум~~ с тремя
 девочками, ~~и~~ пусть тогда все
 игроки по 3 раза но такое быть
 не может по лемме о рукопожатиях
 значит все игроки минимум 4 партнеры
 пример М - маша И - ирина К - катя С - света



значит что
 девочки играли
 партиями

А почему не больше 4?

185.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа
 в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № _____

М А О О О 2 5 6 1 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N2

Пусть выражение $-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20$ будет равняться какому то натуральному k

тогда $-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 = k$ значит

$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 - k = 0$ мы получили квадратный трёхчлен рассмотрим два случая, первый

когда дискриминант равен 0

тогда $\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{3}\right)(20-k) = 0$ $\frac{256-4k}{9} = 0$ $256 = 12k$, k - не целое, вариант не подходит.

тогда $n = \frac{-\frac{4}{3}}{-\frac{2}{3}} = 2$

~~Второй случай когда дискриминант больше нуля тогда у нас 2 корня тогда по теореме Виета $n_1 + n_2 = -\frac{4}{-3} = \frac{4}{3}$~~

~~Получили n это натуральное число так как n из второй суммы~~

добавим $-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 - k = 0$ умножим на

-3 тогда $n^2 - 4n - 60 + 3k = 0$

$D = 16 - 4(3k - 60) \geq 0$ значит

~~$3k - 60 < 4$
 $3k < 64$
 $k < 21$~~



Вариант № _____

И А 0 0 0 2 5 6 1 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N2 продолжение

что бы n было натуральным дискриминант
должен быть ~~равен~~ квадратом натурального
числа

тоже возможно только при

~~$k=20$~~ $k=21$ $k=13$ ~~$k=14$~~
 ~~$k=17$~~ $k=20$

~~$k=17$~~ $k=16$
 ~~$k=18$~~ $k=5$

при $k=21$

$$D = 16 - 4(13) = 16 - 12 = 4$$

$$h_1 = \frac{4+2}{2} = 3$$

$$h_2 = \frac{4-2}{2} = 1$$

натуральное

при $k=20$

$$D = 16 - 4 \cdot 0 = 16$$

$$h_1 = \frac{4+4}{2} = 4$$

$$h_2 = \frac{4-4}{2} = 0$$

натуральное

Ответ: ~~7~~

при $k=16$

$$D = 16 - 4(-12) = 64$$

$$h_1 = \frac{4+8}{2} = 6$$

$$h_2 = \frac{4-8}{2} = -2$$

h_2 не подходит т.к. не натуральное

~~и не подходит т.к. не натуральное~~

при $k=13$

$$D = 16 - 4(-21) = 100$$

$$h_1 = \frac{4+10}{2} = 7$$

$$h_2 = \frac{4-10}{2} = -3$$

h_2 не подходит

при $k=5$

$$D = 16 - 4(-45) = 196$$

$$h_1 = \frac{4+14}{2} = 9$$

$$h_2 = \frac{4-14}{2} = -5$$

h_2 не подходит

h_2 не подходит т.к. не

подходят $n=2$ $n=1$ $n=3$ $n=4$
 $n=6$ $n=9$ $n=7$

158



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № _____

14 А 000 256 1 1 26

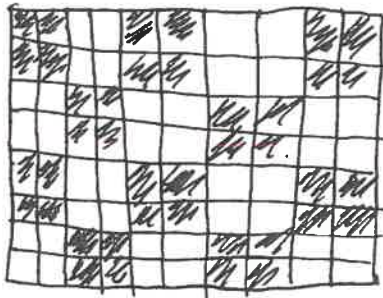
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№

давайте рассмотрим нашу доску в
"белую" шахматную раскраску



Во все периметры квадрата
из белых клеток
шаха

если мы наложим 41
линей то у нас
найдется прямоугольник
1x3 или 3x1 т.е. будет
заполнено белые половины
доски и у нас найдутся
клетки обоих цветов,

05.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа
в рамке справа



Вариант № _____

Н А О О О 2 5 6 1 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N5

добавьте умножим обе части нашего
неравенства на $2(a+5)(b+5)(c+5)$

получим

$$6abc + 20ab + 20ac + 20bc + 50a + 50b + 50c$$

ИЛИ

$$abc + 5ab + 5ac + 5bc + 25a + 25b + 25c + 125$$

после сокращения остаётся

$$5abc + 15ab + 15ac + 15bc + 25a + 25b + 25c$$

ИЛИ
125

делим обе части на 5

$$abc + 3(ab+ac+bc) + 5(a+b+c)$$

ИЛИ
25

замечим что $ab+ac+bc \leq a^2+b^2+c^2=3$

по неравенству о средних. *по какому именно? не очевидно.*

также рассмотрим на выражение $(a+b+c)^2$ оно равно $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac) \leq$

$$\leq a^2+b^2+c^2+2(a^2+b^2+c^2) = 9 \text{ значит } (a+b+c) \leq \sqrt{9} = 3$$



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № _____

Н А О О О 2 5 6 1 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5 продолжение (1)

тогда

$$abc + 3(ab + bc + ac) + 5(a + b + c)$$

И

$$abc + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 3 = abc + 24$$

докажем что $abc \leq 1$
 устроим a, b, c не учитывая общности случаев $a \geq b \geq c$
 пусть $a + b = X$ тогда давай

возьмем новые числа a', b' такие что
 $a' + b' = a + b$ и $a' \geq b' > b$

тогда ~~получим произведение~~
 ~~$a'b' > ab$~~ пусть $a' = a - k$ тогда $b' = b + k$

$$\text{тогда } a'b' = (a - k)(b + k) = ab + ak - bk - k^2$$

заметим что $ak > bk + k^2$ потому что
 $ak > k(b + k) \Rightarrow ak > kb' \Rightarrow a > b'$ что

верно значит $a'b'$ больше чем ab

таким образом чем больше мы
 "сдвигаем" числа тем больше произве-
 дение значит максимальное произведение
 будет когда $a = b = \frac{X}{2}$ $ab = \frac{X^2}{4}$ таким же
 образом abc будет наибольшим когда $\frac{X^2}{4} = c$
 из неравенства $a + b + c \leq 3$ следует

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № _____

М А О О О 2 5 6 1 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

15 приращение (2)

следует что

$$c \geq 3 - a - b$$

максимальное

значение которое может принимать

c это $3 - (a + b)$ или $3 - x$ тогда

$$\frac{x^2}{4} = 3 - x$$

$$x^2 = 12 - 4x$$

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -6$$

x не может быть отрицательным числом

$$x = 2$$

значит ~~а+b+c~~ abc будет максимальным при $a = b = c = 1$ то есть максимум $abc = 1$

тогда

$$abc + 3(ab + bc + ac) + 5(a + b + c)$$

$$1 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 3$$

25

доказано

188.



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 5 6 1 9 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача № 2

$$11 + \frac{6}{5}n - \frac{1}{5}n^2 \in \mathbb{N}$$

1	2	3	4	5	6	Σ
16	10	0	20	2		48

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$11 + \frac{6n - n^2}{5} \in \mathbb{N}, \Rightarrow \frac{6n - n^2}{5} \in \mathbb{Z}, \text{ т.к.}$$

$$\text{если } \frac{6n - n^2}{5} \notin \mathbb{Z}, \Rightarrow 11 + \frac{6n - n^2}{5} \notin \mathbb{Z}, \Rightarrow$$

$$11 + \frac{6n - n^2}{5} \notin \mathbb{N}. \text{ Тогда также } -10 \leq \frac{6n - n^2}{5},$$

$$\text{т.к. если } \frac{6n - n^2}{5} \leq -11, \Rightarrow 11 + \frac{6n - n^2}{5} \leq 0, \text{ против.}$$

Тогда:

$$\frac{6n - n^2}{5} = a;$$

$$6n - n^2 = 5a$$

$$n(6 - n) = 5a, \text{ тогда либо } n : 5 \text{ и } 6 - n : 5. \text{ Также если } n \geq 8, \text{ то } n(6 - n) \leq -16,$$

$$\text{т.к. } n \geq 8 \text{ и } 6 - n \leq -2, \text{ значит:}$$

$$\left[\begin{array}{l} n = 5 \\ 6 - n = 5 \end{array} \right]$$

$$6 - n \neq 10 \text{ и больше, т.к. тогда } n \notin \mathbb{N}$$

$$6 - n \neq -5 \text{ и меньше, т.к.}$$

$$n \text{ тогда } n \geq 9, \text{ против.}$$

Значит n либо 5, либо 1

При $n = 5$

$$11 + \frac{6}{5} \cdot 5 - \frac{1}{5} \cdot 25 = 11 + 6 - 5 = 12$$

При $n = 1$

$$11 + \frac{6}{5} \cdot 1 - \frac{1}{5} \cdot 1 = 11 + \frac{5}{5} = 11 + 1 = 12$$

Ответ: $\{1; 5\}$

105.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 5 6 1 9 2 В

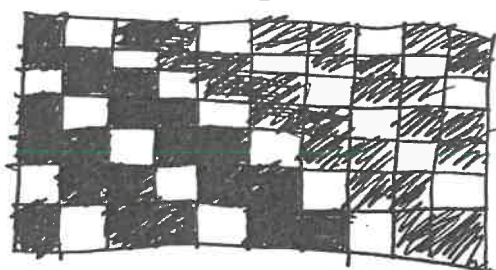
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача № 4

Ответ: 48

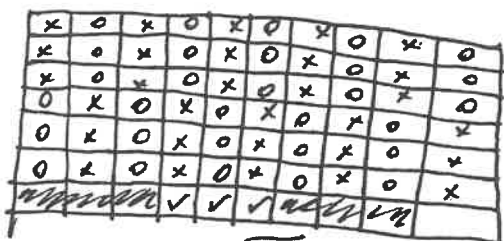
Оценка:

Допустим у нас есть 47 монет, тогда



при такой расстановки 47 монет у нас не найдется фигура 3×1 , состоящая из 3 монет, $\Rightarrow$ при 47 такая расстановка есть. Если монет меньше 47 можно убавить из этой расстановки несколько монет, тогда всё равно не найдётся такой 1×3

Почему нет расстановки при 48 монет?



Разобьём на 7×10 на 23 прямоугольника 1×3 и 1 клетка. Тогда макс. кол-во клеток, которое

может быть:

$23 \cdot 2 + 1 = 47$, т.к. в каждом прямоугольнике 1×3 макс. 2 монеты, $\Rightarrow$ такой расстановки нет

208.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 5 6 1 9 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача № 1

Представим в виде графа,

где девочки - это вершины, а переписки - рёбра.

Заметим, что по условию у всех девочек степень вершины одинакова. Т.к. всего девочек 9, то ~~ст~~ степень вершины у девочек не может быть нечётной, т.к. по лемме о рукопожатий кол-во чётных вершин чётно. У Маши кол-во рёбер минимум 5, $\Rightarrow$ есть 2 вар.

1 вар.) $S=6$, тогда кол-во переписок:

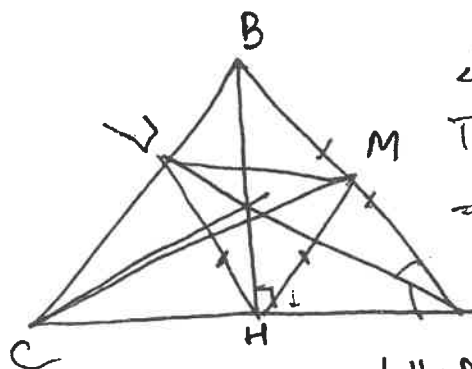
$$\frac{6 \cdot 9}{2} = 27$$

2 вар.) $S=8$, $\Rightarrow$ кол-во переписок:

$$\frac{8 \cdot 9}{2} = 36$$

О+вет: 27, 36

Задача № 3



$$LN = AM = BM$$

$$MN = LN = 12, \Rightarrow \triangle MNL \text{ - р.б.}$$

$$\angle LMN = \angle NML = 30^\circ, \Rightarrow \angle LNM = 120^\circ$$

Также в $\triangle BNA$ NM - медиана,

$$\Rightarrow NM = BM = AM = 12. \text{ Тогда}$$

$$BN \cdot AC \cdot \frac{1}{2} = AB \cdot hc \cdot \frac{1}{2}$$

$$BN \cdot AC = 24 hc$$

О.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

МАООО2561926

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача № 5

По неравенству Седра

Кяна:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + \dots + b_n}$$

Значит

$$\frac{1}{a^4+3} + \frac{1}{b^4+3} + \frac{1}{c^4+3} \geq \frac{3^2}{9+a^4+b^4+c^4} = \frac{9}{9+a^4+b^4+c^4}$$

Тогда т.к. $a^3, b^3, c^3 \Rightarrow a^3+b^3+c^3 \geq a^4+b^4+c^4 \Rightarrow$

$$\frac{9}{9+a^4+b^4+c^4} \geq \frac{9}{9+a^3+b^3+c^3} = \frac{9}{3+9} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

т.е.

$$\frac{1}{a^3+4} + \frac{1}{b^3+4} + \frac{1}{c^3+4} \geq \frac{3}{4}$$

25.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 5 7 4 4 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	5	0	20	X		45

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

$n \in \mathbb{N}$

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 \in \mathbb{N}$$

сравно существует ли таких n ?

① м.к. $11 \notin \mathbb{N}$ и $-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 \in \mathbb{N} \Rightarrow -\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 - 11 \in \mathbb{N} \Rightarrow$
 $-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n \in \mathbb{N}$

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n \in \mathbb{N}$$

② ~~Рассуждения~~ $\frac{1}{5}n$ за скобками:

$$\frac{1}{5}(6n - n^2) \in \mathbb{N}$$

$\frac{6n - n^2}{5} \in \mathbb{N} \Rightarrow 6n - n^2 : 5$ м.к. из I $\Rightarrow$

что $5x = 6n - n^2$, где $x \in \mathbb{N}$

③ Имеем $n < 6$, или $6n - n^2 = 6y - y^2 = y(6 - y)$ где
 $y > 6 \Rightarrow 6y - y^2 < 0 \Rightarrow \frac{6n - n^2}{5} < 0 \Rightarrow$ Противоречие

I. $n < 6$ все осн. варианты для $n < 6$

④ переберем все осн. варианты для $n < 6$

$n = 6$: $6 \cdot 6 - 6^2 = 0$, но $\frac{0}{5} \notin \mathbb{N} \rightarrow \times$

$n = 5$: $6 \cdot 5 - 5^2 = 5$, $\frac{5}{5} \in \mathbb{N} \rightarrow \checkmark$

$n = 4$: $6 \cdot 4 - 4^2 = 8$, $\frac{8}{5} \notin \mathbb{N} \rightarrow \times$

$n = 3$: $6 \cdot 3 - 3^2 = 9$, $\frac{9}{5} \notin \mathbb{N} \rightarrow \times$

$n = 2$: $6 \cdot 2 - 2^2 = 8$, $\frac{8}{5} \notin \mathbb{N} \rightarrow \times$

$n = 1$: $6 \cdot 1 - 1^2 = 5$, $\frac{5}{5} \in \mathbb{N} \rightarrow \checkmark$

то ⑤ из 4 возможных значений n только 2 значения числа n -

$n = 1$ и $n = 5$

Ответ: 2 числа

58

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 5 7 4 4 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

① Интерпретируя условие задачи

в графе:

- ~~степень~~ вершины - девочки

- ребра - переписки

② М.Ф. мама переписывалась ~~мной~~ с 5 девочками, и М.Ф. все степени вершин равны по условию $\Rightarrow$ максимальная степень вершин

$= 5$

③ максимальная степень вершины - 8. Значит, что количество ребер $= \frac{1}{2}$ суммы степеней вершин делится на 2, то м.ф. от 5 до 8 есть

варианты степени вершин 5 и 7, но $\frac{5 \cdot 9}{2}$ и $\frac{7 \cdot 9}{2}$ - не целые, но ребер должно быть целое

количество $\Rightarrow$ варианты со степенью вершин 5 и 7 не подходят.

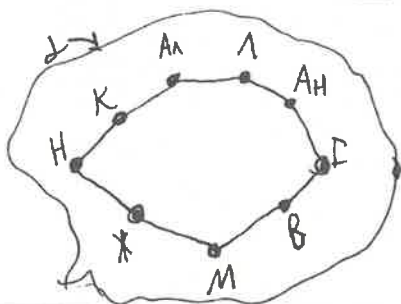
④ Степень вершины = 8:

Пример: полный граф на 9 вершинах. Каждая вершина соединена с каждой $\Rightarrow$ противоречие условию задачи.

степень вершины = 6:

Пример:

Граф не противоречит условию м.ф. 8



Ан - Ане

Л - Лев

Г - Света

В - Вера

М - мама

Ж - Жена

Н - Нина

К - Катя

Ал - Алёна

Ал - Алёна

Ал - Алёна

Ал - Алёна

Ал - Алёна

Ал - Алёна

Ал - Алёна

Ал - Алёна

Ал - Алёна

Ал - Алёна

Ал - Алёна

Ал - Алёна

Ал - Алёна

Граф не противоречит условию м.ф. 8
Ал не соединена с Верой, ни с женой $\Rightarrow$ в III степени с женой соединена с мамой

Ответ: 6 и 8 208



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

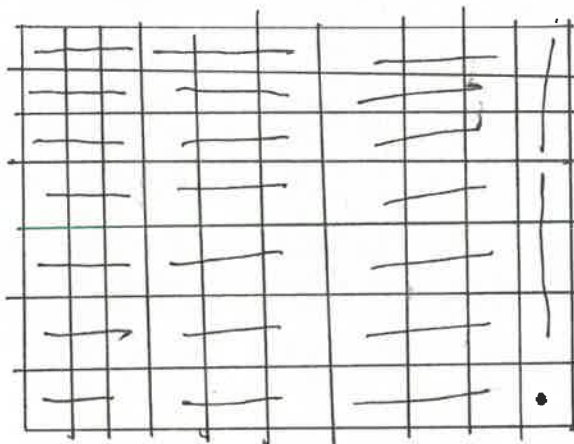
М А О О О 2 5 7 4 4 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 1

① Заполнить доску на 7×10

1×3 и 3×1 :



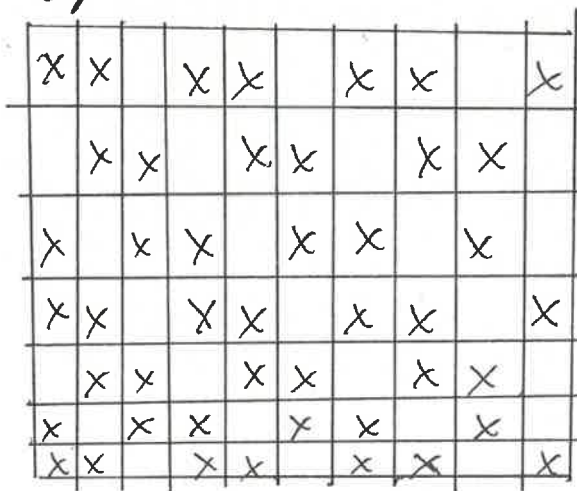
1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

а разрешил 7×10
на 23 1×3 и 3×1
и сем. 1 манера.
Замет, что на доске
доска ~~будет~~ манера
много манер (перемешивать),
которые нам дали
 $= 2 \cdot 23 + 1 = 47$

(1-1 манера в 1-ой оси клетки, а 2-23-
по 2 манера в 23 1×3 или 3×1)

пример:



X - манера
манера ~~состав~~ не
при ~~каждой~~ манере
 $= 48$ 3 манеры ~~будет~~
~~лежит~~ с 1×3 или 3×1

Итого: 48 манер

208.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа
в рамке справа

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

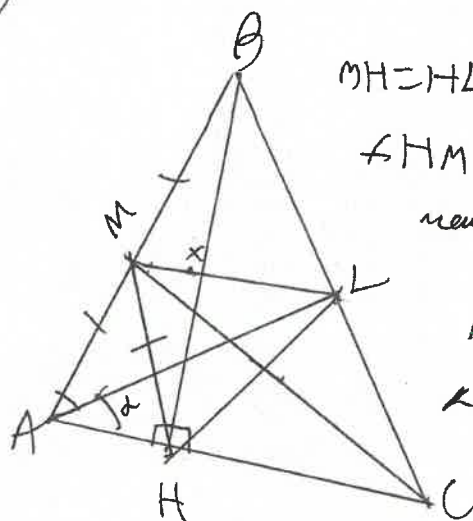
М А О О О 2 5 7 4 4 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

3



$$MH = HL = 12$$

$$\angle HML = 30^\circ$$

нужно найти сумму

р.к. $MH = 12$ и BH - сумма

$\angle AC \Rightarrow MH$ - медиана

в $\triangle AHB$ $\angle AHB = 90^\circ$

$$\Rightarrow AM = MB = MH = 12$$

$\angle HML = 30^\circ$ HX - высота из H на ML

$HX = 0.5 MH = 6$ р.к. $\triangle HMX$ - $\triangle$ $30^\circ 60^\circ 90^\circ$

$\angle H = 60^\circ$, $\angle M = 30^\circ$, $\angle X = 90^\circ$ совпадает

Так ML параллельна BC и AM - медиана $\Rightarrow$

р.к. $XH = 6 \Rightarrow BH = 12$

$\Rightarrow \angle ABH = 60^\circ$ по СВ- $\angle$ и $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ \Rightarrow \angle BAH = 30^\circ \Rightarrow \angle A = 90^\circ$

$\Rightarrow$ р.к. $AM = MH = 12 \Rightarrow \angle MHA = 30^\circ = \angle$

$$S_{\triangle ABC} = BH \cdot AC = 12 \cdot AC$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot AC = 12 \cdot AC$$

$$12 \cdot AC = 12 \cdot AC$$

Of.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 5 7 5 2 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	18	X	15	0		53

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1. Так как сумма степеней вершин графа чётна, а мы можем представить переписки в виде графа и при этом степени его вершин будут равны, то степени вершин должны быть чётны. У Маши как минимум 5 переписок, поэтому степени вершин могут быть равны 6 или 8. Оформим переписки в виде таблицы и отметим крестом клетки, находящиеся на пересечении ведущих переписку девочек.

	М	И	К	Л	А	С	А	В	Ж
Маша	X								
Мина		X							
Катя			X						
Лена				X					
Аня					X				
Света						X			
Алена							X		
Варя								X	
Женя									X

$n=36$

	М	И	К	Л	А	С	А	В	Ж
М	X								
И		X							
К			X						
Л				X					
А					X				
С						X			
Ал							X		
В								X	
Ж									X

$n=27$

Ответ: 36 или 27.

200.



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А 0 0 0 2 5 7 5 2 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

2. Найдём верхнюю

и нижнюю границу, при которых $-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 > 0$.

Для этого решим уравнение

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = \left(\frac{6}{5}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot 11 = \frac{36}{25} + \frac{44}{5} =$$

$$= \frac{36}{25} + \frac{220}{25} = \frac{256}{25} = \left(\frac{16}{5}\right)^2$$

$$x_1 = \frac{-\frac{6}{5} + \frac{16}{5}}{-\frac{2}{5}} = \frac{\frac{10}{5}}{-\frac{2}{5}} = -5$$

$$x_2 = \frac{-\frac{6}{5} - \frac{16}{5}}{-\frac{2}{5}} = \frac{-\frac{22}{5}}{-\frac{2}{5}} = 11$$

$$-5 < n < 11 \quad n \in \mathbb{N} \quad 0 < n \leq 10$$

Далее с помощью перебора находим $n \in \mathbb{N}$, для которых

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow -\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n \in \mathbb{N}.$$

ВНИМАНИЕ: Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 5 7 5 2 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

① $n=1$

$$-\frac{1}{5} \cdot 1^2 + \frac{6}{5} \cdot 1 = \frac{6}{5} - \frac{1}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

$1 \in \mathbb{N}$

② $n=2$

$$-\frac{1}{5} \cdot 2^2 + \frac{6}{5} \cdot 2 = \frac{12}{5} - \frac{4}{5} = \frac{8}{5} = 1,6$$

③ $n=3$

$$-\frac{1}{5} \cdot 3^2 + \frac{6}{5} \cdot 3 = \frac{18}{5} - \frac{9}{5} = \frac{9}{5} = 1,8$$

④ $n=4$

$$-\frac{1}{5} \cdot 4^2 + \frac{6}{5} \cdot 4 = \frac{24}{5} - \frac{16}{5} = \frac{8}{5} = 1,6$$

⑤ $n=5$

$$-\frac{1}{5} \cdot 5^2 + \frac{6}{5} \cdot 5 = 6 - 5 = 1$$

$1 \in \mathbb{N}$

⑥ $n=6$

$$-\frac{1}{5} \cdot 6^2 + \frac{6}{5} \cdot 6 = \frac{36}{5} - \frac{36}{5} = 0$$

$$-\frac{1}{5} \cdot 6^2 + \frac{6}{5} \cdot 6 + 11 = 11$$

$11 \in \mathbb{N}$



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А 0 0 0 2 5 7 5 2 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

⑦ $n=7$

$$-\frac{1}{5} \cdot 7^2 + \frac{6}{5} \cdot 7 = \frac{42}{5} - \frac{49}{5} =$$

$$= -\frac{7}{5} = -1,4$$

⑧ $n=8$

$$-\frac{1}{5} \cdot 8^2 + \frac{6}{5} \cdot 8 = \frac{48}{5} - \frac{64}{5} = -\frac{16}{5} = -3,2$$

⑨ $n=9$

$$-\frac{1}{5} \cdot 9^2 + \frac{6}{5} \cdot 9 = \frac{54}{5} - \frac{81}{5} = -\frac{27}{5} = -5,4$$

⑩ $n=10$

$$-\frac{1}{5} \cdot 10^2 + \frac{6}{5} \cdot 10 = -20 + 12 = -8$$

$$-\frac{1}{5} \cdot 10^2 + \frac{6}{5} \cdot 10 + 11 = 3$$

$$3 \in \mathbb{N}$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$ ~~решениями~~ решениями являются

1; 5; 6; 10

ОТВЕТ: 4.

185.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 5 7 5 2 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

4. Разобьём доску на 6 частей, чтобы найти наименьшее количество «пустот», при котором нет заполненного прямоугольника 3×1 или 1×3 : (рис. 1)

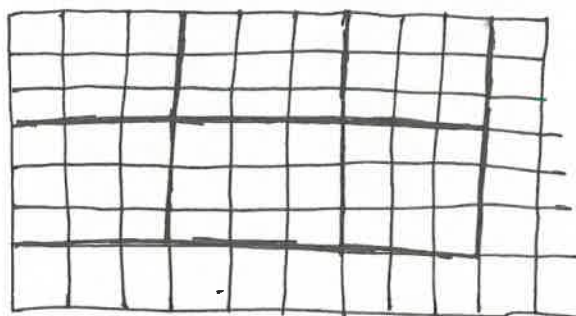


Рис. 1

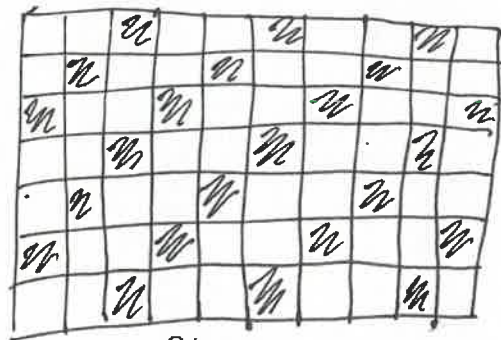


Рис. 2

В каждой части должно быть не менее 3 пустот, в сумме не менее 16.

Рассмотрим оставшуюся часть. Её можно представить как полосу 1×16 . В полосе 1×16 должно быть не менее $\frac{16}{3} = 5$ (ост. 1) пустот, в сумме 23. Пример-рис. 2

Таким образом, в лава не менее $70 - 23 + 1 = 48$ монеток.

Ответ: 48. 158.

5. Пусть $a=b=c=1$. При изменении одного из параметров значение дроби с ним меняется в геом. прогрессии; следовательно, при его уменьшении дробь значительно увеличивается, но при увеличении уменьшается. В случае $a=b=c=1$ $\frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^2+1} = \frac{3}{5}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЧОНОК»

Вариант № 4

М А О О О 2 6 3 4 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 1

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	X	18	X		58

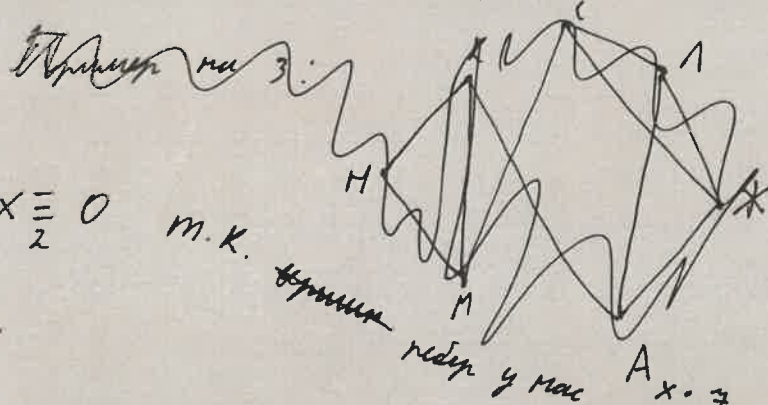
Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

101 X-кол. партий которая сыграла команда у.

$X \geq 3$ т.к у нас есть минимум 3 партии.

$X \leq 6$ т.к в партии мы можем получить, если каждая команда сыграет со всеми остальными, а

Женя не может сыграть со всеми



$X \equiv 0 \pmod 2$ т.к.

формула ребер у нас
$$\frac{X \cdot 7}{2} \quad (7 - \text{м, а } X - \text{ч-е})$$

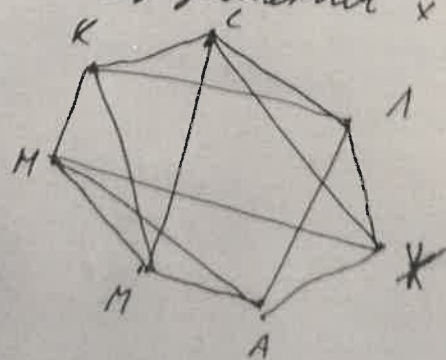
$X - 4 \leq$
 $X \equiv 0$

получить нам покажем по значению $X \leq 4$

Пример на 4:

список ребер

- (M): M, K, L, A
- (H): A, M, X, K
- (K): H, M, L, A
- (L): K, M, X, A
- (A): C, K, A, X
- (X): A, H, L, A



(A): M, H, L, X

208.

ВНИМАНИЕ! Проворачивается только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Вариант № 11

М А О О О 2 6 3 4 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N 2

$$\frac{4}{3}n - \frac{7}{3}n^2 + 20$$

$$\frac{7}{3}n - \frac{7}{3}n^2 + n + 20$$

$$\frac{4}{3}(n - n^2) + n + 20$$

правильно числа на удвоенности

$$n - \text{целое}, 20 - \text{целое}, \frac{4}{3}(n - n^2) \xrightarrow{+n+20 - \text{целое}} \frac{7}{3}(n - n^2) - \text{целое}$$

транспонировать все выражения
n по mod 3

$$\frac{7}{3} \cdot n - n^2 - \text{целое} \Rightarrow n - n^2 \equiv 0$$

✓

$$n \equiv 1 \text{ или } n \equiv 0$$

$$n \equiv 0$$

$$n - n^2 \equiv 0 \checkmark$$

$$n \equiv 1$$

$$n - n^2 \equiv 0$$

$$n \equiv 2 \checkmark$$

$$n - n^2 \equiv 1 \times$$

Проверим на то, что эта сумма ≥ 1
т.к. целое число ≥ 1 это натуральное

$$\frac{7}{3}(n - n^2) + n + 20 \geq 1$$

$$\frac{-n^2 + 4n + 10}{3} \geq 1 \quad | \cdot 3$$

$$-n^2 + 4n \geq -5$$

Если $n \geq 4$ и n увеличивается на 1, то $n(4-n)$ - уменьшается т.к. оно отриц. и не может быть увеличено
давайте найдем n и $n+1$ на которых
перестанет выполняться неравенство $n(4-n) \geq -5$

$$n=9 \quad 9 \cdot (-5) \leq -45 \checkmark$$

$$n=10 \quad 10 \cdot (-6) \leq -60 \times$$



Олимпиада школьников «БЕЛМОНОЮ»

Вариант № 11

МА 0002634825

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 2 (продолжение)

Итак мы получили что $n \leq 9$ и $n \neq 2$
 $n \neq 1$ $1 \leq n \leq 9$ $n \in \{7, 3, 4, 6, 7, 9\}$

Ответ: 6. 208.

№ 4.



Это раскраска моно
 мы мы можем разместить
 не больше 56 монет
 m - место для монетки
 x - пустота

ответ мы можем быть

число ≤ 56 . Я утверждаю что при 57 монетках
 обязательно мы

ВНИМАНИЕ! Проводятся только те, что записаны в этой стороне листа
 в разное время



Вариант № 4

M A O O O 2 6 3 4 8 2 6

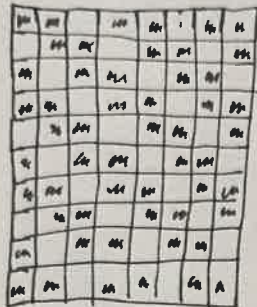
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N 4

X - это наш ответ

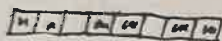


Это пример как
расставить плитки если
их меньше 55, значит

$$x \geq 55$$

Почему $x = 55$, подходит

как ответ. Попробуем от обратного и
предположим что при 55 м. не будет плитки 7×3
отдельной нижней строки гофры:



, оставшаяся часть разделим на

24 прямоугольника 7×3 рисунок?

В отрезанной строке может быть максимум
6 плиток ~~иначе~~ а в остальной части

в каждой отрезанной прямоугольнике не больше
чем 2 м. ~~28~~ 64 прямоугольников 24



Всего плиток расставлено не больше $6 \cdot 24 + 6 =$
 $= 48 + 6 = 54$

Значит при 55 м. можно
будет поместить 7×3 в отрезанной 3 м,
а чина плитки не подходит

Ответ: 55

188.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 6 7 6 6 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



№1. Заметим, что перешлок у каждой девочки было минимум 5, так как у Марины семь перешловок с Юной, Катей, Ленкой, Анной и Светой, а количество перешловок у каждой девочки одинаковое. Представим девочек в виде графа: тогда ребра - перешлоки, вершины - девочки, тогда, так как вершин нечетное количество, то степень вершин не может быть четной. Тогда степень должна быть больше или равна 5 и быть четной, и меньше либо равно 9, тогда это условие подходит 6 и 8, тогда всего перешловок было, если у каждой девочки по 6 перешловок: $\frac{6 \cdot 9}{2} = \frac{54}{2} = 27$ либо $\frac{8 \cdot 9}{2} = 36$ перешловок. Если у каждой девочки было по 8 перешловок. Ответ: 27 или 36 **165**.

1	2	3	4	5	6	Σ
16	5	0	12	20		53

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

0	0		0	0		0	0		0
	0	0		0	0		0	0	
0		0	0		0	0		0	0
0	0		0	0		0	0		0
	0	0		0	0		0	0	
0		0	0		0	0		0	0
0	0		0	0		0	0		0

так должно быть минимум 48. **125**.

При такой расстановке монеток не найдется прямоугольник 3х1 или 1х3, в клетках которого лежат монетки; при такой расстановке монеток всего 47, а значит чтобы обеспечить наличие такой прямоугольник, монеток должно быть минимум 48. **125**.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 6 7 6 6 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

$\frac{1}{x^4+3}$ меньше $\frac{1}{3}$ найдём как часто
ко меньше:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{x^4+3} = \frac{x^4}{3(x^4+3)} = \frac{x^4}{3x^4+9}$$

$$3x^4+9 = 3x^4+3+3+3 \geq 4\sqrt[4]{3x^4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} \text{ по неравенству } 0 \text{ средних}$$

$$3x^4+9 \geq 4\sqrt[4]{3^4 \cdot x^4} = 12x, \text{ тогда } \frac{x^4}{3x^4+9} \leq \frac{x^4}{12x} = \frac{x^3}{12};$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{x^4+3} \leq \frac{x^3}{12} \Rightarrow \frac{1}{x^4+3} \geq \frac{1}{3} - \frac{x^3}{12};$$

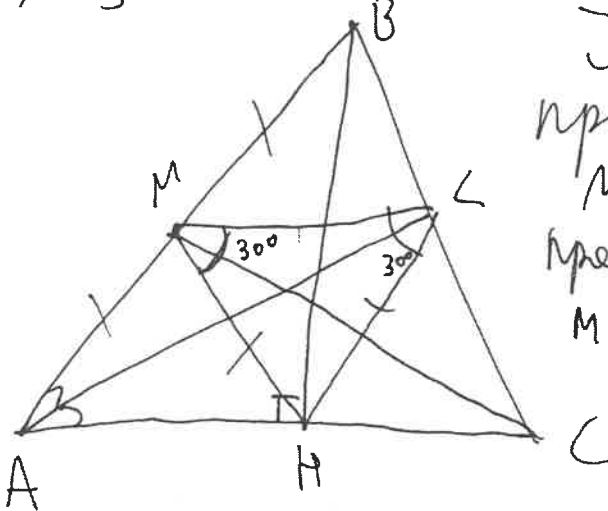
Применим это для a, b и c :

$$\frac{1}{a^4+3} \geq \frac{1}{3} - \frac{a^3}{12}; \frac{1}{b^4+3} \geq \frac{1}{3} - \frac{b^3}{12}; \frac{1}{c^4+3} \geq \frac{1}{3} - \frac{c^3}{12};$$

$$\text{Сложим: } \frac{1}{a^4+3} + \frac{1}{b^4+3} + \frac{1}{c^4+3} \geq 1 - \frac{1}{12}(a^3+b^3+c^3) = 205.$$

$$= 1 - \frac{1}{12} \cdot 3 = \frac{3}{4}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

№3.



Так как MH-медиана в прямоугольном треугольнике, $MH=MB=AM=1/2$ по свойству прямоуг. тр.; Также так как $MH=LN$, $\triangle MHL$ равнобедр., $\angle LMH = \angle MLN$

О.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 6 7 6 6 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

✓ 2.

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = \frac{1}{5}(6n - n^2) + 11 = \frac{1}{5}n(6 - n) + 11 > 0.$$

$$\frac{1}{5}n(6 - n) > -11, n(6 - n) > -55;$$

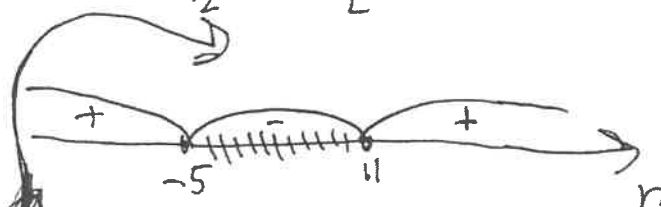
$$-n^2 + 6n + 55 > 0;$$

$$n^2 - 6n - 55 < 0;$$

$$d = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-55) = 36 + 220 = 256; \sqrt{d} = 16;$$

$$n_1 = \frac{6 - 16}{2} = -5;$$

$$n_2 = \frac{6 + 16}{2} = \frac{22}{2} = 11. \text{ То есть интервалы:}$$



не включая ^{или} -5 и 11,
и натуральное, тогда

~~n может быть равно~~ $1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$,
всего 10 значений n .
Ответ: 10

$$12^2 - 6 \cdot 12 - 55 = 144 - 72 - 55 = 17 > 0$$

5л.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в разное время



Вариант № 1

М А О О О 2 7 3 6 6 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	18	0	8	x		46

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1. Заметим, что среди любых 7 человек, один из них мог сыграть максимум 6 партий (с каждым).

Раз известно, что Маша не играла с Катей, а все девочки сыграли равное число партий, то максимум каждая девочка сыграла $6-1=5$ партий.

Так же, нам известно, что Маша сыграла максимум 3 партии (с Юрой, Катей, Светой) по условию.

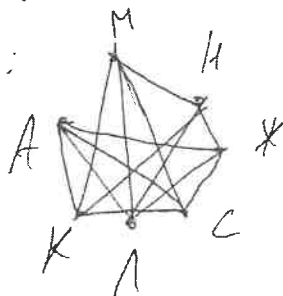
↓
Каждая девочка сыграла максимум 3 партии.

↓
Каждая девочка сыграла $5 \geq x \geq 3$ партий.

Нарисуем граф, где вершины - девочки, ребра - играли ли они между собой. Вершин 7, а степени всех вершин равны, т.к. девочки сыграли одинаковое число партий. В любом графе с ребрами сумма вершин четна а степень каждой вершины в нашем графе четна. Единственное четное число между 5 и 3 это 4.

Ответ: 4

Пример:



205.



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 7 3 6 6 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

2. ~~$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20$ — натуральное~~

~~$n(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}n) + 20$ тоже натуральное~~

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 = n(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}n) + 20 = n(\frac{4}{3} - \frac{n}{3}) + 20$$

$$20 \in \mathbb{N} \Rightarrow n(\frac{4}{3} - \frac{n}{3}) \text{ тоже натуральное}$$

$$n \geq 0 \text{ т.к. натуральное}$$

~~$n(\frac{4}{3} - \frac{n}{3}) + 20$~~ $n(\frac{4}{3} - \frac{n}{3}) + 20 > 0$

~~$n(\frac{4}{3} - \frac{n}{3})$~~ > -20

Заметим, что если $n \geq 4$, то $n(\frac{4}{3} - \frac{n}{3}) < 0$

при условии, что $n \geq 4$ и увеличивается, выражение
будет больше уходить в минус $\Rightarrow$ будет уменьшаться.
Найдем рамки n . $n \geq 0$;
почему?

Если $n=10$ $10(\frac{4}{3} - \frac{10}{3}) = -20 \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow 10 > n > 0$

Заметим, что $n(\frac{4-n}{3})$ целое, а так все выражение натуральное не целое $\Rightarrow$ или $n:3$ или $4-n:3$ или $4-n=0$

n может быть 1; 3; 4; 6; 7; 9

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 7 3 6 6 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Проверка

$$1\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right) = 1 \quad \checkmark$$

$$3\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{3}\right) = 3 \quad \checkmark$$

$$4\left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3}\right) = 0 \quad \checkmark$$

$$6\left(\frac{4}{3} - \frac{6}{3}\right) = -4 \quad \checkmark$$

$$7\left(\frac{4}{3} - \frac{7}{3}\right) = -4 \quad \checkmark$$

$$9\left(\frac{4}{3} - \frac{9}{3}\right) = -15 \quad \checkmark \quad \text{Ответ: 6}$$

185.

4. Пр. Заметим, что если мы уберем одну клетку из прямоугольника 1×3 или 3×1 в который закрашен клетками, то в остальных прямоугольниках ~~(остаток)~~ будет лежать по 2 клетки, т.к. иначе откуда уберем клетку из клетки равно- жий в прямоугольнике где одна клетка. Проведем диагональ раскраску в 3 цвета. Для того, чтобы в каждом прямоугольнике 1×3 или 3×1 было по 2 клетки, надо закрасить две цифры. почему не 1 и 2?

1x24

2x24

3x26

Закрасим 1 и 3 53 клетки + 1 убранные клетки

Ответ: 54

85.



Вариант № 1

M	A	0	0	0	2	7	3	6	6	2	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	7

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяться только то, что записано с этой стороны, листа в разное время

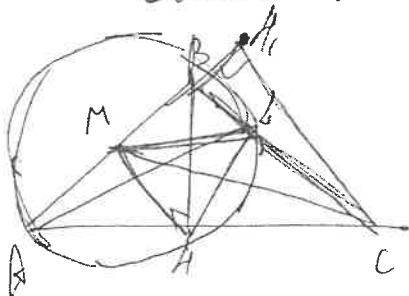
8.

2	3	1	2	3	1	2
3	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1
3	1	2	3	1	2	3
2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1
3	1	2	3	1	2	3
2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1

3. Построить $\triangle ABA_1$. $\angle AKB = 90^\circ$.

LM - regular $\Rightarrow AM = MB = MH = HL = 10 \Rightarrow AB = 20$

т. L равноудалена от AB и BC . т. M равноудалена от AC и BC от A и B . Если $ML = HL$, то ML равноудалена от AB и BC A и $C \Rightarrow$ медианы и высоты $\Rightarrow \triangle ABC$ равнобедрен, где $AB = BC = 20$



Нарисуй отрезок AB . В середине AB тогда $AM = MB$ — центр

Т.М. ценю в этой организации

$\angle HMB$ опирается на дугу MB , как и $\angle HMA$ и $\angle HBA$
 $\angle HMB = \angle HMA = \angle HBA = \frac{\angle A}{2} = 15^\circ \Rightarrow \angle HAB = 30^\circ$

$$B_A = \frac{20}{2} = 10 \text{ (A-gyra)}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 7 3 6 6 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$\Delta ABC: \angle BAC = \angle ACB = 30^\circ$$

$$AK = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{400 - 100} = \sqrt{300}$$

и

$$AC = 2\sqrt{300}$$

и AC про проведем AB так, чтобы провести высоту из т.с. перпендикулярная CH - высота

$$\angle HAC = 30^\circ; \angle HCA = 60^\circ$$

$$H, C = \frac{AC}{2} = \frac{2\sqrt{300}}{2} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$$

$$\text{Итого Ответ: } 10 + 10\sqrt{3} \text{ или } 10(1 + \sqrt{3})$$

05.



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант №

4

M	A	0	0	0	2	7	7	6	1	2	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
15	20	x	12	0		47

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

И. Руднева

ВЫЖДАНИЕ! Происходит только то, что написано в этой дорожной карте.



МАНА → Киния Котия Свене.

Меня $\rightarrow$ меня, Ане

фенол * камедь.

III.6. Если создать список $\Rightarrow$ мн алгоритм?

т.е. между изданием с кассет $5 \times 7 - 1 - 1 = 5$ позиций

 $\Rightarrow 3, 4, 5.$

$307 = 21 \frac{1}{2} \ominus$. т.к. линиями сразу излучаются.

$$4.7 = 28 \frac{1}{2} \oplus$$

$5 \cdot 7 = 35 \frac{1}{2} \text{ т.к.}$ мы считали одну часть, значит

⇒ 4 части.

Ombeem: 4.

158

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	2	7	7	6	1	2	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N2.

$$n \in \mathbb{N}$$

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 \in \mathbb{N} \quad 1.3.$$

$$-n^2 + 4n + 60 = 0$$

$$-n^2 + 4n + 60 = 0$$

$$n^2 - 4n - 60 = 0.$$

$$D > 0 = 16 + 240 = 256.$$

по теореме

$$n_1 = -6 \quad n_2 = 10$$

$$\Rightarrow n^2 - 4n - 60 = (n+6)(n-10)$$

$$\Rightarrow -n^2 + 4n + 60 = -(n-10)(n+6) \in \mathbb{N}$$

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+6 > 0.$$

$$\Rightarrow -(n-10) > 0$$

$$\Rightarrow 10 - n > 0$$

$$n < 10 \Rightarrow n \in (0; 10)$$

$$9: \frac{-81}{3} + \frac{36}{3} + 20 = 5 \oplus.$$

$$8: \frac{-64}{3} + \frac{32}{3} + 20 = \frac{-32}{3} + 20 \ominus.$$

$$7: \frac{-49}{3} + \frac{28}{3} + 20 = 13 \oplus.$$

$$6: \frac{-36}{3} + \frac{24}{3} + 20 = 16 \oplus.$$

$$5: \frac{-25}{3} + \frac{20}{3} + 20 = \frac{-5}{3} + 20 \ominus.$$

$$4: \frac{-16}{3} + \frac{16}{3} + 20 = 20 \oplus.$$

$$3: \frac{-9}{3} + \frac{12}{3} + 20 = 21 \oplus.$$

$$2: \frac{-4}{3} + \frac{8}{3} + 20 = \frac{4}{3} + 20 \ominus.$$

$$1: \frac{-1}{3} + \frac{4}{3} + 20 = 21 \oplus.$$

всего 6 вкл.

Ответ: 6. 20б.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М А О О О 2 7 7 6 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

Чтобы найти мин кол-во монет у блоха, нужно найти макс кол-во монет в каждой клетке в крайних 1х3 трех монет $\Rightarrow$ макс 2.

Заметим, что блоха в каждой клетке 3х3 раскраски имеет мин 3 пустых клетки т.к. в каждой строке и каждом столбце раскраски есть хотя бы 1.

блоха или расположена так;

0	0	
0		0
	0	0

, где 0 - монета.

$\Rightarrow$ строка блохит

1	0	0	1	0	0
---	---	---	---	---	---

 аналогично столбцу.

$\Rightarrow$ есть три варианта раскраски.

1) где пустая клетка в левом нижнем углу есть:

1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

x	0	0	x	0	0
0	x	0	0	x	0
0	0	x	0	0	x
y	0	0	y	0	0
0	x	0	0	x	0
0	0	x	0	0	y
y	0	0	x	0	0
0	y	0	0	x	0
0	0	x	0	0	y
0	0	x	0	0	0

0	x	0	0	x	0
0	0	y	0	0	y
x	0	0	x	0	0
0	y	0	0	x	0
0	0	y	0	0	x
x	0	0	x	0	0
0	x	0	0	y	0
0	0	x	0	0	y
x	0	0	x	0	0
0	0	x	0	0	0

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

блоха мин кол-во монет у блох в среднем 26.

$$\Rightarrow 80 - 26 = 54 - \text{макс кол-во}$$

$$\Rightarrow 54 + 1 = 55$$

Ответ: 55.

0	0	x	0	0	0
x	0	0	y	0	x
0	x	0	0	x	0
0	0	x	0	0	0
y	0	0	x	0	0
0	y	0	0	x	0
0	0	y	0	0	x
x	0	0	x	0	0
0	x	0	0	x	0
0	0	x	0	0	0

128.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М А О О О 2 7 7 6 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$a^2 + b^2 + c^2 = 3$ $\sqrt{3}$
 Д-то: $\frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} \leq \frac{1}{2}$

$\frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5}$ достигнет max значения когда
 $a=b=c$, при $a^2 + b^2 + c^2 = 3 \Rightarrow a^2 = b^2 = c^2 = \frac{3}{3} = 1$.

$\Rightarrow a=1=b=c=1$

$\frac{1}{1+5} + \frac{1}{1+5} + \frac{1}{1+5} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, - max ~~значение~~ значение

$\Rightarrow \frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} \leq \frac{1}{2}$

ОБ.

ВНИМАНИЕ! Проводите только то, что написано с этой стороны листа
 в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 7 8 0 4 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	x	20	1		60

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1.

~~Маша, Катя, Лена, Аня, Света~~

Пусть девочки - вершины, переписки - ребра.

Каждая девочка участвовала в одинаковом числе переписок $\Rightarrow$ степени вершин - равны. Из условия, что Маша переписывалась с Кней, Катей, Леной, Аней и Светой следует, что максимальная степень вершины это 5. Максимальная степень вершины это 5 т.к. всего 9 девочек. Рассмотрим случаи:

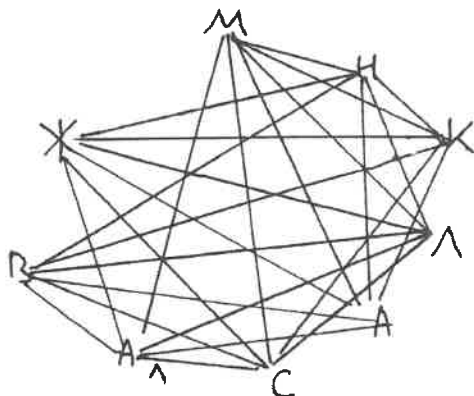
1 Случай (степени всех вершин равны 5):

Такой случай невозможен т.к. тогда сумма степеней вершин будет нечет, что невозможно.

2 Случай (степени всех вершин равны 6):

Вот пример:

Вершины будут называться первыми буквами имен, но Аня - A, Алена - A₁



Т.е. всего $\frac{9 \cdot 6}{2} = 27$ переписок

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 7 8 0 4 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

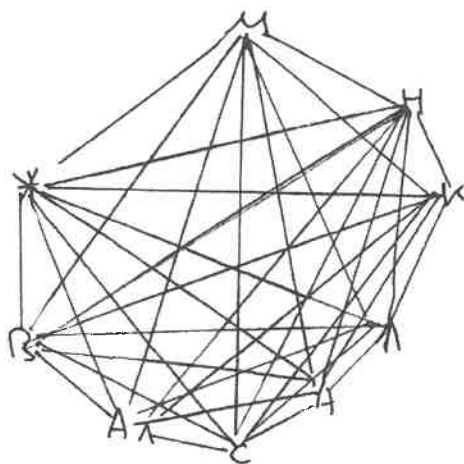
Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

3 Случай (степени всех вершин равны 7):

Такой случай невозможен т.к. сумма степеней вершин будет нечет, что невозможно.

4 Случай (степени всех вершин равны 8):

Вот пример:
Вершины будут называться так же, как и в случае 2



Т.е. каждая переписывалась с каждой

Т.е. всего $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ переписок

Ответ: 36 или 27 переписок
и 2.

208

По условию $n \in \mathbb{N}$ и $-\frac{1}{3}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 \geq 1 \quad (т.к. мин. возмож. число это 1)$$

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{6}{5}n \geq -10 \quad | \cdot 5$$

$$-n^2 + 6n \geq -50 \quad | -9$$

$$-9 + 6n - n^2 \geq -59$$

$$-(3-n)^2 \geq -59 \quad | \cdot (-1)$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 7 8 0 4 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$(3-n)^2 \leq 59 \quad \text{т.к. } 7^2 = 49 < 59, \text{ а } 8^2 > 59 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3-n)^2 \leq 49$$

$$(3-n)^2 \leq 7^2 \Rightarrow \begin{cases} 3-n \leq 7 \\ n-3 \leq 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \geq -4 \\ n \leq 10 \end{cases} \Rightarrow n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = \frac{1}{5}n(6-n) + 11 - \text{иатур} \Rightarrow n:5 \text{ или } 6-n:5 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Из множества $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ подходит только $n \in \{1, 5, 6, 10\}$

Проверим:

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = \frac{1}{5}n(6-n) + 11$$

1) Если $n=1$, то $\frac{1}{5} \cdot 1 \cdot 5 + 11 = 12 - \text{иатур}$

2) Если $n=5$, то $\frac{1}{5} \cdot 5 \cdot 1 + 11 = 12 - \text{иатур}$

3) Если $n=6$, то $\frac{1}{5} \cdot 6 \cdot 0 + 11 = 11 - \text{иатур}$

4) Если $n=10$, то $\frac{1}{5} \cdot 10 \cdot (-4) + 11 = 3 - \text{иатур}$

Итого 4 шт.

Ответ: 4 шт.

208.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 7 8 0 4 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Рассмотрим какое наибольшее число монет мы можем разложить в ряд восток не используя ни одного прямоугольника 1×3 или 3×1 в котором 3 монеты.
Вот пример на 47 шт.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2		3	4		5	6	7
	4	5		6	7		8	9
1		4	5		6	7		8
3	3		4	5		6	7	8
	4	3		5	6		7	8
1		4	5		6	7		8
1	2		3	4		5	6	7

Этот пример максимален т.к. мы можем разбить доску на 23 прямоугольника 1×3 , в каждом макс 2 монеты и остается свобод. клетка
туда кладем монету. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ макс число монет $2 \cdot 23 + 1 = 47$ шт $\Rightarrow$ если добавить 1 монету, то обязательно найдется прямоугольник 1×3 или 3×1 в котором 3 монеты $\Rightarrow 47 + 1 = 48$ это мин. число

Ответ: 48 монет.

208.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

МАООО2797826

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	0	20	10		70

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1. Всего игр максимум - 21

Пусть каждая девочка сыграла k игр $\Rightarrow$ она не сыграла

$6-k$ игр.

$$3 \leq k \leq 6$$

Маша играла с Ниной, Катей и Светой

максимум игр 4 ч. человек - 7

$$21 = 7(6-k) + 7 \cdot k$$

4. Интерпретируем задачу в граф
вершины - девочки ребро - если они играли

Пусть каждая девочки сыграла k раз

$$3 \leq k \leq 5$$

$$k=3$$

Маша играла с Ниной, Катей и Светой

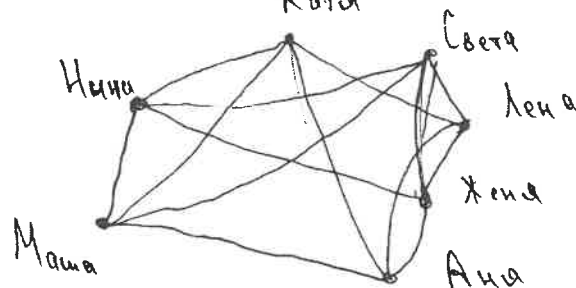
максимум игр - 6, но Женя не играла с Катей

Сумма степеней в графе - $3 \cdot 7 = 21$ - нечетное $\Rightarrow$ противор.

$$k=5$$

Сумма степеней в графе $5 \cdot 7 = 35$ - нечетное $\Rightarrow$ противор.

$k=4$ (Пример)



Значит ответ: 4 партии

208.



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

МАООО2797826

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$\left(-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20\right) \in \mathbb{N}$$

Значит

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 > 0$$

$$\frac{4}{3}n + 20 > \frac{1}{3}n^2 \quad | \cdot 3 \quad (3 > 0; \text{знак не меняется})$$

$$4n + 60 > n^2$$

Нарисуем графики функций, и найдем, что в какой-то момент n^2 перерастет $4n + 60$ и все время дальше. Все время n^2 больше $4n + 60$ - растет быстрее.

$$\text{при } n \geq 10 \quad n^2 \geq 4n + 60$$

$$\text{База } n=10 \quad 100 \geq 100$$

Предположение ~~нужно~~ при $n \geq 10 \quad n^2 \geq 4n + 60$ Докажем $n+1$

Дано

$$n^2 \geq 4n + 60$$

$$(n+1)^2 \geq 4(n+1) + 60$$

$$\text{при } n \geq 10 \quad n^2 \geq 4n + 60$$

Значит $n < 10$

подставим все $n \in \mathbb{N}$ и $n \leq 10$

$$\begin{aligned} \text{представим } n^2 \text{ как} \\ 4n + 6n + (4n - 10) \\ 4n \geq 4n \quad 6n \geq 60 \quad (4n - 10) \geq 0 \\ n \geq 10 \end{aligned}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

ЧАООО2797826

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$n=1$$

$$-\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{4}{3} \cdot 1 + 20 = \frac{3}{3} + 20 = 21 \in \mathbb{N}$$

$$n=2$$

$$-\frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{4}{3} \cdot 2 + 20 = \frac{-4+8}{3} + 20 = \frac{4}{3} + 20 \notin \mathbb{N}$$

$$n=4$$

$$-\frac{1}{3} \cdot 16 + \frac{4}{3} \cdot 4 + 20 = \frac{-16+16}{3} + 20 = 20 \in \mathbb{N}$$

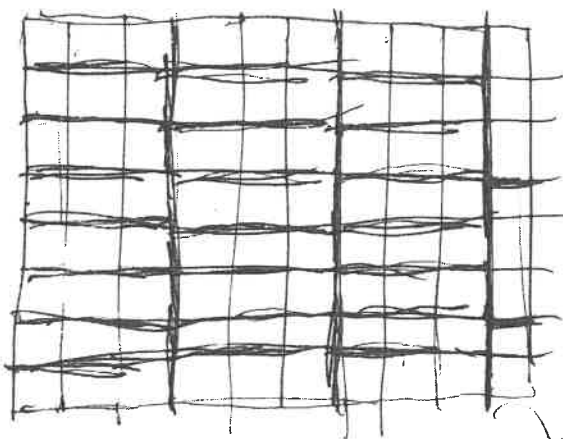
$$n=6$$

$$-\frac{1}{3} \cdot 36 + \frac{4}{3} \cdot 6 + 20 = \frac{-36+24}{3} + 20 = \frac{-12}{3} + 20 = -4 + 20 = 16 \in \mathbb{N}$$

$$n=8$$

$$-\frac{1}{3} \cdot 64 + \frac{4}{3} \cdot 8 + 20 = \frac{-64+32}{3} + 20 = \frac{-32}{3} + 20 \notin \mathbb{N}$$

Ответ: 6 натуральных n подходят **205.**



Пусть есть хотя-бы 55 монеток тогда хотя-бы один из выделенных прямоугольников 1×3 заполнен $2 \cdot 26 = 52$ (1x3) $52+2=54$ (1 кусочек)

Приведем пример, что

из ≤ 54 монетки не всегда найдется прямоугольник 1×3 .

ВНИМАНИЕ! Проверяться только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

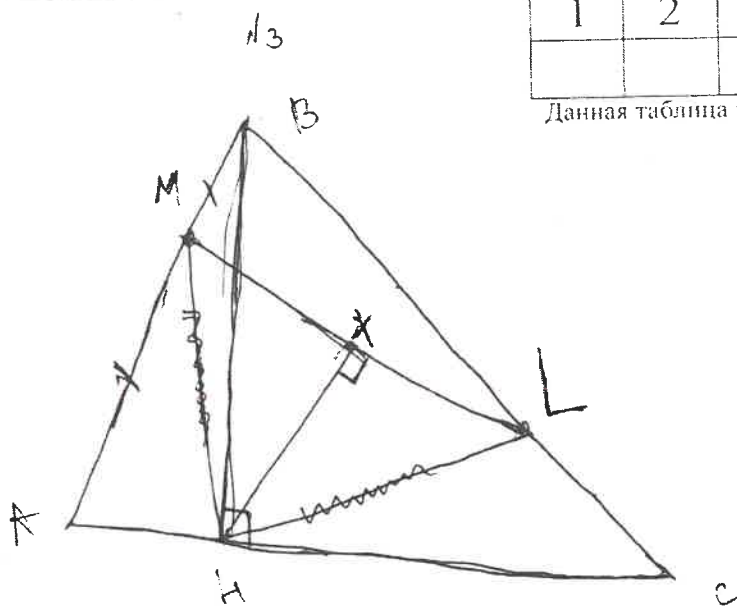
МАООО2797826

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

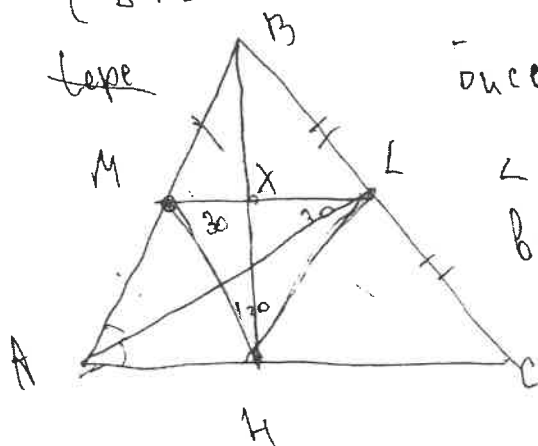
1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверять только то, что написано с этой стороны листа в раздаточном листе



M - ср. линия AB
 M - середина AB
 XH совпадает с BH и $BH = 2XH$, $XH = \frac{1}{2}HL$
 $(\triangle HLX, \angle HXL = 90^\circ, \angle XLH = 30^\circ) \Rightarrow HX = 5, BH = 10$



биссектриса совпадает с медианой $\Rightarrow$
 $\angle ABC = 60^\circ \Rightarrow$ высота из $C =$
 высота из B ($\triangle$ - симметричен)
 высота из $C = 10$
 высота из B + высота из $C = 20$

06.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

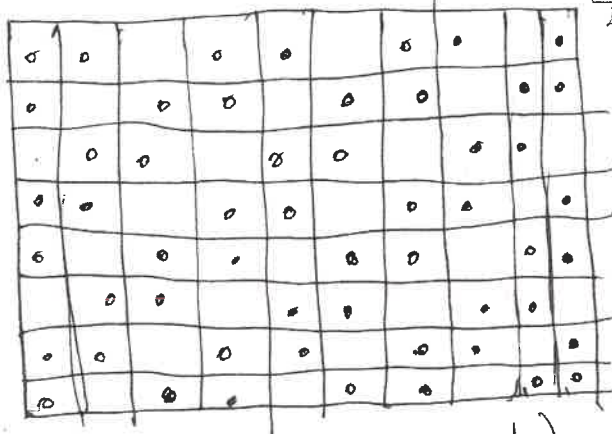
МАООО2797826

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4 (Продолжение)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)



• - {ушла монетка}

Если монет < 54 , то будем снимать монетки с черта,
не изменяя положение.

205.

ВНИМАНИЕ! Проверяться только то, что написано с этой стороны листа
в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 7 9 7 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в правом столбце

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 6$$

$$(a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (a^2 + c^2) = 6$$

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2 b^2} = 2ab \text{ (по пер. камм)}$$

$$b^2 + c^2 \geq 2\sqrt{b^2 c^2} = 2bc \text{ (по пер. камм)}$$

$$a^2 + c^2 \geq 2\sqrt{a^2 c^2} = 2ac \text{ (по пер. камм)}$$

$$6 \geq 2(ab + bc + ac)$$

$$3 \geq ab + bc + ac \text{ верно}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt{a^2 b^2 c^2} \text{ (по пер. о ср.)}$$

$$3 \geq 3\sqrt{abc^2}$$

$$1 \geq \sqrt{abc^2}$$

$$1 \geq (abc)^2$$

$$1 \geq abc \text{ верно}$$

$abc \geq 0$ всегда по усл. задачи

$$\begin{aligned} \frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} &= \frac{a(b+5)(c+5) + b(a+5)(c+5) + c(a+5)(b+5)}{(a+5)(b+5)(c+5)} = \\ &= \frac{abc + 5ab + 5ac + 25 + abc + 5ab + 5bc + 25 + abc + 5ac + 5bc + 25}{(a+5)(b+5)(c+5)} = \\ &= \frac{3abc + 10(ab + bc + ac) + 75}{(a+5)(b+5)(c+5)} = \\ &= \frac{3 \cdot 1 + 10 \cdot 3 + 75}{5 \cdot 3 + 1 + 25(a+b+c)} = \\ &= \frac{30 + 30 + 75}{15 + 1 + 25(a+b+c)} = \frac{135}{16 + 25(a+b+c)} \end{aligned}$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$$

$$9 \leq 3 + 6 = 9 \Rightarrow a + b + c \leq 3 \text{ (верно)}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 7 9 7 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

√5 (продолжение)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$\frac{a}{a+5} = 1 - \frac{5}{a+5}$$

$$\frac{b}{b+5} = 1 - \frac{5}{b+5}$$

$$\frac{c}{c+5} = 1 - \frac{5}{c+5}$$

$$3 - 5 \left(\frac{1}{a+5} + \frac{1}{b+5} + \frac{1}{c+5} \right) (!) \leq \frac{1}{2}$$

$$-5 \left(\frac{1}{a+5} + \frac{1}{b+5} + \frac{1}{c+5} \right)$$

$$-5 \left(\frac{1}{a+5} + \frac{1}{b+5} + \frac{1}{c+5} \right) (!) \leq -\frac{5}{2} \quad \text{или} \quad -\frac{5}{2} \leq -\frac{5}{2}$$

$$\left(\frac{1}{a+5} + \frac{1}{b+5} + \frac{1}{c+5} \right) (!) > \frac{1}{2}$$

$$a+b+c \leq 3 \quad a^2+b^2+c^2=3$$

таким образом $\left(\frac{1}{a+5} + \frac{1}{b+5} + \frac{1}{c+5} \right)$ было минимально ($< \frac{1}{2}$)

$(a+5)$ $(b+5)$ $(c+5)$ должны быть максимальны

$$a+b+c \leq 3 \quad a^2+b^2+c^2=3$$

$$\text{макс} = \sqrt{3} \quad (a^2+b^2+c^2=3)$$

самый оптимальный вариант - $a+5=6$; $b+5=6$; $c+5=6$
(1; 1; 1)

Эти числа будут выглядеть так

значит

и т.д.

100% за существенные продвижения

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЫЧОНОК»

Вариант № 4

М А О О О 2 8 5 9 3 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

	1	2	3	4	5	6	Σ
Задача 1.	15	18	0	0	18		51

Листов таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Из условия следует, что всего девочек было 7. Пусть их количество равно k , а столько количество вершин равно k . Тогда $a=7$; $d \geq 3$.

d может принимать значения от 0 до $k-1=6$

Если $d=3$, то общ. кол-во партий равно:

$$\frac{k \cdot d}{2} = \frac{7 \cdot 3}{2} = 10,5, \text{ что невозможно}$$

Если $d=4$, то общ. кол-во партий равно:

$$\frac{7 \cdot 4}{2} = 14, \text{ что возможно так как } 14 \text{ целое число}$$

Если $d=5$, то общ. кол-во партий равно:

$$\frac{7 \cdot 5}{2} = 17,5, \text{ что невозможно}$$

Если $d=6$, то каждая девочка со всеми другими познакомилась. Следовательно, если бы не было знакомства с девочкой, то каждая девочка могла связаться с 6 девочками.

Ответ: 4

158.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в разное время



Олимпиада школьников «БЕЛЫЧОНОК»

Вариант № 4

М А О О О 2 8 5 8 3 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

(данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ))

Задача 2.

$$-\frac{1}{3}h^2 + \frac{4}{3}h + 20 =$$

$$= \frac{-h^2 + 4h + 60}{3}$$

Чтобы значение шло было натуральным оно должно быть больше 0 и делиться на 3 без остатка.

$$-h^2 + 4h + 60 > 0 \Rightarrow h^2 - 4h - 60 < 0$$

$$h^2 - 4h - 60 = 0$$

$$D_1 = 4 + 60 = 64$$

$$\sqrt{D_1} = \sqrt{64} = 8$$

$$x = \frac{2 \pm 8}{1} = \begin{bmatrix} 10 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Получается, что неравенство $h^2 - 4h - 60 < 0$ выполняется для $h \in \{-6; 10\}$. Поскольку h должно быть натуральным числом, то $h \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

Проверим делимость на 3, для каких h h шестая $-h^2 + 4h + 60$ делится на 3, то есть $-h^2 + 4h$ делится на 3.

$$\text{при } h=1; \quad -1^2 + 4 \cdot 1 = 3 \text{ (делит.)}$$

$$\text{при } h=2; \quad -2^2 + 4 \cdot 2 = 4 \text{ (не делит.)}$$

Вариант № 4

МАООО2859316

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

	1	2	3	4	5	6	Σ
Данний таблиця заповнюється жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)							

при $n=3$; $-3^2+4 \cdot 3 = 3$ (делит)при $n=4$; $-4^2+4 \cdot 4 = 0$ (делит)при $n=5$; $-5^2+4 \cdot 5 = -5$ (не делит)при $n=6$; $-6^2+4 \cdot 6 = -12$ (делит)при $n=7$; $-7^2+4 \cdot 7 = -21$ (делит)при $n=8$; $-8^2+4 \cdot 8 = -32$ (не делит)при $n=9$; $-9^2+4 \cdot 9 = -45$ (делит)Значения которые принадлежат $\{1, 3, 4, 6, 7, 9\}$.

Их количество равно 6.

Ответ: 6

188.

Задача 5.

Преобразуем каждую дробь. Дробь $\frac{a}{a+5}$ мож-но представить в виде $1 - \frac{5}{a+5}$.Получим сумму $S = \frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} = 3 - 5 \cdot$ $\left(\frac{1}{a+5} + \frac{1}{b+5} + \frac{1}{c+5} \right)$ Пусть $\left(\frac{1}{a+5} + \frac{1}{b+5} + \frac{1}{c+5} \right) = T$, тогда $S = 3 - 5T$ Поскольку нам надо доказать, что $S \leq \frac{1}{2}$,то $3 - 5T \leq \frac{1}{2}$ или $5T \geq \frac{5}{2}$ или $T \geq \frac{1}{2}$.Следовательно докажем, что $\frac{1}{a+5} + \frac{1}{b+5} + \frac{1}{c+5} \geq \frac{1}{2}$

ВНИМАНИЕ! Проверьте только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЫЧОНОК»

Вариант № 4

И	А	О	О	2	8	5	8	3	2	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Применить неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

Для любых положительных чисел x, y, z

$$\frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \leq \frac{x+y+z}{3} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$$

Возьмем $x = a+b, y = b+c, z = c+a$, тогда

$$T = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c+15}$$

Из условия $a^2+b^2+c^2=3$. Для любых положительных чисел a, b, c

$$3(a^2+b^2+c^2) \Rightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0.$$

Короче:

$$(a+b+c)^2 \leq 3 \cdot 3 = 9 \Rightarrow a+b+c \leq 3$$

Т.к. $a+b+c \leq 3 \Rightarrow a+b+c+15 \leq 18$, значит

$$\frac{9}{a+b+c+15} \geq \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

и так как $T \geq$ этой дроби, то $T \geq \frac{1}{2}$

Получим $S = 3 - 5T \leq 3 - 5 \cdot \frac{1}{2} = 3 - 2.5 = 0.5$

Равенство достигается тогда, когда $a=b=c=1$

ВНИМАНИЕ! Проверьте также то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

Вариант № 4 МА0002859326

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

(полагая $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ вели-

чинств, и в керат-

векторов, которые были ранее, тогда дру-

милитаризм, равенство) **180.**

Задача 4.

Пусть N -количество клеток

Как можно доказать, что в строке i

то стандарт, но всего клеток на доске бу-

дет 80

Строка А: 110 110 1101 (1-клетка, 0-пусто)

Строка Б: 011 011 0110

Заполним доску по очереди:

1-я строка (строка А) 5-я строка (строка А)

2-я строка (строка Б) 6-я строка (строка Б)

3-я строка (строка А) 7-я строка (строка А)

4-я строка (строка Б) 8-я строка (строка Б)

Получим на доске стандарт, который пер-

вощи:

в 1-й строке (А) - 1 в 5-й строке (А) - 1

в 2-й строке (Б) - 0 в 6-й строке (Б) - 0

в 3-й строке (А) - 1 в 7-й строке (А) - 1

в 4-й строке (Б) - 0 в 8-й строке (Б) - 0

Получаем чередование 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Вариант № 4

М А 0 0 0 2 8 5 9 3 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

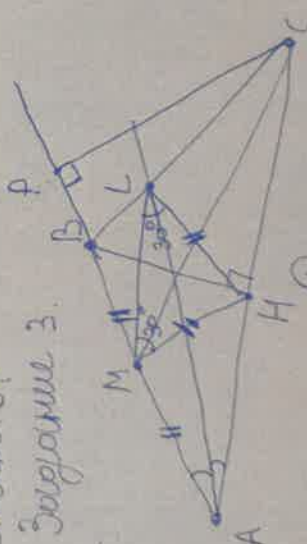
Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Никогда нет трех точек на одной прямой по вершинам. По произвольным точкам нет, так как каждая точка взята из шара A_0 B , где нет тройки.

Взяли точку B (4 раза A и 4 раза B) в каждой тройке 7 точек. У каждой тройки нет ни одной тройки. Ни по вершинам, ни по сторонам. Значит если добавить еще одну точку, то, как бы ни тройка. Следующее решение было 57 точек.

Ответ: 57

Задача 3.



Дано:

$$\angle LMN = 30^\circ$$

AL - медиана

CM - медиана

BH - высота

$$MN = HL = 10$$

Найти:

$$AB \Rightarrow MN = \frac{AB}{2} \Rightarrow 10 \Rightarrow AB = 20$$

$$\Rightarrow AB = 20$$

Олимпиада школьников «БЕЛЫЧОНОК»

Вариант № 4

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

2) В $\triangle MLN$ $\angle M = 30^\circ$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle MLN = 30^\circ$ (по формуле)

3) Пусть $CP = h$; $BN = h$ $\Rightarrow$ в $\triangle ABC$ $h =$

$h = AB$ (высота CP равна h и $BN = h$)

$\Rightarrow CP + BN = AB = 20$

Ответ: 20

ОБ.

ВНИМАНИЕ! Проверьте, чтобы записки с этой стороны листа в рамке стрелы



Олимпиада школьников «БЕЛЫЧОНОК»

Вариант № 4

М А О О О 2 8 5 9 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

1	2	3	4	5	6	Σ
15	18	x	x	15		48

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Всего 4 девочки. Если так, то из них сыграла динамовское кол-во парний (x), то другое кол-во парний равно $(\frac{4-x}{2})$. Чтобы это число было целым, произведение $4 \cdot x$ должно быть четным. Значит x - четное число.

Если $x=2$, то этого быть не может, так как Маша уже играла с Никой, Катей и Светой, а значит это уже 3 парии. Противоречие.

Если $x=6$, то это значит, что каждая девочка сыграла 6 парий, это означало бы что каждая с каждой, а по условию Женя не играла с Катей. Противоречие.

Если $x=4$:

1. Маша сыграла 3 парии (Н, К, С) и должна была сыграть еще одну (либо с Ленкой или с Аней).
2. Лена сыграла 2 парии и должна была сыграть еще 2.
3. Женя не играла с Катей, так как у нее всего 4 парии. Все условия выполняются.

Ответ: 4 парии 158.

ВНИМАНИЕ! Проверяйте, правильно ли вы записали в ответе цифры и знаки.



~~Подпись~~

Олимпиада школьников «БЕЛЫЧОНОК»

Вариант № 4

М А О О О 2 8 5 8 8 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Замена переменных

Пусть $a^2 = x$, $b^2 = y$, $c^2 = z$. Тогда наше условие принимаем вид $x + y + z = 3$, где $x, y, z > 0$

Исходное неравенство преобразуем в:

$$\frac{(\sqrt{x})}{(\sqrt{x} + 5)} + \frac{(\sqrt{y})}{(\sqrt{y} + 5)} + \frac{(\sqrt{z})}{(\sqrt{z} + 5)} \leq \frac{1}{2}$$

Рассмотрим функцию:

$$f(t) = \frac{(\sqrt{t})}{(\sqrt{t} + 5)}; \quad t > 0$$

$$f'(t) = \frac{1 - 5}{(\sqrt{t} + 5)^2} = 1 - \frac{5}{4t + 5}$$

Найдем вторую производную $f''(t)$

$$\text{Первая производная } f'(t) = \frac{5}{(2\sqrt{t})(\sqrt{t} + 5)^2)}$$

$$\text{Вторая производная } f''(t) = \frac{-(5(3\sqrt{t} + 5))}{(4t + \sqrt{t})(\sqrt{t} + 5)^3)}$$

Применим неравенство Йенсена.

$$\frac{f(x) + f(y) + f(z)}{3} \leq \frac{f(x + y + z)}{3}$$

Подставим значения

~~неподдается~~

2 10 5

Олимпиада школьников «БЕЛЪЧОНОК»

Вариант № 4

МАООО2859826

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица используется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$\frac{f(a^2) + f(b^2) + f(c^2)}{3} \leq \frac{f(a^2 + b^2 + c^2)}{3}$$

Так как по условию $a^2 + b^2 + c^2 = 3$, то

$$\frac{f(a^2 + b^2 + c^2)}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Вычислим значение функции в точке

1:

$$f_1 = \frac{f(1)}{f(1+5)} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{f(a^2) + f(b^2) + f(c^2)}{3} \leq \frac{1}{6} \quad | \cdot 3$$

$$f(a^2) + f(b^2) + f(c^2) \leq \frac{1}{2}, \text{ что и требовалось доказать. Равенство достигается при } a=b=c=1.$$

158.

Олимпиада школьников «БЕЛЫЧОНОК»

Вариант № 4

М А О О О 2 8 5 8 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N3

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 > 0 \quad | \cdot (-3)$$

$$n^2 + 4n - 60 < 0$$

$$D = 16 + 240 = 256 = \sqrt{256} = 16$$

$$n_{1,2} = \frac{-4 \pm 16}{2} = \begin{cases} n_1 = 10 \\ n_2 = -6 \end{cases}$$

Неравенство выполняется при $n \in (-6, 10)$

Так как n по условию натуральное число ($n = 1, 2, 3, 4, \dots$), то возможные значения n :
 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Условие целого числа (делимость на 3).

Выражение можно записать так:

$$\frac{(-n^2 + 4n + 60)}{3}, \text{ Для того чтобы резуль-}$$

нат был целым числителем должен делиться на 3. 60 делится на 3, значит условие вводимой n можно, что $(-n^2 + 4n)$ должно делиться на 3.

$$-n^2 + 4n = n(4 - n)$$

Проверим все наши числа $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Олимпиада школьников «БЕЛЧОНОК»

Вариант № 4

М А О О О 2 8 5 9 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ИНСТРУКЦИЯ: Перевести числа из римского в арабский и наоборот.



N 3

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$n = 1 \quad 1(4-1) = 3 \text{ (подходит)}$$

$$n = 2 \quad 2(4-2) = 4 \text{ (не подходит)}$$

$$n = 3 \quad 3(4-3) = 3 \text{ (подходит)}$$

$$n = 4 \quad 4(4-4) = 0 \text{ (подходит)}$$

$$n = 5 \quad 5(4-5) = -5 \text{ (не подходит)}$$

$$n = 6 \quad 6(4-6) = -12 \text{ (подходит)}$$

$$n = 7 \quad 7(4-7) = -21 \text{ (подходит)}$$

$$n = 8 \quad 8(4-8) = -32 \text{ (не подходит)}$$

$$n = 9 \quad 9(4-9) = -45 \text{ (подходит)}$$

Итого: числа удовлетворяющие условию:

1, 3, 4, 6, 7, 9 - всего 6 чисел

Ответ: 6 чисел **188.**

Вариант № 1

М А О О О 2 8 6 3 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	7
20	20	0	8	0		48

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1 Из условия можем записать имена всех 7 девочек:

М, Н, К, С, Л, Ж, А.

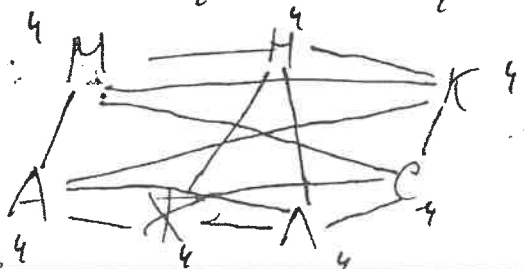
Если 2 девочки играли между собой, запишем это через «—», а если не играли, то через «X».

Значит, по условию:

М—Н Пусть всего было n партий, тогда
 М—К всего игр: $\frac{7n}{2}$ (т.к. каждая девочка
 М—С сыграла одинаковое кол-во пар-
 Л—Ж тий). Максимально значение $n =$
 Л—А $= 6$ (если пренебречь условием),
 Ж—Ж т.к. девочка не могла играть сама с со-
 бой. Но по условию Ж—Ж $\Rightarrow$ макси-
 мальное значение $n = 5$. Минимальное
 значение $n = 3$, т.к. М играла с Н, К и С,
 то есть с 3 девочками.

$$\text{Также } \frac{7n}{2} = N_{\text{число}} \Rightarrow 7n : 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \neq 3 \text{ и } n \neq 5 \Rightarrow n = 4. \text{ Пример:}$$



Здесь из каждой вершины выходит по 4 ребра $\Rightarrow$ по 4 партии.

Ответ: 4 партии. 208

Вариант № 1

М А 0 0 0 2 8 6 3 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	1	3	2	1	3	2	1
1	3	2	1	3	2	1	3
3	2	1	3	2	1	3	2
2	1	3	2	1	3	2	1
1	3	2	1	3	2	1	3
3	2	1	3	2	1	3	2
2	1	3	2	1	3	2	1
1	3	2	1	3	2	1	3
3	2	1	3	2	1	3	2
2	1	3	2	1	3	2	1

Данную таблицу 8×8 закрасим в 3 цвета в шахматном порядке.

Таким образом каждый прямоугольник 1×3 или 3×1 закрасим в 3 цвета

Чтобы решить задачу, нужно найти наибольшее кол-во монеток, удовлетворяющих условию. Например, оставить в каждом прямоугольнике 1×3 и 3×1 только 2 монеты.

В данной таблице 27 клеток цвета 1, 24 клеток цвета 2 и 27 клеток цвета 3 $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ наибольшее кол-во монет, удовлетворяющее условию: $27 + 26 = 53$ монеты (например, во всех клетках 1 и 3 лежит по монете). Значит, наименьшее, удовлетворяющее кол-во монет: $53 + 1 = 54$ монеты.



Вариант № 1

М А О О О 2 8 6 3 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

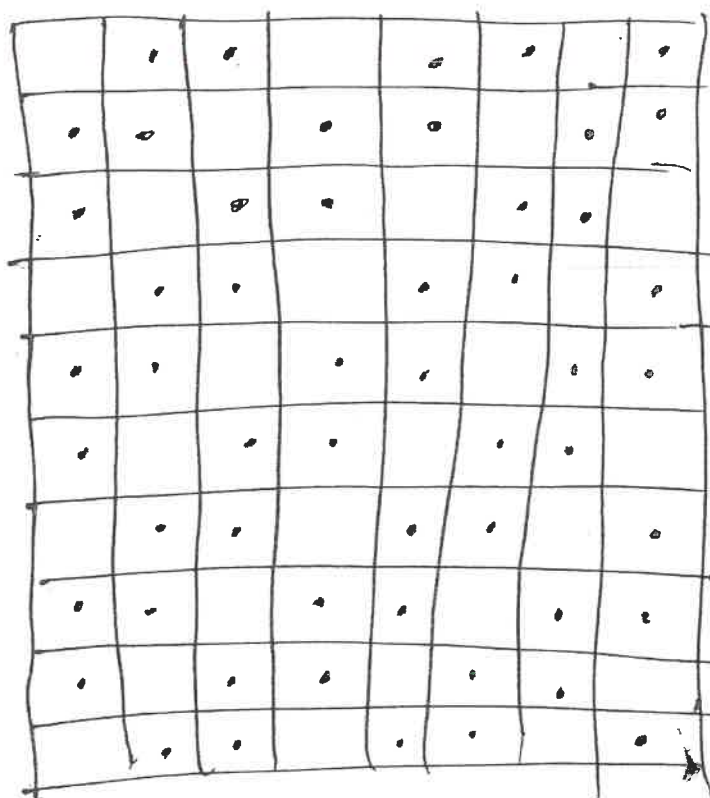
№4 (продолжение):

~~Ответ: 54 монеты.~~

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Пример таблицы с наибольшим кол-вом монет, не удовлетворяющих условию:



Здесь: '•' — это монета. Их 53, и любой прямоугольник 1×3 или 3×1 не заполнен полностью. Но таковой найдётся, если положить монеты абсолютно на любую клетку.

Ответ: 54 монеты

88

№2

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 = N_{\text{max}} \Rightarrow > 0.$$

$$n = N_{\text{max}} \Rightarrow > 0.$$

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 = N \Rightarrow -\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n > -20 \text{ и целое.}$$

Рассмотрим I условие: $-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n > -20$:

Вариант № 1

M A O O O 2 8 6 3 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2 (продолжение):

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + \frac{60}{3} > 0$$

$$-n^2 + 4n + 60 > 0.$$

~~Заметим, что при~~Найдём минимальное N n , при котором условие не выполняется, то есть:

$$-n^2 + 4n + 60 = 0.$$

$$D = 16 + 60 \cdot 4 = 256.$$

$$n = \frac{-4 \pm 16}{-2}$$

$$n_1 = 10 \quad n_2 = -6 \text{ (т.к. } n \in \mathbb{N})$$

Значит $n < 10$.При этом $n > 0 \Rightarrow 0 < n < 10$.Найдём все числа, удовлетворяющие $0 < n < 10$ и $-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n$ — целое.Очевидно, что для $n : 3$ верно, что:

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n \text{ — целое} \Rightarrow n = 3, 6, 9.$$

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n = -\frac{n^2}{3} + \frac{4n}{3} = \frac{n^2 - 4n}{3} = \frac{n(n-4)}{3}$$

$$\left(-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n\right) : 3 \Rightarrow \frac{n^2 - 4n}{3} : 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{n^2 - 4n}{3}\right) : 3.$$



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

4 A 0 0 0 2 8 6 3 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2 (продолжение):

$$\left(-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n\right) - \text{целое} \Rightarrow (-n^2 + 4n) : 3 =$$

$$\Rightarrow \cancel{n^2 - 4n} : 3 \Rightarrow (n^2 - 4n) : 3$$

$$\Rightarrow -(n^2 - 4n) : 3 \Rightarrow (n^2 - 4n) : 3$$

$$(n^2 - 4n) : 3 \Rightarrow n(n-4) : 3$$

$$n : 3$$

$$n = 3, 6, 9$$

(их мы уже
искали)

$$(n-4) : 3$$

$$n = 1, 4, 7$$

$$\Rightarrow n = 1, 3, 4, 6, 7, 9. \Rightarrow 6 \text{ чисел}$$

Ответ: 6 чисел (а именно 1, 3, 4, 6, 7, 9). 205

№5

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3$$

$$\text{Док-амб: } \frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Очевидно, что } \frac{a}{a+5}, \frac{b}{b+5} \text{ и } \frac{c}{c+5} \leq \frac{1}{2}. \Rightarrow$$

$$\text{Иначе, при } \frac{a}{a+5} \Rightarrow a \leq 5. \text{ Иначе:}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 25 \Rightarrow > 3.$$

Также очевидно, что a, b и $c \leq \sqrt{3}$; ина-
че $a^2 + b^2 + c^2 > 3$.

Вариант № 1

М А О О О 2 8 6 3 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5 (продолжение):

Пусть:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} = \frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} \quad (\text{при } = \frac{1}{2}).$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{6a}{a+5} + \frac{6b}{b+5} + \frac{6c}{c+5} = 3$$

$$\frac{a(a+5)(b+5)(c+5)}{a+5} + \frac{b(a+5)(b+5)(c+5)}{b+5} + \frac{c(a+5)(b+5)(c+5)}{c+5} \leq \frac{(a+5)(b+5)(c+5)}{2}$$

$$a(b+5)(c+5) + b(a+5)(\cancel{b+5})(c+5) + c(a+5)(b+5) \leq \frac{(a+5)(b+5)(c+5)}{2}$$

$$2a(b+5)(c+5) + 2b(a+5)(c+5) + 2c(a+5)(b+5).$$

$$\cdot (b+5) = (a+5)(b+5)(c+5)$$

$$(2ab + 10a)(c+5) + (2ab + 10b)(c+5) + (2ac + 10c)(b+5).$$

$$\cdot (b+5) = (c+5)(4ab + 10a + 10b) + (2ac + 10c).$$

$$\cdot (b+5) = 4abc + 10ac + 10bc + 20ab + 50a + 50b + 50c + 2abc + 10ac + 10bc = 6abc + 20ac + 20bc + 20ab + 50a + 50b + 50c = (ab + 5a + 5b + 25).$$



Вариант № 1

М А О О О 2 8 6 3 4 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

~5 (продолжение):

$$(c+5) = abc + 5ab + 5ac + 25a + 5b + 25c + 125$$

$$5abc + 15ab + 15ac + 15b + 25a + 25c = 125$$

$$abc + 3ab + 3ac + 3b + 5a + 5c = 25$$

$$abc + 3(ab + ac + bc) + 5(a + b + c) = 25$$

Пусть условие неверно, и:

$$abc + 3(ab + ac + bc) + 5(a + b + c) > 25$$

$$0,2abc + 0,6(ab + ac + bc) + a + b + c > 5$$

$$0,2abc + 0,6ab + 0,6ac + 0,6bc + a + b + c > 5$$

Из условия $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ понимаем, что в сред. среднее арифмет. значение a, b и $c \leq \sqrt{1} \Rightarrow a, b$ и c можно заменить 1. Тогда: неверно.

$$0,2 + 0,6 + 0,6 + 0,6 + 1 + 1 + 1 > 5$$

$$5 > 5$$

Противоречие. $\Rightarrow$ Это, что допустимы неверно и $\frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} \leq \frac{1}{2}$ (Ч.т.д.)

ОС.



Вариант № 1

М А О О О 2 8 6 3 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 3

Дано:

$\triangle ABC$

AL - бисс.

BH - высота

CM - медиана

$MH = LH = 10$

$\angle LMH = 30^\circ$

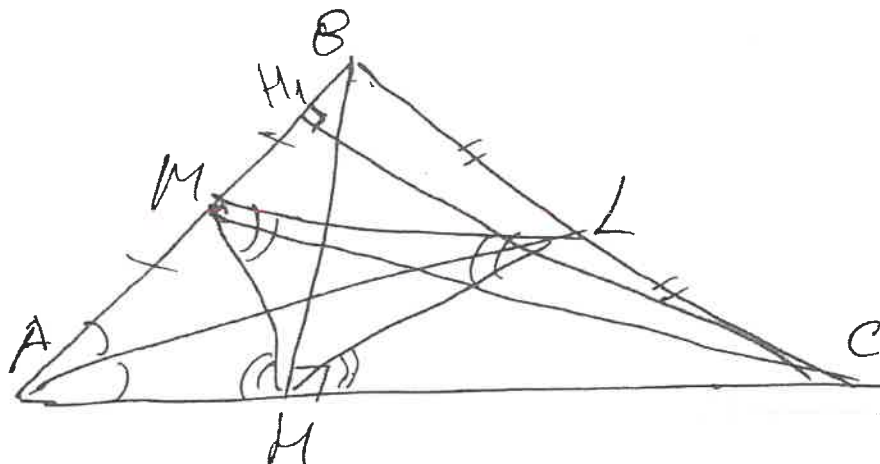
Найти:

сумму вы-

сот

BH и CH

Решение:



1. По условию $MH = LH = 10 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \triangle MLH$ - р/б и $\angle LMH =$
 $= \angle MLH = 30^\circ \Rightarrow \angle MHL =$
 $= 180^\circ - 30^\circ \cdot 2 = 120^\circ$

2. BH - высота $\Rightarrow \angle BHA = \angle BHC = 90^\circ$ и
 CM - медиана $\Rightarrow AM = MB$

3. $\angle AMM + \angle CHL = 180^\circ - \angle MHL = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

4. $\angle AMM = \angle CHL = 60^\circ : 2 = 30^\circ \Rightarrow \angle LMH =$
 $= \angle AMM$ как накр. смеж. при $ML \parallel AC$ и
 секущей MH , $\Rightarrow ML \parallel AC$.

5. $ML \parallel AC$ и $AM = MB \Rightarrow ML$ - ср. линия
 $\Rightarrow BL = LC \Rightarrow AL$ - медиана и бисс.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант №

3

М А О О О 2 8 6 8 4 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
15	12	0	12	20		59

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ПРИВАШЕ: Присваивается только тем, кто написаны в этой стороне листа в равном порядке



пусть x - число партий
у каждой две девочки

$$\frac{7x}{2} = N - \text{целое число партий}$$

очевидно что $N \geq 0$ и тк всего партия девочек 7 $\Rightarrow$ максимум каждая могла сыграть 6 партий, а так как Мел не играла с Катей $\Rightarrow$ макс партий могла каждая сыграть 5. Тк Мама играла с Ниной Катей и Светой $\Rightarrow$ минимум 3 партий. Тк N - натуральное число

$\Rightarrow x$ четное $\Rightarrow$ каждая девочка могла сыграть ~~максимум~~ 4 партии **158.**

$$-\frac{1}{4}n^2 + 2n + 12 > 0 \quad | \cdot (-4)$$

$$n^2 - 8n - 48 < 0$$

$$D = 64 + 48 \cdot 4 = 256 \quad \sqrt{D} = 16$$

$$n_1 = \frac{8 + 16}{2} = 12$$

$$n_2 = \frac{8 - 16}{2} = -4$$

$$\begin{array}{c} -4 \quad 12 \\ \hline n_2 \quad n_1 \end{array}$$

тк $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (0; 12)$; тк $2n + 12 \in \mathbb{N}$ прих $n \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow -\frac{1}{4}n^2 + 2n + 12 \in \mathbb{Z}$ когда $n^2 : 4$, или $n : 2$

$\Rightarrow n$ может быть равно 2, 4, 6, 8, 10; так есть 5-ти значений

Ответ: 5, **128.**

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М А О О О 2 8 6 8 9 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Прислать только те решения, которые вписаны в таблицу



Дано
 $\angle BAL = \angle LAM$
 $AM = MB$
 $\angle BHC = 90^\circ$
 $MH = LH = 17$
 $\angle LMH = 30^\circ$
 $\angle CKA = 90^\circ$

$BH + BK = ?$

√3

т.к. $AM = MB \Rightarrow$ ~~ММ~~ ~~ММ~~ ~~ММ~~

$\Rightarrow$ ML медиана
 пров. из угла 90°

$\Rightarrow MH = \frac{1}{2} AB$

$\Rightarrow AM = MB = MH = ML$

проведем высоту

$HP \perp ML$

рассмотрим $\triangle AML$

$\triangle HML$; т.к. $MH = HL \Rightarrow \angle M = \angle L$

$HP = \frac{1}{2} MH = 8,5$ (как катет лем. на против угла 30°)

по Пифагору

$a^2 + b^2 = c^2$

$a^2 = c^2 - b^2$

$$\Rightarrow MP^2 = HM^2 - HP^2 = 17^2 - 8,5^2$$

$$MP = \sqrt{17^2 - 8,5^2} = \sqrt{\frac{4 \cdot 17^2 - 17^2}{4}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 17^2}{4}} = 8,5\sqrt{3}$$

т.к. в равнобедренном $\triangle$ кат. высота совпадает с медианой $\Rightarrow MP = PL$

$\Rightarrow ML = 2MP = 2 \cdot 8,5\sqrt{3} = 17\sqrt{3}$

рассмотрим $\triangle AKC$

предположим $\angle C = 60^\circ \Rightarrow \angle A = 180 - \angle K - \angle C =$

$= 180 - 90 - 60 = 30^\circ$; $BH = \frac{1}{2} AB = 17$ как катет лем. на против угла 30° ; рассмотрим $\triangle AHM$, т.к. $AM = MH$

ML средняя линия т.к. $\triangle ABC$ т.к. $\angle A = \angle H = 30^\circ$ (как катет лем. при MH сек.)

$\Rightarrow ML = \frac{1}{2} AC \Rightarrow AC = 17\sqrt{3} \cdot 2 = 34\sqrt{3}$

$CK = \frac{34\sqrt{3}}{2} = 17\sqrt{3}$ (как катет проведенный из угла 30° против лежащего на угл. 30° лежащий на против угла 30°)

$BH + BK = 17 + 17\sqrt{3}$

Ответ: $17 + 17\sqrt{3}$

08.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант №

3

М А О О О 2 8 6 8 4 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

✓

Найдем максимальное кол-во монет которые можно разложить на ^{не образуя прямоугольника 3x1} в клеточки ~~3x8~~. Используем для этого раскраску в 3 цвета т.к. есть только черная ручка $\Rightarrow$ 1 цвет $\rightarrow$ 1; 2 цвет $\rightarrow$ 2; 3 цвет $\rightarrow$ 3 подсчитаем кол-во клеток каждого цвета

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	1	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2

1 - 19

2 - 19

3 - 18

получим монетки в 1 и 3 цвета

$$19 + 18 = 37$$

эта при такой раскраске мы можем ^{не образуя в при прямоугольнике 3x1} уложить максимум 37 монет, а добавив еще одну ~~получится~~ ^{получится} что 38 монет мы ~~монеты~~ ^{монеты} ~~положить~~ ^{можно} было влад

Аналогично будет если мы возьмем 2 и 3 цвет. Если мы возьмем 1 и 2 цвета получим что мы можем уложить максимум $19 + 19 = 38$ монет не образуя прямоугольника $3 \times 1 \Rightarrow$ ~~1 и 3~~ 1 и 3; 2 и 3 ~~получится~~ ^{получится} нам не подходит. $38 + 1 = 39$ монет было у Влада.

Ответ: 39 монет.

125.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

МАОООЛРБРРРР

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$\frac{1}{abc} = \frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} \geq \frac{a^4+b^4}{a^6+b^6} + \frac{b^4+c^4}{b^6+c^6} + \frac{c^4+a^4}{c^6+a^6}$$

если доказать что $\frac{1}{bc} \geq \frac{b^4+c^4}{b^6+c^6}$

$$\frac{1}{bc} \geq \frac{b^4+c^4}{b^6+c^6} \quad | \cdot bc \cdot (b^6+c^6)$$

$$b^6+c^6 \geq b^5c+c^5b; \quad b^6+c^6-b^5c-bc^5 \geq 0;$$

$$b^6+c^6-b^5c-c^5b \geq 0;$$

$$(b-c)(b^5-c^5) \geq 0;$$

если $b \geq c \Rightarrow b-c \geq 0$ и $b^5-c^5 \geq 0 \Rightarrow (b-c)(b^5-c^5) \geq 0$ верно

если $b < c \Rightarrow b-c < 0$ и $b^5-c^5 < 0 \Rightarrow (b-c)(b^5-c^5) > 0$ верно

Аналогично можно показать * что:

$$\frac{1}{ac} \geq \frac{c^4+a^4}{c^6+a^6} \text{ и } \frac{1}{ab} \geq \frac{a^4+b^4}{a^6+b^6}$$

$$\Rightarrow \frac{a^4+b^4}{a^6+b^6} + \frac{b^4+c^4}{b^6+c^6} + \frac{c^4+a^4}{c^6+a^6} \leq \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} = \frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{abc}$$

$$\Rightarrow \frac{a^4+b^4}{a^6+b^6} + \frac{b^4+c^4}{b^6+c^6} + \frac{c^4+a^4}{c^6+a^6} \leq \frac{1}{abc}$$

Доказано.

208.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М А О О О 2 8 7 9 3 2 6

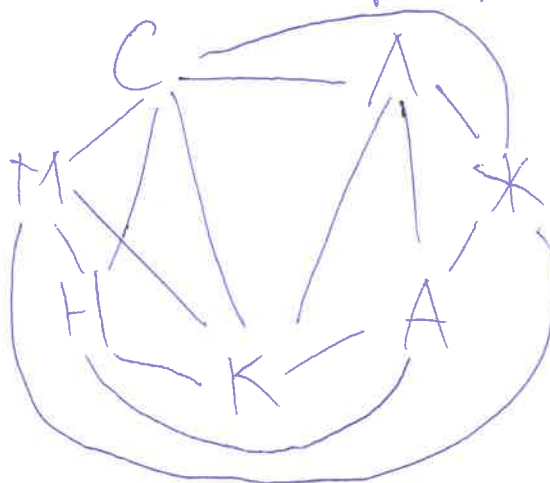
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



1.

Обозначим девочек как вершины графов, тогда партии обозначим как ребра графа. У Маши степень вершины равна 3, значит у остальных девочек степени вершин не меньше 3 т.к. по условию они сыграли одинаковое кол-во партий. Сумма всех степеней вершин равна кол-ву ребер умноженному на 2, а значит если $5 \cdot 7 = 35$ $35 \div 2$ значит они сыграли не 5 партий. Каждая девочка сыграла с другой не более 1 раза значит ~~степени~~ они не могли сыграть по 7 партий, т.е. Жень не играла с Катей то максимум она могла сыграть 5 партий, значит они сыграли не по 6 партий. Тогда единственно вариант то что они сыграли по 4 партии. $4 \cdot 7 = 28$ $28 \div 2$. Покажу примером что это возможно:



208.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М А О О О 2 8 7 9 3 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

н

$$-\frac{1}{4}n^2 + 2n + 12$$

Т.к. n натуральное то $n > 0$. Обратим внимание на $-\frac{1}{4}n^2$. В последующем выражении у нас не может получиться дробь значит мы должны иметь точные значения n для $-\frac{1}{4}n^2$ то бы это число получилось целым. Допустим $n = 2; 4; 6; 8; 10; 12$. Но $-\frac{1}{4}n^2$ получается всегда отрицательным значит все числа нужно найти тогда когда n значение всего выражение становится ≥ 0 . $n=2$ тогда $-1 + 2 + 12$ больше 0. $n=4$ тогда $-4 + 8 + 12$ больше 0. $n=6$ $-9 + 12 + 12$ больше 0. $n=8$ тогда $-16 + 16 + 12$ больше 0. $n=10$ тогда $-25 + 20 + 12$ больше 0. $n=12$ тогда $-36 + 24 + 12$ равно нулю. Значит все последующие числа не подходят. Т.к. $-\frac{1}{4}n^2$ растёт быстрее чем $2n$ значит (замечем по значениям выражения при $n=2; 4; 6 \dots$ $n=2$ тогда 13, $n=4$ тогда 16, $n=6$ тогда 15, $n=8$ тогда 12, $n=10$ тогда 7 т.е. значение становится меньше и меньше. Следовательно по подходу числа 2, 4, 6, 8, 10. Т.е. 5 чисел. От 6: 5 чисел

108.

ВНИМАНИЕ! Проверяться только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

M	A	0	0	0	2	8	7	9	3	2	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа



29

Переформулирую задачу:

6. найдётся ли ~~одна~~ прямая, которая 1х3 или 3х1
в которой все части замкнутой монотонны, если

Възможно ли е положителна оценка да се даде на политическите партии, които са били част от

Влас и спомогавица
 тбс по оу проапа ежа пражоза оити ои баше не
 елаа монети, а оаау збраву ево и саукуноу монету
 то јоу пражозавица проајеу савршасеау. исоу
 поаи аоу иа-воу монет изау исоу ии оуноу пражозавицау
 иоу прех иаиоу и приаавиу и тоуиу моу-бу-оуу
 моу-бу- Исоу азу оу расаеу 2 зеру 1 !

Заграсе нисе $\text{кастица} = \text{моностица}$

~~Затем~~ Тут нету ни одного знака (с)
с 3 монетами знают отъ

$$38 + 1 = 39$$

Отв: 39 монеток.

11 20 20 20 20

$$\frac{a^4 + b^4}{a^6 + b^6} + \frac{b^4 + c^4}{b^6 + c^6} = \frac{(a^4 + b^4)(b^6 + c^6) + (b^4 + c^4)(a^6 + b^6)}{(a^6 + b^6)(b^6 + c^6)}$$

$$= a^4b^6 + a^4c^6 + b^{10} + b^4c^6 + b^4a^6 + b^{10} + c^4a^6 + c^4b^6$$

$$= 2b^{10} + a^4 b^4 (b^2 + a^2) + a^4 c^4 (a^2 + c^2) + b^4 a^4 (b^2 + a^2)$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М А О О О 2 8 7 9 3 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа
в рамке справа



~~25 (прохождение)~~

$$2b^{10} + a^4 b^4 (b^2 + a^2) + a^4 c^4 (a^2 + c^2) + b^4 a^4 (b^2 + a^2)$$

$$b^6 (a^6 + 2a^4 c^2)$$

$$= 2b^{10} + a^4 b^4$$

$$+ \frac{2a^4}{16 + a^6} =$$

Олимпиада школьников «БЕЛЫЧОНОК»

Вариант № I МА 0 0 0 2 9 0 3 3 2 6
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1
Ответ 4
Решение

1	2	3	4	5	6	Σ
15	20	0	5	0		40

Данная таблица предназначена для жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

мама сыграла 3 партии
значит ответ минимум 3
меня не сыграла с Катей
значит ответ максимум 5
теперь поймем что игр
должно быть четное
кол-во ТК иначе они
все сыграют нечетное
кол-во раз $неч \cdot 4 = неч$
~~станет~~ но игра это в
2 стороны то есть если
мы попробуем построить
граф то у нас должно
быть четное число путей
(и узлов) на отрезке
[3, 5] - только 1 четное -
- 4

155.

Олимпиада школьников «БЕЛЧОНОК»

Вариант № I

М А 0 0 0 2 9 0 3 3 2 6

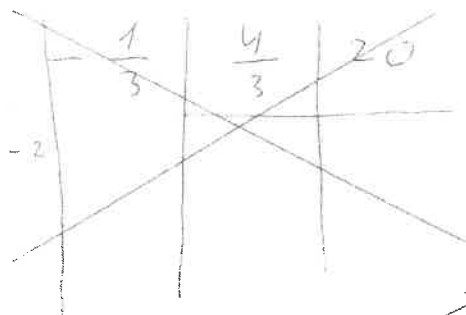
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$n/2$

1 2 3 4 5 6 Σ

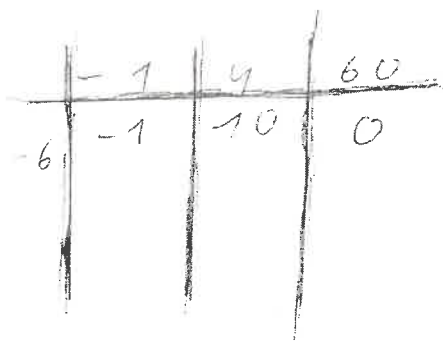
$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 = f$$

Для таблицы ответов жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)



размещаем
уровнение
горизонтально

$$-n^2 + 4n + 60 = 3f$$



$$(n+6)(-n+10) = 3f$$

$$\frac{1}{3}(n+6)(-n+10) = f$$

n - натуральное
чтобы f стало натуральным
надо убрать $\frac{1}{3}$ чтобы 1 из
скобок делилась на 3
1 скобка $\rightarrow n \equiv 0$
2 скобки $\rightarrow n \equiv 1$ так же нам
надо чтобы $f > 0$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № I

М А 0 0 0 2 9 0 3 3 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 2
продолжение

$$\frac{1}{3}(n+6)(-n+10) > 0$$

$$(n+6)(-n+10) > 0$$

$$\frac{-}{-6} \quad \frac{+}{10}$$

имеем $n \in (-6, 10)$ и $n = 0$ или $n = 1$ и $n = 2$ и $n = 3$ и $n = 4$ и $n = 5$ и $n = 6$ и $n = 7$ и $n = 8$ и $n = 9$ и $n = 10$

AB -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓

Ответ: всего таких чисел 6
208.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа
в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № I

М А О О О 2 9 0 3 3 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2

раскрасить таблицу таким
образом чтобы в каждом
прямоугольнике 1×3 будет $\neq$
одно - 1, 2, 3 и в 3×1 тоже.
У Влада должно быть в
каждом прямоугольнике
 1×3 и 3×1 по 2 монеты
кроме 1 в котором 3
монеты



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № I

М А 0 0 0 2 9 0 3 3 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ИЧ продолжение

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1 - 27 мм

2 - 27 мм

3 - 26 мм

значит

сумму

при такой раскладке

берем наименьшую

монету

$$26 \text{ мм} + 27 \text{ мм} + 1 \text{ мм} = 54 \text{ мм}$$

ден монеты

Ответ: 54

58.



Олимпиада школьников «БЕЛЫЧОНОК»

Вариант № I МАООО2903326
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1 2 3 4 5 6 Σ

IV5

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3$$

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$\begin{array}{ll} a \geq 0 & a \leq 3 \\ b \geq 0 & b \leq 3 \\ c \geq 0 & c \leq 3 \end{array} \quad \frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{6a}{a+5} + \frac{6b}{b+5} + \frac{6c}{c+5} \leq a^2 + b^2 + c^2$$

$$\frac{6a}{a+5} - a^2 + \frac{6b}{b+5} - b^2 + \frac{6c}{c+5} - c^2 \leq 0$$

$$\frac{-a^2(a+5)+6a}{a+5} + \frac{-b^2(b+5)+6b}{b+5} + \frac{-c^2(c+5)+6c}{c+5} \leq 0$$

$$\frac{a(a-1)(a+6)}{a+5} + \frac{b(b-1)(b+6)}{b+5} + \frac{c(c-1)(c+6)}{c+5} \geq 0$$

$$a+5 > 0 \quad \text{так как } a \geq 0$$

$$a(a-1)(a+6) \geq 0 \quad \text{так как если } a=0 \text{ или } a \geq 1$$

и аналогично для b и c. Но из уравнения $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ мы понимаем, что все 1 меньше единицы, но 2 других будут дополнительно его показывать что сумма этих выражений ≥ 0 что. об.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № I

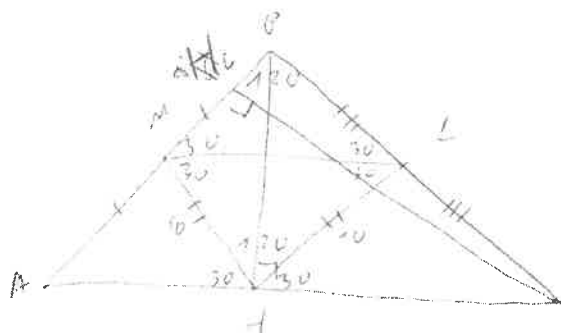
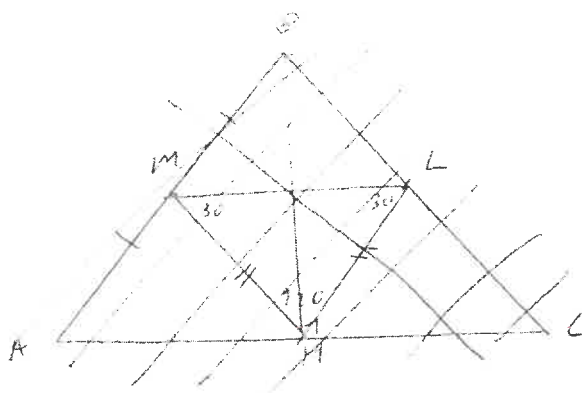
М А 0 0 0 2 9 0 3 3 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$MH = HL = 10$$



$$MH = HL = 10$$

найдем что

ML - средняя *неверно*

линия ТК

MH = HL - радиус

от высоты и () в середине стороны

AB → BL = LL значит OABC р/б ТК

медiana совпала с биссектр.

$$AB = AC$$

ΔBHC - прит в нем медиана

HL = BL → MBLH - ромб тогда ∠LBN =

= ∠BLH = 60° → OBLH - прит →

→ BH = LH = 10 ТК ΔABC р/б то

тогда их сумма 20 CH = BH = 10

Ответ: 20

ОБ.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 9 1 4 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	16	0	5	0		41

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1
Если ~~каждая~~ ~~девочка~~
Меня не играла с Катей,
значит каждая девочка сыграла
не более 5 партий т.к у всех было оди. количество партий.
т.к девочек 7 минус одна девочка и минус 1 партия из-за
того, что я не играла с Катей.

Если Маша играла с Ниной, Катей и Светой, то у каждой
девочки было не менее 3 партий
Кого: либо 3 либо 4 либо 5.

Сделаем девочек как граф.

Если попутная степень вершин

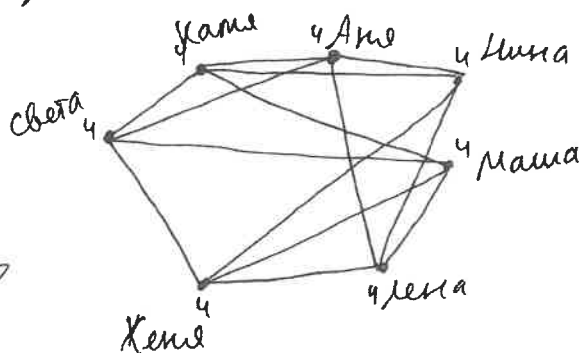
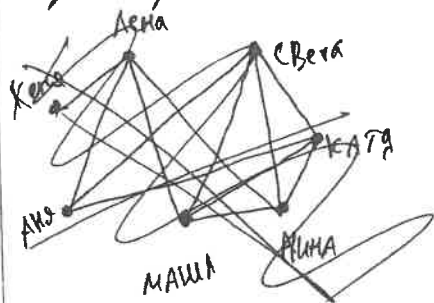
равна кол-ву рёбер. Кол-во рёбер-целое

Кол-во партий у каждой девочки

степ	кол-во рёбер в графе
3	7·3:2 = 10,5
4	7·4:2 = 14
5	7·5:2 = 17,5

подходит только 4 партии

Пример



Ответ: 4

208

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 9 1 4 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 = -\frac{n^2}{3} + \frac{4n}{3} + 20$$

$$-\frac{n^2}{3} + \frac{4n}{3} + \frac{60}{3} = -\frac{n^2 + 4n + 60}{3} \quad (\cdot 3)$$

$$-n^2 + 4n + 60 > 0 \quad \text{т.к. натур. число}$$

$$n^2 < 4n + 60$$

Число не будет большим, поэтому можно решить подбором

$$n=1$$

$$1 < 4 + 60 - \text{верно} - \text{подходит}$$

$$n=2$$

$$4 < 8 + 60 - \text{верно}$$

$$n=3$$

$$9 < 12 + 60 - \text{верно}$$

$$n=4$$

$$16 < 16 + 60 - \text{верно}$$

$$n=5$$

$$25 < 20 + 60 - \text{верно}$$

$$n=6$$

$$36 < 24 + 60 - \text{верно}$$

получилось 9 чисел

• 3 было не совсем прав подроз, т.к. число могло быть גדדין
и • 3 получалось натур, но все подходящие n среди
них найдены 9.

Проверим их

$$n=2 \quad -\frac{4}{3} + \frac{8}{3} + \frac{60}{3} = -\frac{64}{3}$$

$$n=3 \quad -3 + 4 + 20 = 21$$

$$n=4 \quad -\frac{16}{3} + \frac{16}{3} + 20 = 20$$

$$n=5 \quad -\frac{25}{3} + \frac{20}{3} + \frac{60}{3} = \frac{55}{3}$$

$$n=6 \quad -\frac{36}{3} + \frac{24}{3} + 20 = 14$$

$$n=7 \quad -\frac{49}{3} + \frac{28}{3} + 20 = 13$$

$$n=8 \quad -\frac{64}{3} + \frac{32}{3} + 20 = 20 \frac{32}{3}$$

$$n=9 \quad -\frac{81}{3} + \frac{36}{3} + \frac{60}{3} = 5$$

$$n=1 \quad -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + 20 = 21$$

$$n=... - \text{подходит}$$

$$n = \{1; 3; 4; 6; 7; 9\}$$

Ответ: 6

подходит 6 значений n

165.

ВНИМАНИЕ! Проверять только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 9 1 4 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Если каждая девочка сыграла с каждой не больше 1 партии =>

либо 1 партию либо 0 партий сыграла

По условию 0 рукопожатий. Если бы каждая девочка сыграла с каждой по 1 разу, то всего партий было бы $\frac{n(n-1)}{2}$ т.е. $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ партия.

Сделаем граф для удобства (без игр т.к их кол-во может быть разным)

1) Если Маша не играла с Катей, значит каждая девочка сыграла не 6 партий (со всеми кроме себя), а 5. т.к все играют одинаковое число партий.

2) В графе полусумма степеней вершин равна кол-ву рёбер.

3) полусумма степеней равна 17,5, но рёбра должны быть целые т.к рёбра это партии (и они точно не могут быть дробными).

4) на основе п. 2 заполняем таблицу, где указано кол-во партий

4	7	4	2	14	- подходит
3	7	3	2	10,5	
2	7	2	2	7	- подходит
1	7	1	2	3,5	

т.е. каждая девочка сыграла с каждой по 2 раза

пример игр по 4



ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

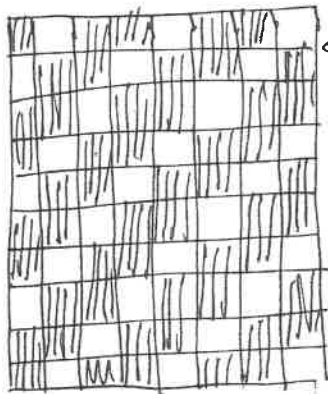
М А О О О 2 9 1 4 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

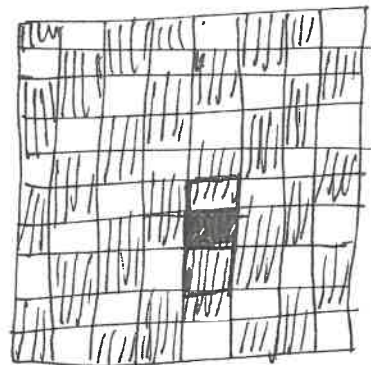
Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Если у нас ^{нч} прямоугольник 3×1 , то минимальное количество монет будет тогда, когда в каждой такой фигуре лежит ~~хот~~ 2 монеты и ещё + 1 чтобы edge-то было 3. т.к. если в каком-то прямоугольнике будет меньше двух монет он пойдёт туда ещё одну и всё равно там будет 2, а не 3, но всего клеток на такой доске $10 \cdot 8 = 80$ $80 : 3$ получается 26 по 3×1 и ещё 2 клетки. Одна из этих 2 клеток будет с монеткой, а вторая без т.к. представим, что это тоже 3×1 , тогда от неё будет отходить ещё 1 минимальная клетка и она будет незакрашенной, получается, что монет должно быть ~~26 + 2 = 28~~ $80 - 26 - 1 = 54$ монеты.



пример.

Если в одну свободную клетку такого поля положить 4 монеты, то будет закрашенный прямоугольник 3×1 , как пример так



Ответ: 54

58.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 9 1 4 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Рассмотрим неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3$$

Наибольшее значение, которому может равняться a^2 или b^2 или c^2 (что-то одно) это 2,9999..., тогда остальные слагаемые в квадрате будут меньше или равны 0,0001...

$\sqrt{2,9999} \approx 1,8$ (округление $1,8 = \frac{9}{5}$), получаем один из слагаемых меньше, чем $\frac{1}{4}$. $\frac{18}{6,8} = \frac{9}{34} \leq \frac{1}{4}$: остальные слагаемые дадут $\frac{1}{4}$ или меньше.

$\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ - верно (если округлили в большую сторону т.к. в меньшую сторону было бы не рациональным преобразованием т.е. ~~не~~ дальнейшее решение можно было не проводить)

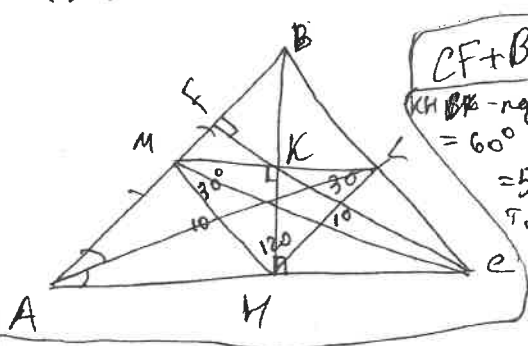
Если они равны то $a=b=c=1$, получаем $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ - тоже верно

Рассмотрим какое-нибудь среднее значение например

$$a \approx 1,4 (a^2 \approx 2) \quad b \approx c \approx 0,7 (b^2 \approx 0,5), \text{ тогда}$$

$$\frac{1,4}{6,4} + \frac{0,7}{5,7} + \frac{0,7}{5,7} \approx \frac{34}{72} \Rightarrow < \frac{1}{2} - \text{выходит верно}$$

Получается, что наибольшее значение достигается при равенстве переменных, далее какое-то число будет становиться больше (или меньше сразу), а сумма будет становиться меньше $\Rightarrow$ равенство fractional доказано методом рассуждений Ч.Д.



CF + BH - ?
 Решение: $\angle MLN = \angle LMN = 30^\circ$ (т.к. $\triangle MLN$ - равносторонний)
 а $\angle MNL = 120^\circ$ (по сумме углов треугольника).
 $\angle MLN = 30^\circ \Rightarrow$ угол при вершине $\angle L = 120^\circ$ - ост. угол. $\Rightarrow \angle LNK = \angle MNK = 60^\circ \Rightarrow$ угол при вершине $\angle K = 120^\circ$ - ост. угол. $\Rightarrow \angle K = 120^\circ$
 $\Rightarrow \angle K = 120^\circ$
 т.к. $BH \perp AC$ и $CF \perp AB$ и M - середина AB (т.к. CM - медиана) $\Rightarrow \triangle MLC$ - сред. линия $\Rightarrow$ по теор. Пифагора $LM^2 + KN^2 + KL^2 =$; $KL = \sqrt{5} = 5\sqrt{3}$
 HK - медиана т.к. равнобедрен $\Rightarrow ML = 2KL = 10\sqrt{3}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 8 4 0 3 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	0	20	0		60

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа

№2

Дано:

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 \text{ — натур. число}$$

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = \frac{-n^2 + 6n}{5} + 11 = \frac{n(6-n)}{5} + 11 \text{ — натур. число} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n(6-n) : 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{либо } n : 5, \text{ либо } 6-n : 5.$$

$$1) n : 5 \Rightarrow n = 5x$$

$$\frac{n(6-n)}{5} + 11 = \frac{5x(6-5x)}{5} + 11 = x(6-5x) + 11 \geq 1 \text{ (тк натур. число } \geq 1)$$

$$x(6-5x) \geq -10$$

$$10 \geq x(5x-6), \text{ заметим, что при } x \geq 3:$$

$$x(5x-6) \geq 3(5 \cdot 3 - 6) = 3(15-6) = 3 \cdot 9 = 27 > 10 \text{ — противоречие.}$$

(продолжить ~~1610~~ $x < 3$, но тк n — натур. число $x \geq 1$, значит:

$$a) x = 1 \Rightarrow n = 5 \cdot 1 = 5, \text{ тогда}$$

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = -\frac{1}{5} \cdot 25 + \frac{6}{5} \cdot 5 + 11 = -5 + 6 + 11 = 12 \text{ — натур. число}$$

$$b) x = 2 \Rightarrow n = 5 \cdot 2 = 10, \text{ тогда}$$

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = -\frac{1}{5} \cdot 100 + \frac{6}{5} \cdot 10 + 11 = -20 + 12 + 11 = 3 \text{ — натур. число}$$

В случае, когда $n : 5$, получили 2 ответа ($n = 5$; $n = 10$)

$$2) 6-n : 5 \Rightarrow 6-n = 5y \Rightarrow n = 6-5y, y \text{ — целое, тк } 6 \text{ и } n \text{ — натур.}$$

$$\frac{n(6-n)}{5} + 11 = \frac{(6-5y)5y}{5} + 11 = y(6-5y) + 11 \geq 1 \text{ (тк натур. число } \geq 1)$$

$$y(6-5y) \geq -10; y(5y-6) \leq 10. \text{ Если } y \geq 3, \text{ то}$$

$$y(5y-6) \geq 3(5 \cdot 3 - 6) = 3 \cdot 9 = 27 > 10, \text{ противоречие.}$$

$$\text{Если } y \leq -1, \text{ то } 5y \leq -5 \Rightarrow \text{см. } \text{так как } 5y \leq -5 \Rightarrow 5y - 6 \leq -11, \text{ так как } y \leq -1$$

$$\Rightarrow \text{так как } 6-5y \geq 6+5=11, y \leq -1 \Rightarrow y(6-5y) \leq -1 \cdot 11 = -11, \text{ противоречие}$$

Получаем, что $y \leq 2$, а так же $y \geq 0$ и y — целое, значит

$$a) y = 0 \Rightarrow 6-n = 5 \cdot 0 = 0 \Rightarrow n = 6, \text{ тогда } -\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = -\frac{36}{5} + \frac{36}{5} + 11 = 11 \text{ — натур. число}$$

$$b) y = 1 \Rightarrow 6-n = 5 \cdot 1 = 5 \Rightarrow n = 1, \text{ тогда } -\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = -\frac{1}{5} + \frac{6}{5} + 11 = 12 \text{ — натур. число}$$

$$c) y = 2 \Rightarrow 6-n = 5 \cdot 2 = 10 \Rightarrow n = -4, \text{ не подходит, тк } n \text{ — натур. число}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 9 4 0 3 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2 Продолжение
Получаем, в случае $6 \cdot n : 5$ в
ответах ($n=6, n=7$)

Итого:

Получаем варианты

$n=5, n=7; n=6, n=7$, получаем, что кол-во походящих и
сл $n=5$ сл $6 \cdot n : 5$ равно 4

Ответ: 4 208.

№1

Ответ: 36 или 27 переписок

Заметим, что тк девочек 9 и ~~10~~ М уже переписывалась с
5 девочками, значит тк все девочки одни кол-во раз переписыва-
лись, то каждая из них переписывалась ^{или 5 или 6 или 7 или 8} раз (то есть
либо все по 5 раз, либо по 6 раз, либо по 7 раз, либо по 8 раз). Предс-
тавим эту задачу в виде графа (9 вершин, каждая имеет имя одной
девочки, и каждая имя записано ровно 1 раз, соединяем вершины
ребром, если девочки с именами, записанными на этих верши-
нах переписывались), тк степень каждой вершины одинакова, то
кол-во ребер = ~~получим~~ $\frac{9 \cdot \text{степень каждой вершины}}{2}$, но тк кол-во ребер

целое $\Rightarrow 9 \cdot \text{кол-во степеней каждой вершины} : 2 \Rightarrow \text{степень каждой}$
вершины четная $\Rightarrow \text{степень каждой вершины 6 или 8 (5 и 7 не}$
подходят), значит кандидатуры на ответ $\frac{6 \cdot 9}{2} = 27$ ребер; $\frac{8 \cdot 9}{2} = 36$ ребер
Приведём примеры:

1) На 36 ребрах. Каждая девочка переписывалась с каждой
(то есть 8 раз), тогда ребер $\frac{8 \cdot 9}{2} = 36$

2) На 27 ребер. В каждой строке указывы девочки, ~~с которыми дан-~~
ная девочка не переписывалась, в каждой строке 2 имени $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \text{кол-во ребер } \frac{9 \cdot 6}{2} = 27$ (то есть каждая девочка пе-
реписывалась со всеми, кроме двух девочек, записан-
ных справа от нее в строке)

Ж	Ан	К	
М	В	Ал	
Н	В	Ан	
К	Х	С	
Л	С	Ал	
Ан	Н	Ж	
С	Л	К	
Ал	Л	М	
В	М	Н	

Ж - Женя Ан - Аня
М - Маша С - Света
Н - Нина Ал - Алена
К - Катя В - Варя
Л - Лена

208.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 8 4 0 3 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

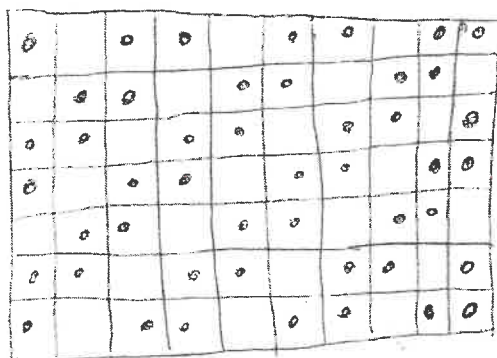
1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

14

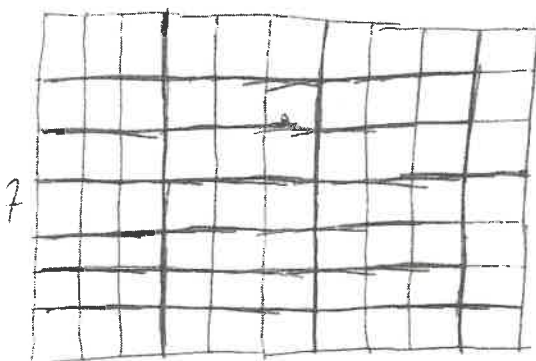
Ответ: 48 монет

Пример разложения ≤ 47 монет, из которого не получится прямоугольнички 3×7 или 1×3 из монет



10

Док-во, почему при любом разложении 48 монет какие-то 3 образуют прямоугольнички 1×3 или 3×7 :



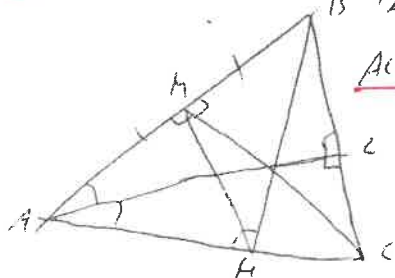
10

Разобьём доску на 24 части, как на рисунке (23 части содержат прямоугольнички 3×7 или 1×3 , 1 часть является одной клеточкой). Запомним, что если найдётся разложение, в котором никакие 3 монеты не образуют прямоугольничка 1×3 или 3×7 , то в каждой из 23 частей (каждая из которых 3×7 или 1×3), показанных на рисунке будет ≤ 2 монеты, значит всего $\leq 23 \cdot 2 + 1 = 47$ монет, а у нас 48 монет, противоречие $\Rightarrow$ при любом разложении 48 монет какие-то 3 образуют одна из этих фигур 1×3 или 3×7 .

13

Ответ: $24\sqrt{3}$

В равностороннем треугольнике.



В $\triangle HME = AM = MB$ (т.к. $BH \perp AC$)

$AC = BC = AB = 24$, $AM = 12$

$$BH^2 = 24^2 - 12^2 = 12 \cdot 36 = 12^2 \cdot 3 \Rightarrow BH = 12\sqrt{3}$$

$$CM^2 = 24^2 - 12^2 = 12 \cdot 36 = 12^2 \cdot 3$$

$$BH + CM = 12\sqrt{3} + 12\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$$

208.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

m	A	0	0	0	2	9	4	0	3	2	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа
в рамке справа

$$NS \quad a^3 + b^3 + c^3 = 3$$

$$\frac{1}{a^4+3} + \frac{1}{b^4+3} + \frac{1}{c^4+3} \geq \frac{3}{4}$$

$$4(b^4+3)(c^4+3) + 4(a^4+3)(c^4+3) + 4(a^4+3)(b^4+3) - 3(a^4+3)(b^4+3)(c^4+3)$$

$a^4 + 3 = x$
 $b^4 + 3 = y$
 $c^4 + 3 = z$

$$\frac{x-3}{a} + \frac{y-3}{b} + \frac{z-3}{c} = 3 \quad 0 < a < \sqrt[3]{3}, 0 < b < \sqrt[3]{3}, 0 < c < \sqrt[3]{3}$$

$$b(x-3) + a(y-3) + ac(z-3) = 3abc$$

$$\sqrt[3]{x^2 b^2 c^2} = \sqrt[3]{4^3 \cdot 4 \cdot 8} = -64 = -2^6 \cdot 2^1 \cdot 2^2$$

$$4yz + 4xz + 4xy \geq 3 \sqrt[3]{4^3 x^2 y^2 z^2} = 12 \sqrt[3]{x^2 y^2 z^2} \geq 3xyz$$

$$4^3 x^2 y^2 z^2 \rightarrow 3 x^3 y^3 z^3 \text{ (TK } x, y, z > 0) \quad | \quad x^2 y^2 z^2 \text{ (TK } x, y, z > 0)$$

$$69 \sum_{i=1}^n xyz = (a^4+3)(b^4+3)(c^4+3)$$

$$64 \geq (a^4+3)/(b^4+3)/(c^4+3); \text{ заметим, что } a^3 < 3 \quad \begin{matrix} 0 \\ \downarrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 \\ \sqrt{} \end{matrix}$$

Заметить, что мы ххе доказ-
зали в 11 используя, что

$\frac{x-3}{a} + \frac{y-3}{b} + \frac{z-3}{c} = 3, x = a^4+3, y = b^4+3, z = c^4+3, a, b, c \in \mathbb{R}, 0 < a, b, c < \sqrt[4]{3}$

05.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 9 6 8 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 1

1	2	3	4	5	6	Σ
20	16	0	20	0		56

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Пусть орочки - вершины,
перешко - ребра, (в виде графа), тогда

количество вершин - 9.

Заметим, то можно сказать, что каждая орочка
увлаживает в определенном количестве перешко. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ степень вершины у всех орочков.

По условию Маша перешкоит Шикай, Котей, Лекс,
Анж и Светой. то есть степень вершины Заметим,
хотя бы 5. У Светой 2 ребра, у Анж 1 ребро, у Лекс 2 ребра, у Шикай 2 ребра.

Потому заметим, что степень каждой вершины
не может быть чет. П.к. мы знаем, что сумма степеней

Значит мы все вершины графа = удвоенному количеству
ребер. $\Rightarrow$ сумма степеней всех вершин $\div 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ А вершин у нас нет, и если бы степень у всех
была чет, тогда сумма степеней $\div 2$ противоречит

Значит у нас у всех степени четные

Значит так как мы знаем, что степень $\geq 5 \Rightarrow$

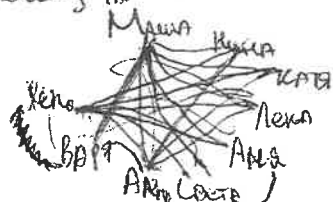
$\Rightarrow$ то есть каждая орочка имеет 6, 8 или 9

количество ребер если степень 6 $= \frac{6 \cdot 9}{2} = 27$ ребер (ребер)

количество ребер если степень 8 $= \frac{8 \cdot 9}{2} = 36$ ребер (ребер)

Значит так может быть примеры:

Для каждой орочки



Ответ: 27, 36.

208.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А 0 0 0 2 9 6 8 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 2

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 =$$

$$= -\frac{1}{5}n(n-6) + 11 \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{5}n(n-6) + 11 > 0$$

$$-\frac{1}{5}n(n-6) > -11$$

Заметим что при $n \geq 7$ ~~$-\frac{1}{5}n(n-6) < 0$~~ $\Rightarrow -\frac{1}{5}n(n-6) < 0$

так $-\frac{1}{5}n < 0$ $(n-6) > 0$

Заметим что при $n=11$ $-\frac{1}{5}n(n-6) = -11$

или $-11 \neq -11$

Значит при $n \geq 11$ чл

нас $-\frac{1}{5}n(n-6)$ будет

меньше или равно -11
против

Значит $1 \leq n \leq 10$

$n=1$

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = -\frac{1}{5} + \frac{6}{5} + 11 = 12 \text{ не возм}$$

$n=2$

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = -\frac{4}{5} + \frac{12}{5} + 11 = \frac{8}{5} + 11 = 12\frac{3}{5} \notin \mathbb{N} \text{ не возм}$$

$n=3$

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = -\frac{9}{5} + \frac{18}{5} + 11 = \frac{9}{5} + 11 \notin \mathbb{N} \text{ не возм}$$

$n=4$

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = -\frac{16}{5} + \frac{24}{5} + 11 = 11\frac{8}{5} \notin \mathbb{N} \text{ не возм}$$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А 0 0 0 2 9 6 8 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 2 жюри

$$n=5$$

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = -\frac{1}{5} \cdot 5^2 + \frac{6}{5} \cdot 5 + 11 = -5 + 6 + 11 = 12 \in \mathbb{N}_{\text{неч}}$$

$$n=6$$

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = -\frac{1}{5} \cdot 6^2 + \frac{6}{5} \cdot 6 + 11 = -\frac{36}{5} + \frac{36}{5} + 11 = 11 \in \mathbb{N}_{\text{неч}}$$

$$n=7$$

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = -\frac{1}{5} \cdot 7^2 + \frac{6}{5} \cdot 7 + 11 = -\frac{49}{5} + \frac{42}{5} + 11 = 11 - \frac{7}{5} \notin \mathbb{N}_{\text{неч}}$$

$$n=8$$

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = -\frac{1}{5} \cdot 8^2 + \frac{6}{5} \cdot 8 + 11 = -\frac{64}{5} + \frac{48}{5} + 11 = 11 - \frac{16}{5} \notin \mathbb{N}_{\text{неч}}$$

$$n=9$$

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = -\frac{1}{5} \cdot 9^2 + \frac{6}{5} \cdot 9 + 11 = -\frac{81}{5} + \frac{54}{5} + 11 = 11 - \frac{27}{5} \notin \mathbb{N}_{\text{неч}}$$

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n$$

$$n=10$$

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = -\frac{1}{5} \cdot 10^2 + \frac{6}{5} \cdot 10 + 11 = -20 + 12 + 11 = 3 \in \mathbb{N}_{\text{неч}}$$

У нас получаются значения n , $n \in \{1; 5; 6; 10\}$

Ответ: 4

165.

Задача 4

Ответ: 48.

Почему нельзя меньше размер на 47 клеток, где не крыется такой прямоугольник 1×3 или 3×1 , во всем клетка не может покрыться.

X	X		X	X		X	X	X
	X	X		X	X		X	X
X		X	X		X	X		X
X	X		X	X		X	X	X
	X	X		X	X		X	X
X		X	X		X	X		X
X	X		X	X		X	X	X

X-клетки; 48

Значит, 48 клеток

или 7-клеточный прямоугольник

прямоугольником 1×3 или 3×1

не найдется, то все клетки заняты



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А 0 0 0 2 9 6 8 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

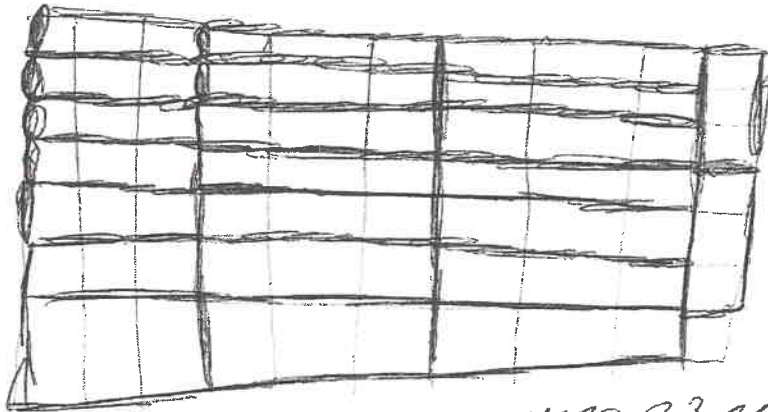
Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Получу при 48 листах

Всего ~~48~~ листов

Разделим доску на прямоугольники 23×3 и 3×4 , по 23 листа

$$23 \cdot 3 + 1 = 7 \cdot 10$$



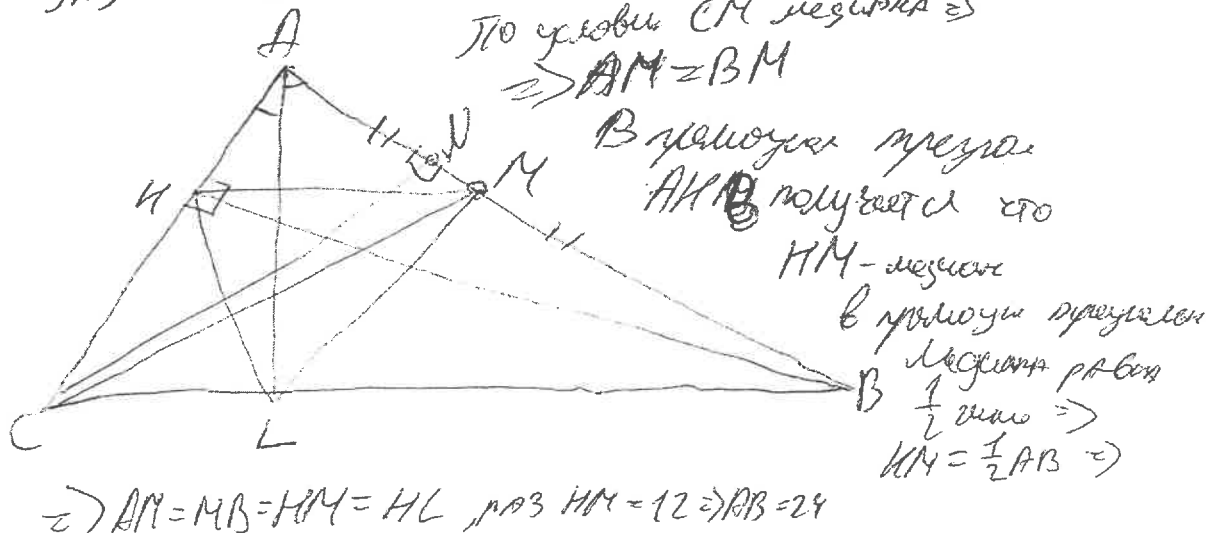
Потому заметил что у нас 23 прямоугольника 23×3 и 1 квадрат, тогда т.е. у нас 48 листов.

Может в прямоугольниках хотя бы 47 листов
Потому у нас 23 прямоугольника и 47 листов, тогда
по формуле площади получается хотя бы
47 прямоугольников с площадью (23 · 2 < 47)

Ответ: 48

205.

Задача 3



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 2 9 6 8 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$S_{\triangle ABC} = a \cdot h_a \cdot \frac{1}{2}$$

Пусть CN - высота

$$\text{Тогда } \frac{CN \cdot AB}{2} = \frac{BK \cdot AC}{2}$$

$$\frac{CN \cdot a}{2} = \frac{BK \cdot a}{2}$$

Ос.

Задание 5.

Пусть $a^3 + b^3 + c^3 = k$ тогда

Нужно выразить $\frac{1}{k+1}$

$$\frac{1}{k+a^3} + \frac{1}{k+b^3} + \frac{1}{k+c^3} \geq \frac{1}{k+1}$$

$$\frac{k}{k+a^3} + \frac{k}{k+b^3} + \frac{k}{k+c^3} \geq \frac{k}{k+1}$$

Равенство достигается при $a=b=c=1$

Ос.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M A O O O 2 9 7 7 2 2 6

История (III. ЗАНЮ. ИЯИЬ)

	1	2	3	4	5	6	Σ
15	15	X	12	X			42

Journal of Management Education 34(10):1191-1205

Еще по той же формуле вычислим значение Δ для второго изгибающего момента M_2 (см. рис. 1.10):

158.

$$1) - \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{4}{81}$$

[illegible]

$$\frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \Rightarrow n = 0 \Rightarrow \text{no } \alpha \in (-1, 1)$$



Order 6233 27 March 19 158.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

MA 000 2977226

Шифр 01 ЗАПОВНЯТЬ

Роботизация производства и ее влияние на рынок труда

4. E. n. 2. (1000000)	1	2	3	4	5	6	Σ

Капная пилота заповняється жорстким запобіганням.

[illegible]

2007.02.08 2007.02.08 2007.02.08 2007.02.08 2007.02.08

2. В первом пункте 1.3 статьи 840 КоАП РФ

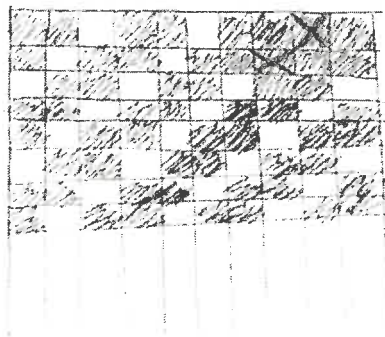
Handwritten text: *Handwritten text, possibly a signature or date, partially obscured by the binding.*

[Handwritten signature]

James G. Briggs, 1877

- 50 -

Order of Bona 55 names



125.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М А О О О 2 8 7 8 8 2 6

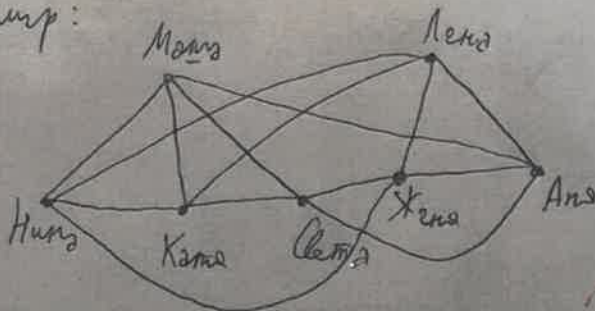
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	16	X	12	0		48

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1. Давайте поймём что каждая девочка не могла сыграть со всеми остальными ровно 1 раз. Везде это бы означало, что Женя сыграла с каждой, что по условию запрещается. Значит каждая девочка сыграла не больше 5 партий. Но и не меньше 3 п.к. Мы по условию уже играли три партии с Ниной, Катей и Светой. Значит кол. партий каждой девочки (обозначим как x) $5 \geq x \geq 3$. Партии не бывают нулевого количества значит x может принимать значения либо 5 либо 4 либо 3. Но теперь вспомним что девочки уже сыграли количество (около 7) и то, что в табл. графе (представим вершины графа как девочки, а рёбра их партии) количество вершин с нулевой степенью всегда чётно. Значит варианты 5 и 3 нам не подходят. Только 4.

Пример:



Ответ: 4 партии.

208.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М А О О О 2 8 7 8 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

② $-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20$

Дадём привиденный вид выражения

$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n = \frac{4n - n^2}{3} = \frac{n(4-n)}{3}$

И так как мы работаем с тем, чтобы исходное выражение было натуральным мы говорим что $\frac{n(4-n)}{3}$ либо точно натурально либо целое отрицательное меньше 20 по модулю. Ввиду того что у нас в выражении есть число 20 и оно натурально.

Попытаемся понять когда у нас $\frac{n(4-n)}{3}$ целое? Тогда когда числитель делится на знаменатель. Получим $n(4-n) \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow \begin{cases} n \equiv 0 \pmod{3} \\ n \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$

Начнём перебирать варианты для n:

n=1 $-\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + 20 = 21$ (подходит)

n=3 $-\frac{9}{3} + \frac{12}{3} + 20 = 20 + \frac{3}{3} \cdot 21$ (✓)

n=4 $-\frac{16}{3} + \frac{16}{3} + 20 = 20$ (✓)

n=6 $-\frac{36}{3} + \frac{24}{3} + 20 = 20 - 4 = 16$ (✓)

n=7 $-\frac{49}{3} + \frac{28}{3} + 20 = 20 - \frac{21}{3} = 13$ (✓)

n=9 $-\frac{81}{3} + \frac{36}{3} + 20 = 20 - \frac{45}{3} = 20 - 15 = 5$ (✓)

n=10 $-\frac{100}{3} + \frac{40}{3} + 20 = 20 - \frac{60}{3} = 20 - 20 = 0$ (X)

n=12 $-\frac{144}{3} + \frac{48}{3} + 20 = 20 - 32 = -12 < 0$ не подходит (X)

Ну и далее говорим что при увеличении n наше выражение

$\frac{n(4-n)}{3}$ либо по модулю будет больше 20 и обязательно отрицательно.

Ведь если $\frac{n(4-n)}{3} > 0$

$n(4-n) > 0 \Rightarrow \Rightarrow n < 4$ это либо 1 либо 3

но при n=4 это выражение равно 0.

Ответ: 6.

160.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М А О О О 2 9 7 8 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверьте только то, что записано с этой стороны листа в правой строке

4

Придумали следующую раскраску для данной задачи.

1/1	1/1	1/1	1/1
1/1	1/1	1/1	1/1
1/1	1/1	1/1	1/1
1/1	1/1	1/1	1/1
1/1	1/1	1/1	1/1
1/1	1/1	1/1	1/1
1/1	1/1	1/1	1/1
1/1	1/1	1/1	1/1
1/1	1/1	1/1	1/1
1/1	1/1	1/1	1/1

Черных клеток всего 54.

Заметим, что как бы мы не раскрасили прямоугольник 1×3 или 3×1 у него обязательно будут черными ровно 2 клетки.

Можно этот факт использовать в доказательстве по принципу Дирихле.

Утверждать следующее: Если у Влада ровно 55

монеток. По принципу Дирихле найдется такой прямоугольник

1×3 или 3×1 что будет в 3 клетки из которых монетки.

Ведь если берем любую раскраску и поместим на черные клетки по 1 монете у нас всегда получится еще 1 монета и куда бы мы ее не поставили у нас будет что в каком то

прямоуг. 1×3 или 3×1 будет 3 монетки. раскраска наша такая

Почему мы обязательно поместим монету на черные клетки, почему нельзя как-то по другому? Ответ: 55. Минимум монет

Можно, однако мы достигли цели

(важно док. что миним 55 монет)

прямого доказательства. Ведь принцип Дирихле

как бы поучительно само по себе доказательство

здесь что либо в чем либо (важно 2 монеты

в одном прямоуго. 1×3 или 3×1) в макс. количестве

(важно вообще все прямоуго. 1×3 или 3×1 , выделены монеты)

и нахождение хотя бы одного отличия отсюда благодаря остатку.

(важно сразу мы сами добываем остаток такой минимальный именно +1)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4.

М А 0 0 0 2 8 7 8 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

5) Пусть то что $a^2+b^2+c^2=3$

следует, что $a^2-1+b^2-1+c^2-1=0$

$$(a-1)(a+1) + (b-1)(b+1) + (c-1)(c+1) = 0$$

Сразу разберем тот вариант когда каждый слагаемое равно нулю
то есть когда $a, b, c = 1$.

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ верно.}$$

Од.

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяться только то, что записано с этой стороны листа

в рамке справа

в рамке справа

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 9 8 4 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
15	16	0	20	0		51

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 1.

М.К. * Женя не играла с
Катей * и Маша играла
с тремя девочками, но ком-ва
партий для каждой девоч-
ки от 3 до 5, ведь все сыгра-
ли одинаковое число.

~~Женя не 3:~~

М	Н	К	С	Л	Ж	А
М						
Н						
К						
С						
Л						
Ж						
А						

М	Н	К	С	Л	Ж	А
М						
Н						
К						
С						
Л						
Ж						
А						

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 9 8 4 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

но также кон

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

при должно быть целым, при

и $\frac{3 \cdot 7}{2}$ не целое, при

$4 \rightarrow \frac{4 \cdot 7}{2} = 14$, при $5 \rightarrow \frac{5 \cdot 7}{2}$ не

целое $\Rightarrow$ можно быть только

и парами у каждой.

Ответ: 4. (пример не требуется т.к. сказано, что такое было).

155

ВНИМАНИЕ! Проверять только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 9 8 4 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N2.

Преобразуем:

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20$$

$$-\frac{n^2}{3} + \frac{4n}{3} + 20$$

$$\frac{4n - n^2}{3} + 20$$

т.к. 20 - не натуральное, то $\frac{4n - n^2}{3}$ должно быть

как натуральное число т.е.

$$4n - n^2 : 3 \text{ или } n(4 - n) : 3 \quad n > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ при $n=1$ $1(4-1)=3:3$ подходит

(также $\frac{4n - n^2}{3} > 20 - 20$) при $n=2$

$2(4-2)=4 \nmid 3$, нет; при $n=3$ $3(4-3)=3:3$

подходит, при $n=4$ $4(4-4)=0:3$ подходит; при $n=5$ $5(4-5)=-5 \nmid 3$ - Нет при

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 9 8 7 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$n=6 \quad 6(4-6) = -12 : 3 \text{ подходит}$$

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

при $n=7$; $7(4-7) = -21 : 3$ ~~подходит~~;

при $n=8$ $8(4-8) = -32 : 3$ - Нет; при

$n=9$ $9(4-9) = -45 : 3$ - подходит;

при $n=10$ $10(4-10) = -60 : 3$, но при

мы можем также сказать,

что $n(n-1) > 3 \cdot (-20) = -60$ т.е. $n=10$

не подходит и числа больше-
также, среди чисел от 1 до 9

подходят: 1, 3, 4, 6, 7, 9 т.е. 6
возможных n.

Ответ: 6.

168.

ВНИМАНИЕ! Проверьте только то, что записано с этой стороны листа

в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 9 8 4 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

нч,

Всего 80 клеток их можно
разделить на 26 прямоуголь-
ников 1×3 или 3×1 и ещё 2
клетки если ~~бы~~ монеток
меньше ~~или~~ или равно $26 \cdot 2 + 2 =$
 $= 54$, то существует расстанов-
ка при которой нет 1×3 или 3×1
с монетами, если ≥ 55 , то
по принципу Дирихле если
заполнить те две миниме
клетки монетами среди
оставшихся прямоугольни-
ков точно будет ≥ 1 с монет-

ВНИМАНИЕ! Проверьте только то, что записано с этой стороны листа
в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

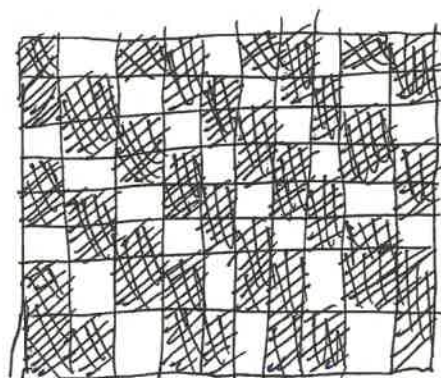
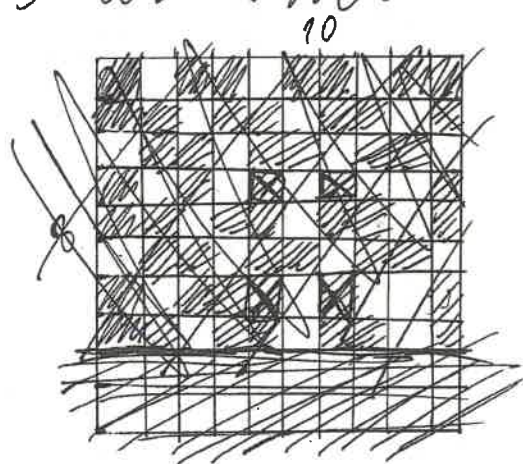
М А О О О 2 9 8 4 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

таких, если мы -
 не клетки не заполнять, но
 тем более, значит осталось
 привести расстановку 54
 монет где нет 1x3 или 3x1 с
 3 монетами!



Пример.

Ответ: 55.

205.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 9 8 4 8 2 6

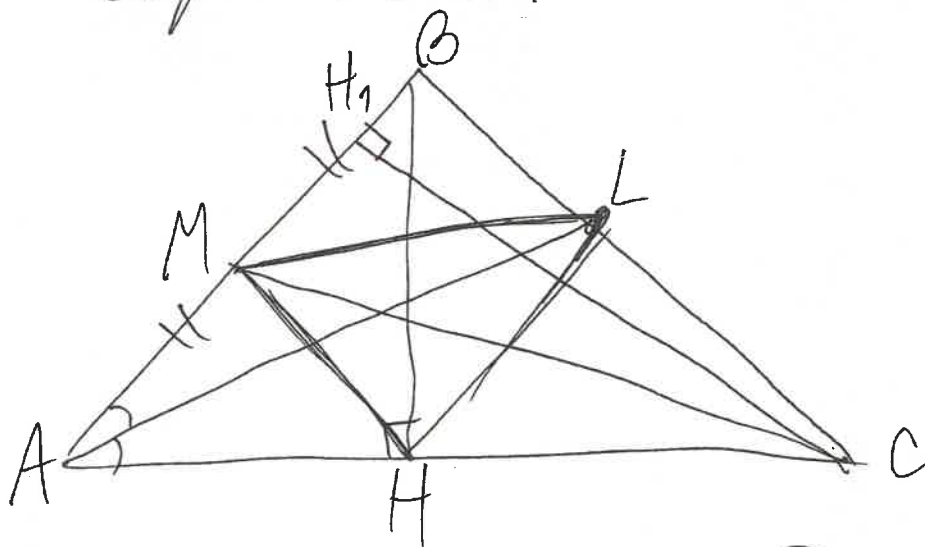
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3.

Чертёж:



$\triangle MLH$ - равнобедренный $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle MH = \angle MLH = 30^\circ, \angle MHL =$
 $= 180 - 30 - 30 = 120^\circ$ в $\triangle ABH$ (прямо-
 угольная) HM - медиана к гипотенузе $\Rightarrow MH = AM = MB = 10. \Rightarrow$
 $\Rightarrow \triangle AMH, \triangle BMH$ - равнобедренные
 $\Rightarrow \angle HAM = \angle MHA$ и $\angle MHB = \angle MBH.$



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 7

М А О О О 2 9 8 4 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Если $MB = a$, а
 $BL = \frac{b}{k}$ и $LC = k \frac{b}{k}$, то $AB = 2a$ и
 $2a \cdot kb = b \cdot AC$ т.к. AL - биссектриса
 $\Rightarrow 2akb = b \cdot AC \Rightarrow AC = 2ak$, если
 $AH = d$, а $H_1B = c$, то $H_1B^2 = (2a)^2 - d^2 =$
 $= (b + kb)^2 - (2ak - d)^2$, также $CH_1^2 =$
 $= (b + kb)^2 - c^2 = (2ak)^2 - (2a - c)^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (b + kb)^2 = (2a)^2 - d^2 + (2ak - d)^2 = (2ak)^2 - (2a - c)^2$
 $+ c^2 \Rightarrow 4a^2 - d^2 + 4a^2k^2 - 4akd + d^2 = 4a^2k^2 - 4a^2 + 4ac$
 $- c^2 + c^2 \Rightarrow 4a^2 - 4akd = 4ac - 4a^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow a - kd = c - a \Rightarrow 2a = c + kd$

05.



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 9 8 4 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

н б.

если $a=b=c$, то $a=1$ и $\frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} \leq \frac{1}{2}$ т.к. $= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

По методу Штурма при
сближении слагаемых с кон-
стантной суммой их произ-
ведение увеличивается $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $a=b=c$ — максимум,

$a \leq b \leq c < 2 \Rightarrow \frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} \leq \frac{6}{7}$

ос.

ВНИМАНИЕ! Проверяться только то, что записано с этой стороны листа
в рамке справа



Вариант № 1

М А О О О 2 9 9 0 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
10	18	0	12	0		40

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проводятся только те, что записано с этой стороны листа
и ранее списаны



М
Максимальное наименьшее и наибольшее количество игр, которые могла сыграть каждая из девочек.

Наименьшее будет 2, т.к. Лена сыграла хотя бы с Женей и Анет.

Наибольшее будет 5, т.к. больше 7-1=6 игр сыграть нельзя (Лена сыграла не больше 1 раза), а Женя не играла (Катей) $\Rightarrow 6-1=5$ игр максимум, из-за того, что все сыграли одинаковое число игр.

Количество игр можно посчитать по формуле:

$\frac{k \cdot n}{2}$, где k - кол-во участников n - количество игр, которые сыграли каждый.

Рассмотрим все допустимые значения n

При $n=2$. $k=7$, т.к. по условию девочек 7.

Количество игр $\frac{7 \cdot 2}{2} = 7$, противоречия нет.

При $n=3$ и $n=5$, $k=7$ но количество игр будет соответственно

но $\frac{7 \cdot 3}{2}$ и $\frac{7 \cdot 5}{2}$, а это нецелые числа, противоречие, т.к.

количество сыгранных игр не может выражаться

не целым числом. $\Rightarrow n \neq 3$ и $n \neq 5$.

При $n=4$ противоречия нет.

значит каждая из девочек сыграла или 2, или 4 игры.

Ответ: 2 или 4.

10б.

Вариант № 1

М А О О О 2 9 9 0 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2
 $n \in \mathbb{N} \quad (-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20) \in \mathbb{N}$. Найдите n .

$n > 0$.

$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 > 0$

Пусть $n=10$ значения выражения равно 0 $\Rightarrow$

$n < 10$ почему?

Вынесем общий множитель $\frac{1}{3}$, получим

$\frac{1}{3} (4n - n^2 + 60) = \text{целое}$

$(4n - n^2 + 60) : 3$

$60 : 3 \Rightarrow (4n - n^2) : 3$

$n : 3$

$(4n - n) : 3$
 $n \equiv 1 \pmod{3}$

$\begin{cases} n > 0 \\ n < 10 \\ n : 3 \text{ или } n \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$
 $n = 1; 3; 4; 6; 7; 9$

~~$(n : 3 \vee n \equiv 1 \pmod{3}) \wedge (n > 0 \vee n < 10) = 1, 3, 4, 6, 7, 9$~~

Проверка

$n=1$ значение: 21

$n=3$ значение: 21

$n=4$ значение: 20

$n=6$ значение: 16

$n=7$ значение: 13

$n=9$ значение: 5

Количество n это 6.

Ответ: ~~пусть $n = 1; 3; 4; 6; 7; 9$~~

185.



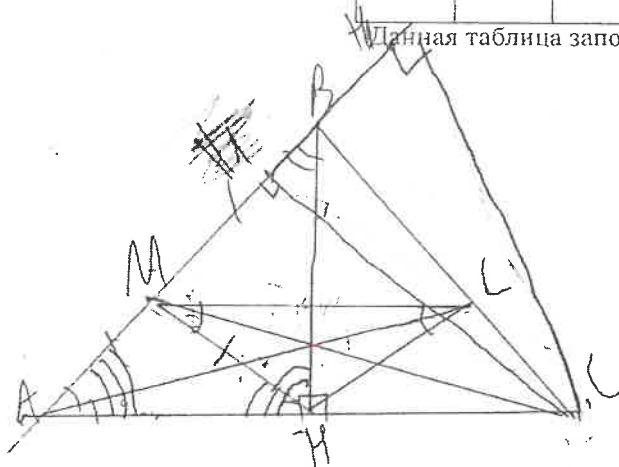
Вариант № 9

М А О О О 2 9 9 0 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)



№3
Дано
 $\triangle ABC$
AL - медиана
BM - медиана
C - медиана
 $MH = LH = 10$
 $\angle LMH = 30^\circ$
C - медиана
BN + CH = ?

1) В $\triangle MLH$ $MH = LH \Rightarrow \triangle MLH$ - равнобедренный
 $\angle MLH = \angle LMH = 30^\circ \Rightarrow \angle MHL = 120^\circ$

2) В $\triangle ABC$ AL - медиана.

Медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы $\Rightarrow MH = \frac{1}{2} AB$.

$AM = BM = \frac{1}{2} AB \Rightarrow MH = AM = MB \Rightarrow AB = 20$ см.

3) $\triangle AMH$ - равнобедренный $\Rightarrow \angle MAH = \angle MHA$

$\triangle BMH$ равнобедренный $\Rightarrow \angle MBH = \angle MHB$ почему?

4) Пусть $BN \perp AC = O$, тогда $MO \perp ML \Rightarrow ML \parallel AC \Rightarrow \angle ANM = \angle LMH = 30^\circ = \angle A$.

Тогда $\angle ABH = 60^\circ$.

5) В равнобедренном $\triangle MBH$ $\angle ABH = 60^\circ \Rightarrow \triangle MBH$ - равнобедренный $\Rightarrow BH = 10$

6) И.к. $ML \parallel AC \Rightarrow \triangle ABC$ - равнобедренный $\Rightarrow \angle A = \angle C = 30^\circ$ $\angle B = 120^\circ$.

Тогда $BH = \frac{1}{2} 10 = 5$ $BL = 12$ CH по м. Фалеса = 13.
 $BH + CH = 10 + 13 = 23$ Ответ: 23 & 08.

Вариант № 1

М А О О О 2 9 9 0 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

Закрасим доску 8×10 в 3 цвета.

почему именно этот случай худший?

1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3

Для рисунка худший случай
 54 монеты и без прямоуго-
 льника 1×3 или 3×1 со всеми
 3 монетами

При такой раскраске в любом прямоугольнике 1×3 или 3×1 есть все 3 клетки.

Рассчитаем кол-во каждого вида клеток.

1-27; 3-27; 2-26.

Рассмотрим худший случай, где Рюда кладёт монеты только в клетки 1 и 3. Тогда он поместит 54 монеты, и ни в одном прямоугольнике не 3 монеты.

Если бы мы не поместили следующую монету, то этот прямоугольник не действовал $\Rightarrow$ всего у Рюды

$54 + 1 = 55$ монет

Итого: 55 монет.

128.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 2 9 9 0 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа

в разное время

№5

Рассмотрим случай $a=1, b=1, c=1$, тогда

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 + 1 + 1 = 3.$$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 3 > \frac{1}{2}. \text{ Условие выполняется.}$$

Теперь рассмотрим случай $a=1, b=1, c < 1$, тогда

$$b^2 + c^2 = 2 \text{ заменим, что при } b=1, c=1 \text{ } b+c=2.$$

$$a^2 = 1 = a \text{ если } b^2 + c^2 = 2 \text{ и } b > 1, c < 1, \text{ то } (b+c) < 2, \text{ т.к.}$$

$$(b+c) < 2 \text{ пусть } b=1+x, c=1-x. \text{ Тогда } b^2 + c^2 = (1+x)^2 + (1-x)^2 = 1 + 2x + x^2 + 1 - 2x + x^2 = 2x^2 + 2.$$

$$= 2x^2 + 2. \text{ Если } x \neq 0, \text{ то } x^2 > 0, \text{ тогда } b^2 + c^2 > 2, \text{ что противоречит } b^2 + c^2 = 2. \text{ Если } x=0, \text{ то } b=1, c=1 \text{ случай рассмотрен.}$$

$$\text{Если } x \neq 0, \text{ то } 2x^2 + 2 > 2, \text{ противоречие } \Rightarrow (b+c) < 2.$$

$$\text{И } b, c < 1, \text{ т.к. } (b+c) < 2, \text{ тогда } c < \frac{1}{b}, \text{ тогда}$$

$$\text{если } b^2 + \frac{1}{b^2} = 2$$

$$\text{то } b = 1 \text{ (случай рассмотрен)} \Rightarrow b, c < 1.$$

$$\frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} = \frac{b(c+5) + c(b+5)}{(b+5)(c+5)} = \frac{2bc + 5(b+c)}{(b+5)(c+5)}.$$

При $b=1, c=1$ значение суммы максимально, а

$$\text{или } b > 1, c < 1 \text{ } 2bc < b(c+5) + c(b+5) < 11 \Rightarrow$$

$$\frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} < \frac{1}{3}$$

$$\frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} < \frac{1}{8} + \frac{1}{3} < \frac{1}{2}.$$

Вариант № 1

М А О О О 2 9 9 0 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	7

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

15 (продолжение).

Рассмотрим случай $a > 1, b > 1, c < 1$ (или $b > 1, c > 1, a < 1$ аналогично).

Тогда пусть $a = 1+x, b = 1+y, c = 1-x-y$.

$$a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + 1 + x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2xy = 3 + 2x^2 + 2y^2 + 2xy.$$

При $x \neq 0, y \neq 0, (a=1, b=1, c=1)$ случай равенства, тогда $3 + 2x^2 + 2y^2 + 2xy > 3$, т.е. строгое неравенство $\Rightarrow (a+b+c) < 3$.

$$abc = 1 - x^2 - y^2 - xy - x^2y - xy^2. \text{ Если } x \neq 0, y \neq 0, (a=1, b=1, c=1), \text{ то } abc < 1.$$

$$\frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} < \frac{1}{2}, \text{ т.к. При } a=1, b=1, c=1$$

$a+b+c$ - максимальное, abc - максимальное $\Rightarrow$ значение выражения $\frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5}$ тоже

максимальное $\Rightarrow$ при $a > 1, b > 1, c < 1$

$$\frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} < \frac{1}{2}.$$

Мы рассмотрели 3 случая и в каждом значении

$$\text{выражения } \frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} \leq \frac{1}{2}, \text{ ч.м.д.}$$

ОД.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 3 0 2 6 2 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



№1

Заметим что Маша переписывалась с 5 девочками $\Rightarrow$ все удовлетворяет $b \geq 5$. Заметим что каждая составила в сет число переписок т.к. всего переписок $\frac{3x}{2}$, где x — кол-во переписок одной девочки, а ≥ 2 , т.к. каждую переписку считали 2 раза. $\Rightarrow x$ — чет $\Rightarrow \geq 6$. т.к. 5 не может быть. Также ≤ 6 , т.к. девочек 9 $\Rightarrow$ ~~Ответ 6 и 8~~. Каждая либо в 6 либо

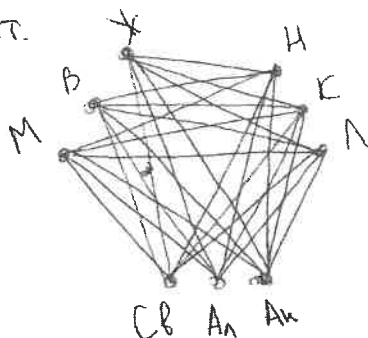
1	2	3	4	5	6	Σ
20	10	0	18	x		48

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

~~Пример на 8: в 8 $\Rightarrow$ Ответ либо 27 либо 36.~~

Пример на 36: Каждая девочка переписывается с каждой.

Пример на 27: Граф, где девочки — вершины, ребро когда дружат.



208.

№2

Заметим что $-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 > 0 \Leftrightarrow 6n + 55 - n^2 > 0$, найдем корни. $D = 16^2$, $x_{1,2} = -5; 11$. У нас $\nearrow$ -opening парабола с ветвями вниз $\Rightarrow$ положительные значения между корнями $\Rightarrow$ при $-5 < n < 11$. Тогда проверим n от 1 до 10. Подходят при $n = 1; 5; 6; 10$

Ответ: 4

108.

№4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

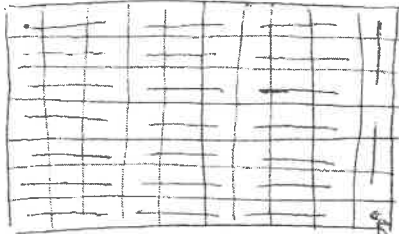
М А О О О 3 0 2 6 2 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Оценка:

1	2	3	4	5	6	Σ

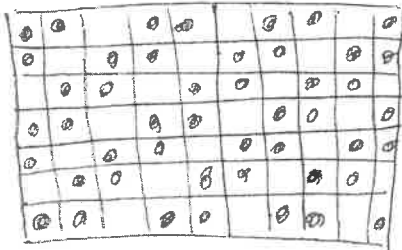
Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)



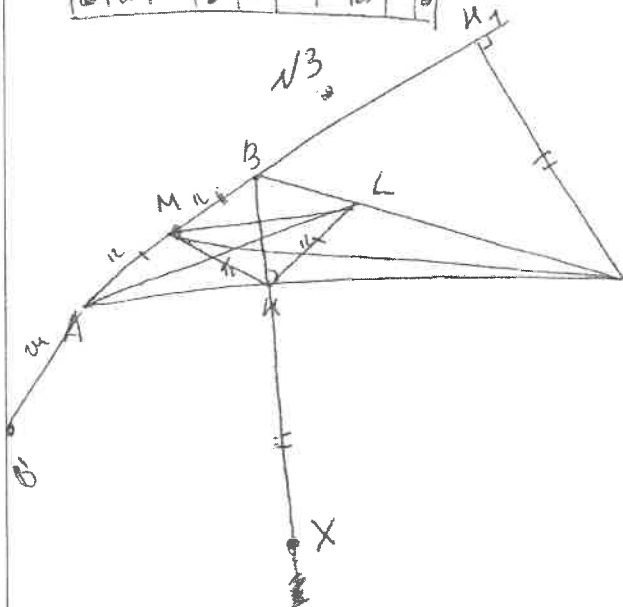
Разобьем доску на полосы 1×3 и 3×1 ,
замечим что в каждой полосе ≤ 1 клетка
будет ≤ 2 клеток $\Rightarrow$ в полосках $\leq \frac{69}{3} \cdot 2 =$
 $= 46$ и $+1 \Rightarrow 47$ т.е. ≤ 47 может быть не
может $\Rightarrow$ ответ ≥ 48 .

Пример на 47 не может:

наоборот, при ≥ 48 всегда найдется
такой прямоугольник.



185.



Заметим что HM — медиана пре-
моугольного $\triangle BKA \Rightarrow HM = MB =$
 $= AM$, так же мы знаем $\angle H = 12 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 12 = \angle H = \angle M = \angle B = \angle A$. Продлим
 BA в L равн. за точку A и продолжим
 BK в L равн. за точку B . Продлим KL за точку L
на KL и отметим точку X .
Заметим что $\triangle B'KL$ р.б. $AB = AM +$
 $+ MB = 12$. $B'K = 2AB = 48$

Ответ: 48

05.

Олимпиада школьников «БЕЛЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 3 0 6 9 4 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

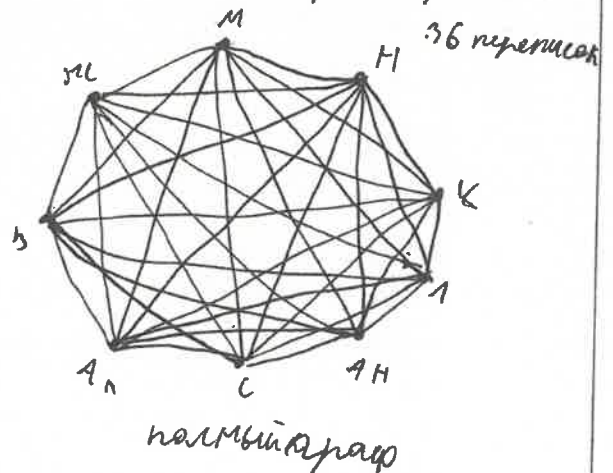
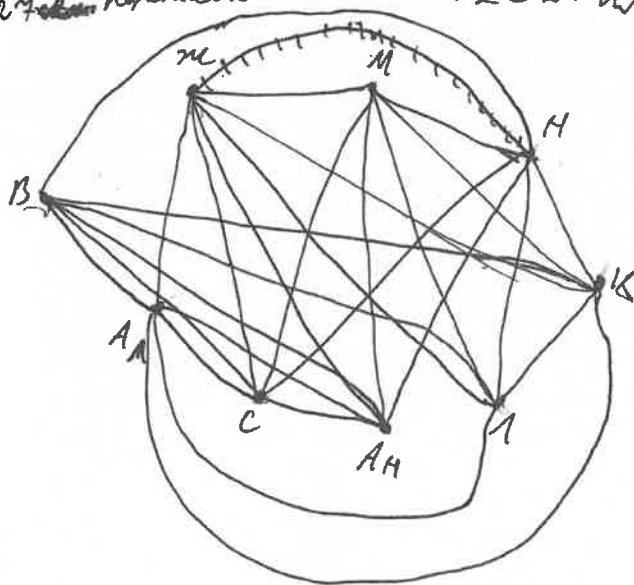
Задача №1

Можно заметить т.к. Момма

1	2	3	4	5	6	Σ
20	5	X	20	X		45

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

переписывались только хотя бы с 5 звёздочками это значит что есть если мы представим маму зада-
чу в виде графа так что звёздочки это вершины, а
переписки это рёбра то у каждой вершины степень
хотя бы 5 т.к. каждая звёздочка участвовала в одина-
ковом числе перепинок, ~~но~~ значит степени возможные
степени вершин - 5, 6, 7, 8 Но можно заметить, что
если степень вершин равна 5 или 7 то в маме уча-
стие будет нечёт. кал-во нечёт степеней, что невоз-
можно значит степень каждой вершины 6 или 8 тогда
кал-во перепинок $6 \cdot 8 : 2 = 24$ или $8 \cdot 8 : 2 = 36$ Пример:



ответ: 24 и 36

205

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 3 0 6 9 4 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяться только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 2

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 \in \mathbb{N}$$

$$n(\frac{6}{5} - \frac{1}{5}n) + 11 \in \mathbb{N}$$

$$1) \frac{6}{5} - \frac{1}{5}n = 0$$

$$\frac{6}{5} = \frac{1}{5}n \quad | \cdot 5$$

$$n = 6$$

$$2) \frac{6}{5} - \frac{1}{5}n > 0$$

$$\frac{6}{5} > \frac{1}{5}n \quad | \cdot 5$$

$$6 > n$$

$$3) \frac{6}{5} - \frac{1}{5}n < 0$$

$$\frac{6}{5} < \frac{1}{5}n \quad | \cdot 5$$

$$6 < n$$

Чтобы наше выражение было мат. нулем тогда

$n(\frac{6}{5} - \frac{1}{5}n)$ было бы больше чем -11 т.к. n -мат. рассмотрим чему может быть равно $(\frac{6}{5} - \frac{1}{5}n)$

если $n(\frac{6}{5} - \frac{1}{5}n) = 0$ значит т.к.

n мат. значит $\frac{6}{5} - \frac{1}{5}n = 0$ тогда

$n = 6$. 2) $n(\frac{6}{5} - \frac{1}{5}n) > 0$ т.к. n мат.

значит $(\frac{6}{5} - \frac{1}{5}n) > 0$ значит $n < 6$

3) $-11 < n(\frac{6}{5} - \frac{1}{5}n) < 0$ т.к. n мат. $\Rightarrow$

$$\frac{6}{5} - \frac{1}{5}n < 0 \Rightarrow n > 6 \text{ тогда}$$

$$n(\frac{6}{5} - \frac{1}{5}n) > -11 : n$$

$$\frac{6}{5} - \frac{1}{5}n > -\frac{11}{n} \text{ можем заметить}$$

что если n равен хотя бы

$$11 \text{ тогда: } \frac{6}{5} - \frac{1}{5} \cdot 11 > -\frac{11}{11}$$

$$1,2 - 2,2 > -1, -1 > -1 - \text{не верно.}$$

$$\text{Вот а при } n=10 \quad \frac{6}{5} - \frac{1}{5} \cdot 10 > -\frac{11}{10}$$

$$-0,8 > -1,1 - \text{верно}$$

значит при $n(\frac{6}{5} - \frac{1}{5}n) < 0$ $n < 11$ т.е. все возможные n - от 1 до 10 т.е. всего 10 мат. чис.

Ответ: 10 возможных значений n **50.**

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

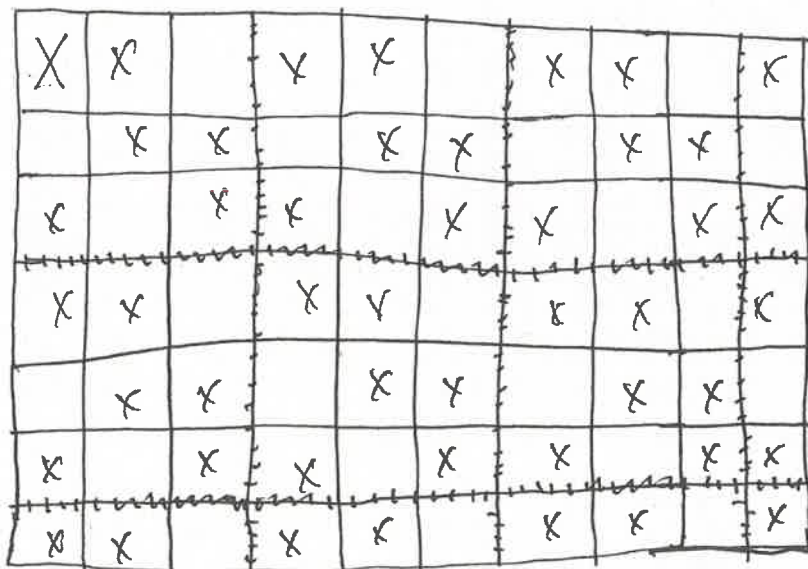
М А О О О 3 0 6 9 4 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 4

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)



Для того чтобы понять какое мин. кол-во монеток, нужно
найти минимальное количество монеток, которое можно
платить 1 рубль 3 копейки с 3 монетами. Нужно понять какое
макс. кол-во монет можно представить так чтобы
не было монет по 1 рублю. С 3 монетами т.к. если мы
прибавим еще 1 монету к этому макс. числу
то обязательно найдемся прямоугольник с 3 моне-
тами. Тогда будем считать, что квадрат 3х3
состоит из 6 кв. В каждом из которых не больше 6 монет
т.к. если их было бы 7 то в какой-то строке или столбце
найдется строка или столбец в которой 3 монеты т.е.
найдется прямоугольник с 3 монетами. Также мы можем раз-
делить оставшиеся клетки на 5 групп 1х3 в каждой из
которых не больше 2 монет и останется 1 клетка
в которой макс. 1 монета. Получается что макс. кол-во
монет при которых не найдется групп 1х3 с 3 монетами:
 $6 \cdot 6 + 5 \cdot 2 + 1 = 47$ т.е. мин. кол-во монет при которых обязательно
найдется групп 1х3 с 3 монетами. Это $47 + 1 = 48$ и.
ответ: мин. кол-во монет - 48.

208

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М А О О О 3 0 7 7 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
15	15	0	15	0		45

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача №1.

По условию все девочки сыграли одинаковое число партий, и любая пара девочек играла между собой не более одной партии. Тогда, т.к. Маша играла с Катей, Катей и Светой (с 3-мя девочками), каждая девочка играла не менее 3-х раз. Маша не играла с Катей $\Rightarrow$ каждая девочка играла не менее 6 партий.

Рассмотрим следующие случаи:

1) Каждая девочка играла 5 партий. Тогда всего игр было сыграно $\frac{7 \cdot 5}{2} = 17,5$. Это число нецелое $\Rightarrow$ такое невозможно.

2) Каждая девочка играла 4 партии. Тогда всего игр было сыграно $\frac{7 \cdot 4}{2} = 14$. Это возможно.

3) Каждая девочка играла 3 партии. Тогда всего игр было сыграно $\frac{7 \cdot 3}{2} = 10,5$. Это число нецелое $\Rightarrow$ такое невозможно.

Единственный возможный случай, если каждая девочка играла 4 партии. Ответ: 4 партии

158.

Задача №2.

По условию нужно найти наименьшее натуральное число n , для которых значение $-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20$ тоже является натуральным числом. Пусть это натуральное число - x . Тогда:

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 = x$$

x - натуральное, $\Rightarrow x \geq 0$. $x > 0$ (0 - не натуральное)

$$\text{Умножим все выражение на } -3: n^2 - 4n - 60 = -3x$$

Рассмотрим 2 случая:

1) при $x = 0$:

$$n^2 - 4n - 60 = 0$$

$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot (-60) = 16 + 240 = 256$. 0 - дискриминант $\Rightarrow$ уравнение имеет 2 корня.

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; \quad n_1 = \frac{4 + \sqrt{256}}{2} = \frac{4 + 16}{2} = \frac{20}{2} = 10; \quad n_2 = \frac{4 - \sqrt{256}}{2} = \frac{4 - 16}{2} = \frac{-12}{2} = -6.$$

2) при $x > 0$:

$$\begin{cases} n^2 - 4n - 60 = -3x \\ x > 0 \end{cases}$$

$$n^2 - 4n - 60 < -3$$

$$n(n-4) - 60 < -3 \quad \text{неравенству подходят такие значения } n, \text{ что } n \in (-5; +\infty)$$

$$\cancel{n(n-4) < 57} \quad \cancel{n(n-4) < 57} \quad \cancel{n(n-4) < 57}$$

а также $n^2 - 4n - 60$ должно быть кратно 3-ш. $60:3 \Rightarrow (n^2 - 4n):3$

Отсюда все допустимые значения n это: $-5, -3, -2, 1, 3, 4, 6, 7, 9$

Всего 6 из них натуральные, и еще 1 натуральное из пункта 1. $\Rightarrow$ всего 7 значений.

Ответ: 17

158.



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

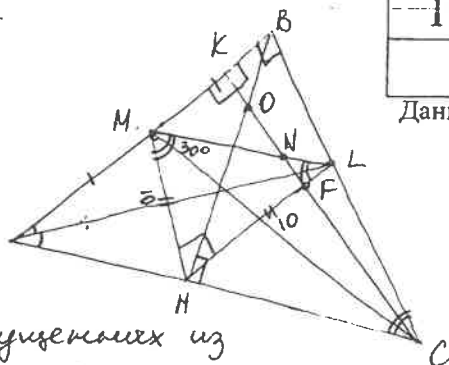
И А О О О З О 7 7 7 1 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача №3.

Дано:
 $\triangle ABC$; AL - биссектриса,
 BH - высота,
 CM - медиана
 $MH = LH = 10$
 $\angle LMN = 30^\circ$

Найти:
 сумму длин
 высот $\triangle ABC$, опущенных из
 вершин B и C .



1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Решение: 1) Проверим высоту CK в $\triangle ABC$. в таком случае нужно
 найти сумму $CK + BH$. $\angle MKC = 90^\circ$; $\angle SKB = 90^\circ$.

2) $MH = HL$ (по усл.) $\Rightarrow \triangle MHL$ р/о } $\Rightarrow \angle MHL = 90^\circ$ ^{по условию?}
 $\angle LMN = 30^\circ$ (по усл.)

пусть $CK \cap HL = F$ и $CK \cap BH = O$. Тогда $MHFK$ - прямоугольник и
 $MH = KF = 10$.

3) Пусть $CK \cap ML = N$. $\angle KFN = \angle CFL = 90^\circ$ (вертик) $= \angle KFL$ (сметки).

4) $\angle KFN = 90^\circ$, $\angle AKF = 90^\circ \Rightarrow AK \parallel HF$ и $AB \parallel HL$ *

Решение: HL делит $\triangle ABC$ || стороне $AB \Rightarrow \triangle HLC$ $\sim$ $\triangle ABC$
 и точки K и B совпадают, F и L совпадают и $\angle ABC = 90^\circ$,
 $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle BCA = 90^\circ$

Отсюда $\triangle$ т.к. $AM = MB$ и $HL = MB$ ($MBLH$ - прямоугольник),
 то $AM = MB = 10$ ~~или~~ $\Rightarrow AB = 20$ ~~или~~ $= BC$. BC - первая высота
 $\triangle ABC$.

5) $\angle BHC = 90^\circ$, $\angle ACB = 90^\circ \Rightarrow BC$ - гипотенуза $\triangle BHC$, BH - катет.
 Катет, лежащий напротив $\angle 30^\circ$ в и/у $\triangle$ равен
 $\frac{1}{2}$ гипотенузы } $\Rightarrow BH = 10$ ~~или~~. BH - вторая высота
 $\triangle ABC$.

6) $BH + BC = 20 + 10 = 30$

Ответ: сумма высот $\triangle ABC$ равна 30.

05.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа
 в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М 4 0 0 0 3 0 7 7 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача №4.

Рассмотрим небельчатый кусок этой решки 8×10 .

Это будет кусок размером 3×3 . Чтобы во всех клетках прямоугольника не имели монетки, в каждой столбце и строке 1×3 должно быть по пустой клетке. Например это можно сделать такими образом:

○	○	
○		○
	○	○

(кружками обозначена монета).

Большого кол-ва монет, помещающихся на данной решке 3×3 добиться нельзя, иначе появится хотя бы один прямоугольник 1×3 (или 3×1). Т.е. макс кол-во монет в квадрате 3×3 — 6 штук, иначе появится прямоугольник.

Такими образом, возможно заполнить клетки решки 8×10 , чтобы в каждом квадрате 3×3 было по 6 монет:

○	○		○	○		○	○		○
○		○	○		○	○		○	○
	○	○		○	○		○	○	
○	○		○	○		○	○		○
○		○	○		○	○		○	○
	○	○		○	○		○	○	
○	○		○	○		○	○		○
○		○	○		○	○		○	○

Можно считать, что кол-во монет на решке — 54. И если добавить хотя бы одну, то неизбежно появится прямоугольник 1×3 (или 3×1) из монет.

Такими образом, кол-во монет у Влада — $54 + 1 = 55$ штук.

Ответ: 55 штук

155.



Вариант № 1

Ч А О О О 3 0 7 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

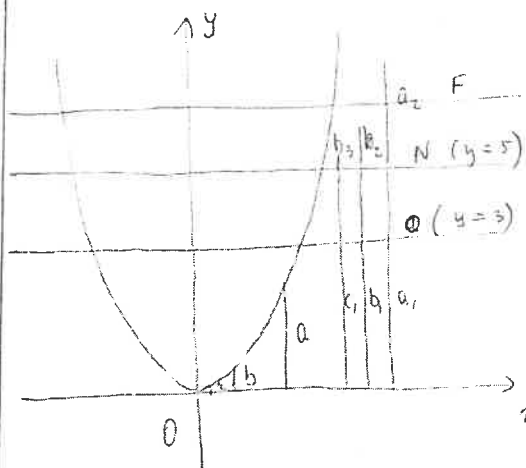
1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 5

Начертите график функции $y = x^2$.

Это параболка.



По условию

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3 \text{ и нужно}$$

доказать, что

$$\frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} \leq \frac{1}{2}.$$

Проведем прямую α по координате $y=3$ (перпендикулярно)

Пусть с параболы будут опущены

отрезки a, b и c равные наименьшим a, b и c (их верхние точки) в сумме $a+b+c=3$

Проведем прямую $N(y=5)$.

и отрезки $a_1 = a+5, b_1 = b+5$ и $c_1 = c+5$.

Тогда, если $\frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} > \frac{1}{2}$, их ~~наим~~ ср. арифм. definitely превышает прямую $F = \text{ср. арифм.}$ ~~a_1, b_1, c_1~~ a_2, b_2 и c_2 — частей отрезков a, b и c над прямой N . Но такое невозможно.

4

Противоречие.

ит. п. 8.

08.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О З О 9 6 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

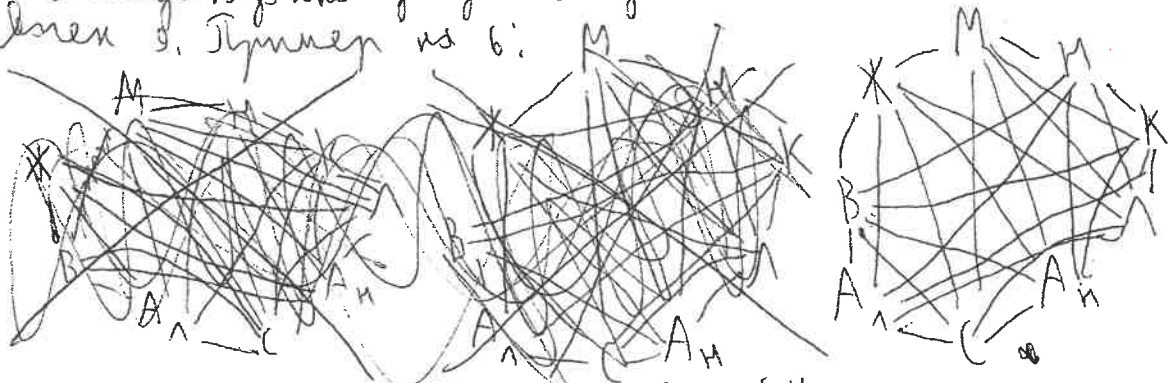
1	2	3	4	5	6	Σ
20	16.	x	12	0		48

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяться только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



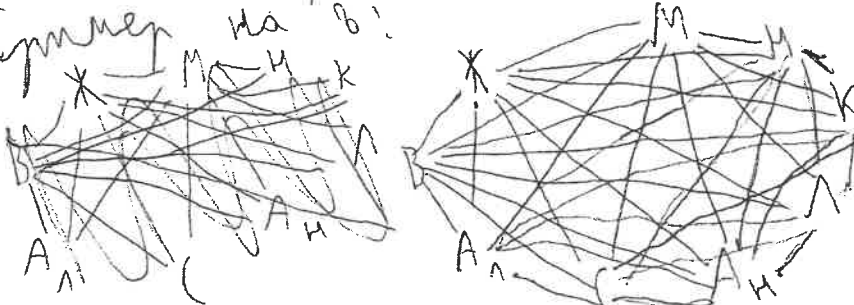
Представим это в виде графа, пусть девочки - это вершины, а ребрышки - это ребра. Тогда заметим, что если у каждой девочки нечётное число ребрышек, то сумма степеней вершин $= 9 \cdot n = n$. Но n, k кратно 2, следовательно сумма степеней вершин чётна, а это не так. Значит у каждой девочки чётное число ребрышек. По условию у всех девочек одинаковое число ребрышек, а раз у Машки их 6, то у всех минимум 6, значит у всех либо 6, либо 8, либо 9. По выделенным у каждой чётное число ребрышек 6. Пример на 6:



Все ребрышки

$$\frac{6 \cdot 9}{2} = \frac{54}{2} = 27$$

Пример на 8:



Все ребрышки $\frac{8 \cdot 9}{2} = \frac{72}{2} = 36$

Ответ: 27, 36 ребрышек. 20.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А 0 0 0 3 0 9 6 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11$ — натурал., 11 — натурал.,
 $-\frac{1}{5}n^2$ — отрицат., но числа будут натурал.,
 если $\frac{6}{5}n + 11 - \frac{1}{5}n^2 \geq 0$;

$$\frac{6}{5}n + 11 > \frac{1}{5}n^2;$$

$$6n + 55 > n^2;$$

$$55 > n(n-6).$$

Заметим, что при $n = N$, то тем более
мы сможем — тем более будем $n(n-6)$. Заме-
 тим, что при $n=11$ — $n(n-6) = 11 \cdot 5 = 55$ — не подходит
 А при $n > 11$ — $n(n-6) > 55$ — не подходит. Значит
~~не подходит~~ эта формула подходит только для n

1) при $n=1$: $-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = -0,2 + 1,2 + 11 = 12$ — подходит.

2) при $n=2$: $-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = -0,8 + 2,4 + 11 = 12,6$ — не подх.

3) при $n=3$: $-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = -1,8 + 3,6 + 11 = 12,8$ — не подх.

4) при $n=4$: $-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = -3,2 + 4,8 + 11 = 12,6$ — не подх.

5) при $n=5$: $-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = -5 + 6 + 11 = 12$ — подходит.

6) при $n=6$: $-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = -7,2 + 7,2 + 11 = 11$ — подходит.

7) при $n=7$: $-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = -9,8 + 8,4 + 11 = 9,6$ — не подходит.

8) при $n=8$: $-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = -12,8 + 9,6 + 11 = 7,8$ — не подходит.

9) при $n=9$: $-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = -16,2 + 10,8 + 11 = 5,6$ — не подходит.

10) при $n=10$: $-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = -20 + 12 + 11 = 3$ — подходит.

Значит таких чисел 4.

Ответ: 4.

165.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

МАОООЗО96826

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Ответ: 478

Раскроем задачу в 3 ответа:

1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1

"1" - 24 раз.

"2" - 23 раз.

"3" - 23 раз.

Этот пример работает,

т.к. при 478 манерах

будет хотя бы одна манера, которая не будет использоваться, либо все манеры, либо

одна манера, которая не будет использоваться, либо все манеры, либо

только при такой расстановке, а если другая?

Значит, хотя бы одна манера будет использоваться, а значит, хотя бы одна манера будет использоваться.

Значит, хотя бы одна манера будет использоваться, а значит, хотя бы одна манера будет использоваться.

Значит, хотя бы одна манера будет использоваться, а значит, хотя бы одна манера будет использоваться.

Значит, хотя бы одна манера будет использоваться, а значит, хотя бы одна манера будет использоваться.

Значит, хотя бы одна манера будет использоваться, а значит, хотя бы одна манера будет использоваться.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 3 0 9 6 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$= \frac{1}{a^3(b+1)+b^3+c^3} + \frac{1}{b^3(b+1)+a^3+c^3} +$$

$$+ \frac{1}{c^3(c+1)+a^3+b^3}$$

$$a=b=c=1$$

$$\frac{1}{1(1+1)+1+1} + \frac{1}{1(1+1)+1+1} + \frac{1}{1(1+1)+1+1} = \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} - \text{достигается}$$

Если какое-то из $a, b, c > 1$, то раз $a^3+b^3+c^3=3$, то

какое-то другое из $a, b, c < 1$. Пусть $a = 1+x$, тогда $b = 1-x$. До м. х.

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1-x+1+x}{(1-x)(1+x)} = \frac{2}{1-x^2} > \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2, \text{ то}$$

$$\text{тогда } \frac{1}{(1+x)^3(1+x+1)+b^3+c^3} + \frac{1}{(1-x)^3(1-x+1)+a^3+c^3} > \frac{1}{c^3(1+1)+b^3+c^3} +$$

$$\frac{1}{b^3+(b+1)+a^3+c^3}. \text{ Аналогично если } b \text{ и } c \text{ и } a \text{ и } b, \text{ то}$$

$$\text{не } a \text{ и } b \text{ тогда } \frac{1}{a^3+3} + \frac{1}{b^3+3} + \frac{1}{c^3+3} \geq \frac{3}{4}, \text{ т.к. } a, b, c \text{ и } a > 1, b \text{ и } c < 1, \text{ то ана-}$$

логично $a=2+x, b+c=1-x$ и аналогично с пред-
 душим $\frac{1}{(2+x)^3(2+x+1)+b^3+c^3} + \dots > \frac{3}{4}, \text{ т.к. } \text{т.к.}$

$$\text{т.к. } \frac{1}{(2+x)^3(2+x+1)+b^3+c^3} + \dots > \frac{3}{4}, \text{ т.к.}$$

ОС.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М А О О О 3 0 9 7 9 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N1

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	x	20	x		60

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

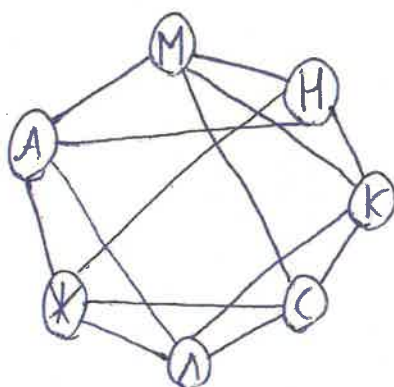
Представим это в виде графа, вершины будут люди, а ребра партии. Все степени вершин в графе одинаковы.

Маша сыграла минимум 3 партии, значит минимальная степень в графе 3.

Всего возможно партий с одним и тем же человеком 6, но Женя не сыграла с 1, значит максимальная степень в графе 5.

В графе 7 вершин, поэтому если степени каждой вершины будут 3 или 5, то сумма степеней будет нечётной, а это невозможно. Значит степень каждой вершины 4.

Вот пример такого графа, который соблюдает все условия:



Ответ: каждая девочка могла сыграть 4 партии.

208.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М А О О О З О 9 7 9 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N2

Это выражение будет натуральным, если оно целое, а также больше 0:

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}n^2 + 2n + 12 \in \mathbb{Z} \\ -\frac{1}{4}n^2 + 2n + 12 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{n^2}{4} + 2n + 12 \in \mathbb{Z} \\ -\frac{n^2}{4} + 2n + 12 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{n^2}{4} \in \mathbb{Z} \\ 2n + 12 > \frac{n^2}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{n^2}{4} \in \mathbb{Z} \\ 8n + 48 > n^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n^2 \div 4 \\ 64 > n^2 - 8n + 16 \end{cases} \xrightarrow{?} \begin{cases} n \div 2 \\ 64 > (n-4)^2 \end{cases}$$

Найдём такие натуральные n для которых выполняется $64 > (n-4)^2$:

2 : $(2-4)^2 = (-2)^2 = 4 < 64$

4 : $(4-4)^2 = 0^2 = 0 < 64$

6 : $(6-4)^2 = 2^2 = 4 < 64$

8 : $(8-4)^2 = 4^2 = 16 < 64$

10 : $(10-4)^2 = 6^2 = 36 < 64$

12 : $(12-4)^2 = 8^2 = 64 < 64$ неверно, значит число 12 и следующие за ним числа не подходят

Подходит 5 чисел: 2, 4, 6, 8, 10.

Ответ: 5 чисел

188

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

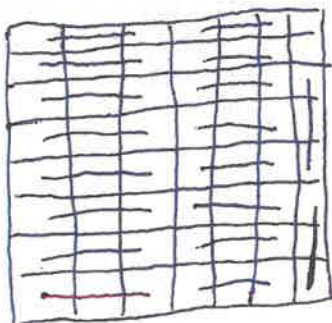
M	A	0	0	0	3	0	9	7	9	2	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Разрешен доску на непересекающиеся
прямоугольники 1-3 и 3-1:

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)



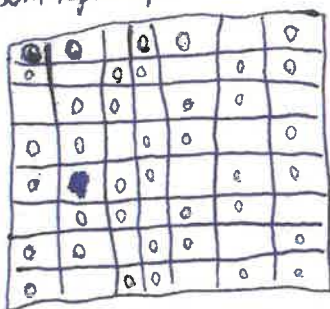
Найдем для какого наибольшего количества монет
условие задачи не выполнится, то есть премау-
льника 4:3 заполненного монетами не найдется.

Получилось 18 прямоугольников 1.3 и 1 прямоугольника 1.2.

В каждом прямоугольнике 1-3 не более двух монет, в треугольнике 1-2 могут быть 2 монеты. Тогда наибольшее количество монет, для которого условие задачи не выполнится:

$$18.2 + 2 = 38$$

Вот пример:



ЯТ²⁹ при 39 монетах условие задачи обязательно выполнится, то есть прямоугольник 1-3 заполненный монетами найдётся.

Ответ: 39 монет.

208

Лист 3 из 3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 3 1 4 4 7 2 6

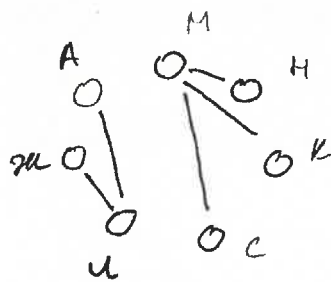
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	18	x	8	0		46

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№

Построим граф, где изванные вершин-первое буквы имен девочек (вершин-девочки), а ребра графа - партии. Есть всего 6 вариантов,



сколько партий можно сыграть девочки:

т.е., 2п, 3п, 4п и 5п 6п.

но 6 партий девочки не могут сыграть т.к. между не играли с кем-то.

Т.е. коли-во партий одинаково, то по 1 или 2 партии девочки могут не могут сыграть, т.к. Маша сыграла 3 или более.

Известно, что сумма степеней вершин графа (простого), ~~где степень - коли-во сыгранных партий~~, в два раза больше чем коли-во ребер этого графа.

Проверим оставшиеся варианты (3, 4 или 5 партий)



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 3 1 4 4 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

а) если каждая девочка сыграла по 3 партии:

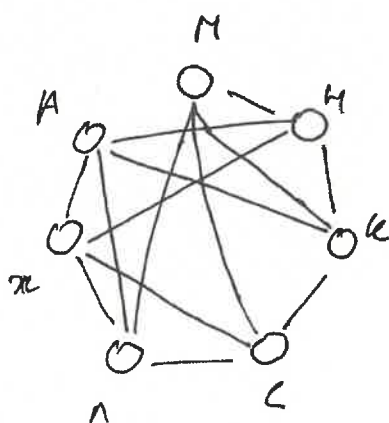
$$\frac{3 \cdot 7}{2} = 10,5 \text{ (редер)} - \text{невозможно.}$$

б) если каждая девочка сыграла по 4 партии:

$$\frac{4 \cdot 7}{2} = 14 \text{ (редер)} - \text{возможно.}$$

Значит.

В этом графе выполняются все условия.



в) если девочки сыграли по 5 партий:

$$\frac{5 \cdot 7}{2} = 17,5 \text{ (редер)} - \text{невозможно.}$$

Значит, девочки сыграли по 4 партии каждая.

Ответ: 4 партии

208



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 3 1 4 4 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$\sqrt{6}$

Ответ: 6.

Решение: $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \geq 1$

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 \in \mathbb{N} \Rightarrow -\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 \geq 1$$

Рассмотрим 3 случая.

а) если $-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n < 0$, тогда $-15 \leq \frac{-n^2 + 4n}{3} < 0$

$$\Leftrightarrow -57 \leq \frac{n(4-n)}{1} < 0$$

Можно сказать, что $-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$$\frac{n(4-n)}{3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow -\frac{n^2 + 4n}{3} = 9, \text{ где } 9 \text{ - целое}$$

число от -15 до -1.

Составим уравнение.

$$\frac{-n^2 + 4n}{3} = 9$$

$$-n^2 + 4n - 27 = 0$$

Чтобы корни уравнения (квадратного) были целыми числами, нужно, чтобы дискриминант был равен 0 или квадратному числу.



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 3 1 4 4 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверьте только то, что записано с этой стороны листа
в рамке справа



Решим полученное уравнение:

если $q = -19$, то

$$-n^2 + 4n + 57 = 0$$

$$D = b^2 - ac, \text{ где } b = \frac{1}{2}a$$

$$D = 4 + 57 = 61 - \text{не подходит.}$$

составим таблицу со значениями q и дискриминантом.

q	-19	-18	-17	-16	-15	-14	-13	-12	-11	-10	-9
D	61	58	55	52	49	46	43	40	37	34	31

q	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
D	28	25	22	19	16	13	10	7

Из всех этих случаев, нам подходит только когда $q = -15$ и $q = -7$, $q = -4$. Значит можно найти 3 натуральных n , удовлетворяющих

условию $-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n \in \mathbb{N}$. *надо найти n , а не q , проверить, что нет противоречий.*

$$\delta) \text{ если } -\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n > 0; \quad -\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{-n^2 + 4n}{3} > 0 \Rightarrow \frac{n(4-n)}{3} > 0 \Rightarrow n(4-n) > 0$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 3 1 4 4 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Если $n(4-n) > 0$, то $\begin{cases} n < 0 \\ 4-n < 0 \end{cases}$ что невозможно,

т.е. $n \in \mathbb{N}$, $\Rightarrow$ мы знаем, $n > 0$ и $4-n > 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} n = 1 \\ n = 2 \\ n = 3 \end{cases}$$

Проверим:

Если $n = 1$, то $\frac{n(4-n)}{3} = \frac{1 \cdot 3}{3} = 1$ — подходит.

Если $n = 2$, то $\frac{n(4-n)}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3} = \frac{4}{3}$ — не подходит

Если $n = 3$, то $\frac{3 \cdot (4-3)}{3} = 1$ — подходит.

Значит есть 2 натуральных n , подходящие к данному условию.

в) Если $-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n = 0$

$$\frac{n(4-n)}{3} = 0$$

$$n(4-n) = 0$$

$$\begin{cases} n = 0 \text{ — постор. к., т.е. } n \in \mathbb{N}. \\ n = 4 \end{cases}$$

Значит, всего есть 6 натуральных n , при которых выполняется данное условие: $-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 \in \mathbb{N}$. 188.



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О З 1 4 4 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

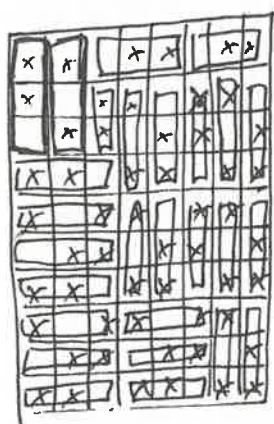
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Реш.

Пошу 8×10 можно представить в виде 26-и прямоугольников 1×3 или 3×1 и прямоугольников 2×1 или 1×2 .

Пример можно увидеть ниже.



Рассмотрим наилучший вариант где только 2 клетки из 3 имеют монету.

(в прямоугольнике где 2×1 (1×2) пока что не монета лучше всего монету)

Один из вариантов расстановки показан выше.

x - монета. Тогда понадобится $26 \cdot 2 = 52$ монеты.

Но этого мало. Следующие 2 монеты в худшем случае могут поставить именно в прямоугольнике 2×1 (1×2). И ещё одну монету можно будет положить в любое место и она образует прямоугольник 1×3 (3×1), полностью заполненный монетами.

Ответ: 55 монет.

85

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

МАОООЗ144726

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



$\sqrt{5}$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3 \quad \left| \Rightarrow a + b + c \leq 3 \right.$$

$$\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \end{cases}$$

$$\frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} = \left(1 - \frac{5}{a+5}\right) + \left(1 - \frac{5}{b+5}\right) + \left(1 - \frac{5}{c+5}\right) =$$

$$= 3 - 5 \left(\frac{1}{a+5} + \frac{1}{b+5} + \frac{1}{c+5} \right)$$

$$3 - 5 \left(\frac{1}{a+5} + \frac{1}{b+5} + \frac{1}{c+5} \right) \leq \frac{1}{2} \text{ — гоукаме.}$$

пусть $T = \frac{1}{a+5} + \frac{1}{b+5} + \frac{1}{c+5}$, тогда

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{1}{a+5} + \frac{1}{b+5} + \frac{1}{c+5}} \quad \text{реверно.} \quad \Rightarrow \frac{1}{T} \leq 18 \Rightarrow$$

$$T \leq \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} = \frac{1}{2}, \text{ если } a=b=c=1.$$

ОД.

Олимпиада школьников «БЕЛЫЧОНОК»

Вариант № 4

МА0003151826

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
15	15	0	12	0		42

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ!)

Задача 1

Представим в 6-й партии друзей в виде одного графа. Граф ~~имеет 6 вершин~~ и связан.

так как каждый друг знает хотя бы

2 других (команда не поделится)

в графе 4 вершины (нет).

значит, что для такой граф существует

тако что бы у всех были бы

общие вершины (т.к. у друзей друзей было

наименьшее количество партий у

каждого друга 5 т.к. есть 4 друга

не играли,

значит, только вершин могут быть

или 3, или 4, или 5,

или меньше одно из них было

это 4. Значит, каждый друг

сыграл по 4 партии.

принимает



158.

ВНИМАНИЕ! Проверьте то, что записано с этой стороны листа и ранее справа



Олимпиада школьников «БЕЛЫЧОНОК»

Вариант № 4

МАОООЗ/5/826

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 2

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20$$

$n=1$

$$-\frac{1}{3} \cdot 1^2 + \frac{4}{3} \cdot 1 + 20 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + 20 = 21 \text{ - количество}$$

$n=2$

$$-\frac{1}{3} \cdot 2^2 + \frac{4}{3} \cdot 2 + 20 = -\frac{4}{3} + \frac{8}{3} + 20 = \frac{4}{3} + 20 = 21 \text{ - количество}$$

$n=3$

$$-\frac{1}{3} \cdot 3^2 + \frac{4}{3} \cdot 3 + 20 = -\frac{9}{3} + \frac{12}{3} + 20 = \frac{3}{3} + 20 = 21 \text{ - количество}$$

$n=4$

$$-\frac{1}{3} \cdot 4^2 + \frac{4}{3} \cdot 4 + 20 = -\frac{16}{3} + \frac{16}{3} + 20 = 20 \text{ - количество}$$

$n=5$

$$-\frac{1}{3} \cdot 5^2 + \frac{4}{3} \cdot 5 + 20 = -\frac{25}{3} + \frac{20}{3} + 20 = -\frac{5}{3} + 20 = 19 \text{ - количество}$$

$n=6$

$$-\frac{1}{3} \cdot 6^2 + \frac{4}{3} \cdot 6 + 20 = -\frac{36}{3} + \frac{24}{3} + 20 = -\frac{12}{3} + 20 = 16 \text{ - количество}$$

$n=7$

$$-\frac{1}{3} \cdot 7^2 + \frac{4}{3} \cdot 7 + 20 = -\frac{49}{3} + \frac{28}{3} + 20 = -\frac{21}{3} + 20 = 13 \text{ - количество}$$

$n=8$

$$-\frac{1}{3} \cdot 8^2 + \frac{4}{3} \cdot 8 + 20 = -\frac{64}{3} + \frac{32}{3} + 20 = -\frac{32}{3} + 20 = 10 \text{ - количество}$$

$n=9$

$$-\frac{1}{3} \cdot 9^2 + \frac{4}{3} \cdot 9 + 20 = -\frac{81}{3} + \frac{36}{3} + 20 = -\frac{45}{3} + 20 = 11 \text{ - количество}$$

$n=10$

$$-\frac{1}{3} \cdot 10^2 + \frac{4}{3} \cdot 10 + 20 = -\frac{100}{3} + \frac{40}{3} + 20 = -\frac{60}{3} + 20 = 0 \text{ - количество}$$

наименьшее количество, когда $n=1$, $n=3$, $n=4$, $n=6$, $n=7$, $n=9$

Ответ: 6

150.

Олимпиада школьников «БЕЛЫЧОНОК»

Вариант № 4

МА0003151826

Пифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

	1	2	3	4	5	6	Σ
Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)							

Дано: $\triangle ABC$

AL - медиана

BH - высота

CM - медиана

$\angle MNK = 10^\circ$

$\angle LMN = 30^\circ$

Найти:

высоту h $\triangle ABC$ + высота

из угла C

решение:

$AM = AN = MB = NC = 10$ (медианы треугольника

пересекаются в одной точке)

$\angle LMN = \angle MNC = 10^\circ$ (равенство $\triangle$)

$\angle LMN = \angle MNC = 10^\circ$ (равенство $\triangle$)

$\angle LMN = \angle MNC = 10^\circ$ (равенство $\triangle$)

$\angle LMN = \angle MNC = 10^\circ$ (равенство $\triangle$)

$\angle LMN = \angle MNC = 10^\circ$ (равенство $\triangle$)

$\angle LMN = \angle MNC = 10^\circ$ (равенство $\triangle$)

$\angle LMN = \angle MNC = 10^\circ$ (равенство $\triangle$)

$\angle LMN = \angle MNC = 10^\circ$ (равенство $\triangle$)

$\angle LMN = \angle MNC = 10^\circ$ (равенство $\triangle$)

$\angle LMN = \angle MNC = 10^\circ$ (равенство $\triangle$)

$\angle LMN = \angle MNC = 10^\circ$ (равенство $\triangle$)

$\angle LMN = \angle MNC = 10^\circ$ (равенство $\triangle$)

$\angle LMN = \angle MNC = 10^\circ$ (равенство $\triangle$)

$\angle LMN = \angle MNC = 10^\circ$ (равенство $\triangle$)

$\angle LMN = \angle MNC = 10^\circ$ (равенство $\triangle$)

$\angle LMN = \angle MNC = 10^\circ$ (равенство $\triangle$)

$\angle LMN = \angle MNC = 10^\circ$ (равенство $\triangle$)

$\angle LMN = \angle MNC = 10^\circ$ (равенство $\triangle$)

$\angle LMN = \angle MNC = 10^\circ$ (равенство $\triangle$)

$\angle LMN = \angle MNC = 10^\circ$ (равенство $\triangle$)

$\angle LMN = \angle MNC = 10^\circ$ (равенство $\triangle$)

$\angle LMN = \angle MNC = 10^\circ$ (равенство $\triangle$)

$\angle LMN = \angle MNC = 10^\circ$ (равенство $\triangle$)

$\angle LMN = \angle MNC = 10^\circ$ (равенство $\triangle$)

$\angle LMN = \angle MNC = 10^\circ$ (равенство $\triangle$)

ВНИМАНИЕ! Проставляется только то, что записано с этой стороны листа в рамках строки



Олимпиада школьников «БЕЛЫНОК»

Вариант № 4

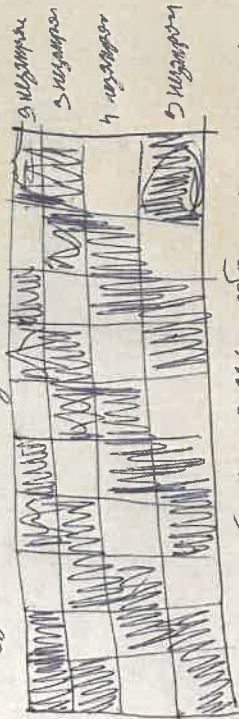
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

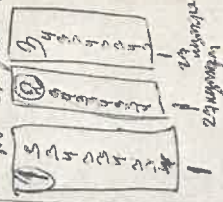
1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача №4
Наибольшие кон-60 клеток
используются для того, чтобы
заполнить это поле из 60 клеток
по 5-10 клеткам



при этом размер образующих
по строкам, вариант комбинации



26 клеток
минимум кон-60 клеток
по 5-10 клеткам
минимум кон-60 клеток
Всего = 53

Всего: 55

128

ВНИМАНИЕ: Проставляется только то, что записано с этой стороны листа в разрезе строки



Олимпиада школьников «БЕЛЫЧОНОК»

Вариант № 2 Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ) МА0003151826

1	2	3	4	5	6	Σ
---	---	---	---	---	---	---

Задача 15

$$\begin{aligned} \frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} &= 1 - \frac{5}{a+5} + 1 - \frac{5}{b+5} + 1 - \frac{5}{c+5} = \\ &= 3 - \frac{5}{a+5} - \frac{5}{b+5} - \frac{5}{c+5} = 1 + \frac{2}{a+5} + \frac{2}{b+5} + \frac{2}{c+5} \end{aligned}$$

~~так как $a, b, c \geq 1$ то $\frac{2}{a+5} + \frac{2}{b+5} + \frac{2}{c+5} \geq 0$~~

$$= 1 + \frac{2}{a+5} + \frac{2}{b+5} + \frac{2}{c+5}$$

одно из равенств

$$a=1; b=1; c=1.$$

$$\frac{1}{1+5} + \frac{1}{1+5} + \frac{1}{1+5} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

условия выполняются

08.

ВНИМАНИЕ! Проверьте только то, что записано с этой стороны листа в размах справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 3 1 5 5 6 2 6

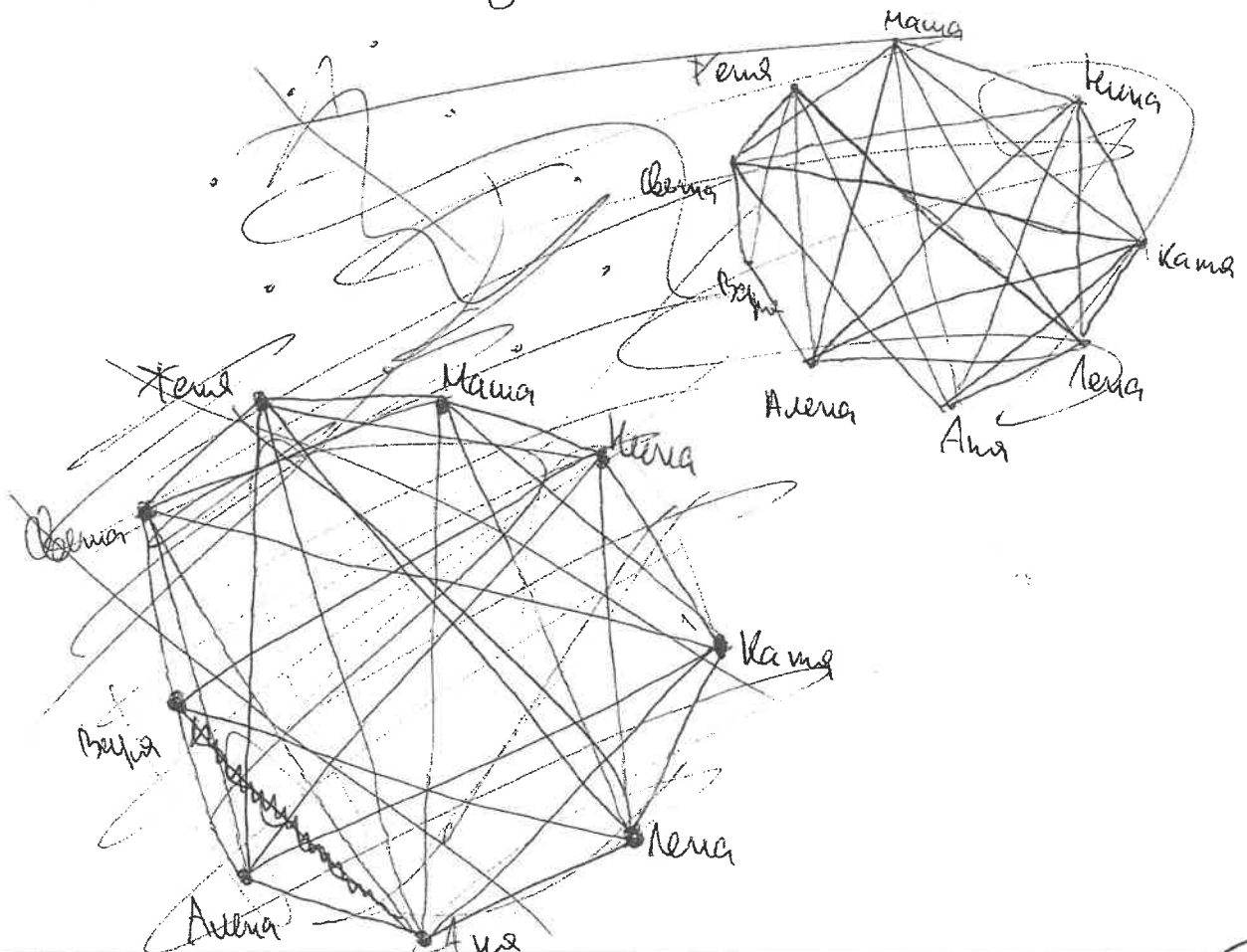
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	0	18	x		58

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Маша перемещалась как муравей (изучивая) с 5 муравьями $\Rightarrow$ все перемещалось с не менее чем 5 муравьями $\Rightarrow$ возможные кол-во перемещений каждой девочки 5, 6, 7, 8 (Значит м.ч. девочек всего 9). 5 и 7 невозможно, ведь тогда будет $5 \cdot 9 = 35$ и $7 \cdot 9 = 63$ сумма степеней всех вершин (девочки - вершины, перемещения - ребра), а как известно сумма степеней всех вершин графа чётно из-за свойства рукопожатия $\Rightarrow$ возможные кол-ва перемещений каждой девочки либо 6, либо 8. 8 можно было, м.ч. тогда такой граф $\Rightarrow$ все условия изучены выполнены.
Пример на 6 перемещений у каждой девочки:



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

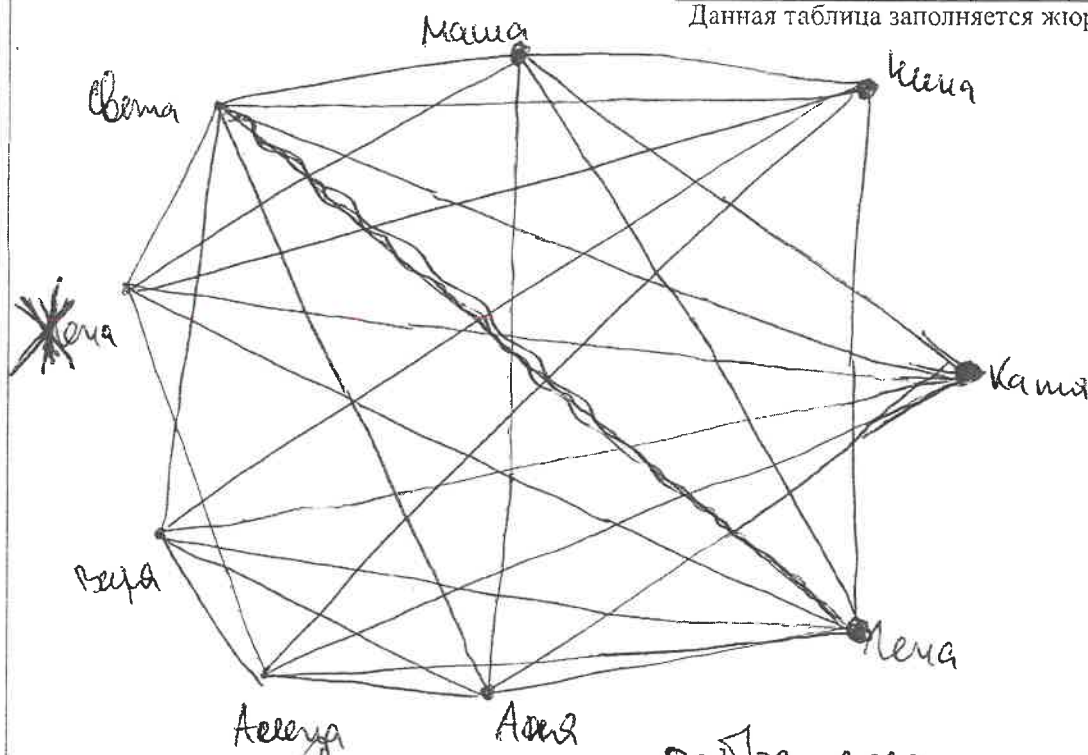
М А О О О 3 1 5 5 6 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1 (Продолжение).



ребра, соединяющие
Машу и Свету (случайно
провер).

участие во всем.

У всех по 6 перешлок. $\rightarrow$ всего возможностей $\frac{6 \cdot 9}{2} = 27$ и

Ответ: 27 и 36 перешлок возможностей.

208.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 3 1 5 5 6 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$\sqrt{2}$

Пусть:

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = N \leftarrow \text{натуральное} \quad | \cdot 5$$

$$-n^2 + 6n + 55 = 5N \quad \text{м.и. } N - \text{натуральное, } 5N - \text{може } \Rightarrow 6n + 55 > n^2.$$

$$6n + 55 > n^2$$

Это важно учитывать, когда $n = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$.

Если $n \neq 11$, то $6 \cdot 11 + 55 = 11^2$.

~~Если $n = 11$~~

Квадраты растут быстрее с 11^2 как минимум на $12^2 - 11^2 = 23$ (далее 25, 27, 29, ... (монотонность из разности квадратов). Но 23 > 6, 25 > 6 и т.д. всего к левой части прибавляем только 6 каждый раз. Но $6 \cdot 10 + 55 > 10^2$. Рассмотрим все варианты: (самое простое)

Каждому все возможные варианты где N : $6n + 55 - n^2 = 5N$:

($n = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$.)

$n=1 \Rightarrow 5N = 60 \Rightarrow N=12$ натуральное, подходит. ✓

$n=2 \Rightarrow 5N = 63 \Rightarrow N \notin \mathbb{N}$ не подходит.

$n=3 \Rightarrow 5N = 64 \Rightarrow N \notin \mathbb{N}$ не подходит.

$n=4 \Rightarrow 5N = 69 \Rightarrow N \notin \mathbb{N}$ не подходит.

$n=5 \Rightarrow 5N = 60 \Rightarrow N=12$ натуральное, подходит. ✓

$n=6 \Rightarrow 5N = 55 \Rightarrow N=11$ натуральное, подходит. ✓

$n=7 \Rightarrow 5N = 48 \Rightarrow N \notin \mathbb{N}$ не подходит.

$n=8 \Rightarrow 5N = 39 \Rightarrow N \notin \mathbb{N}$ не подходит.

$n=9 \Rightarrow 5N = 27 \Rightarrow N \notin \mathbb{N}$ не подходит.

$n=10 \Rightarrow 5N = 15 \Rightarrow N=3$ натуральное, подходит. ✓

Ответ: найдены натуральные n 4 штуки. ($n=1$; $n=5$; $n=6$; $n=10$)



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

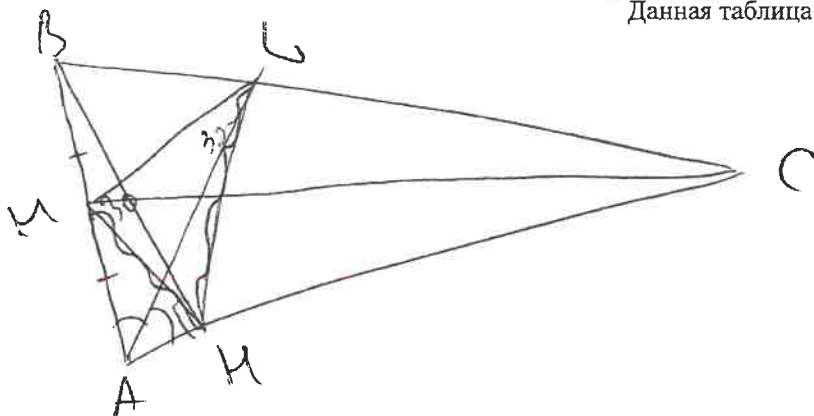
М А О О О З 1 5 5 6 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

В



Заметим, что $\triangle MBA$ прямоугольный
 ML - медиана $\triangle ABC$ $\Rightarrow ML = LZ = BM = MA$.
 П.ч. $\triangle MLC$ - $\triangle$ и $ML = LC \Rightarrow \angle MLC = \angle LMC$
 $\angle MLC = 150$.

од.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа
 в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О З 1 5 5 6 2 6

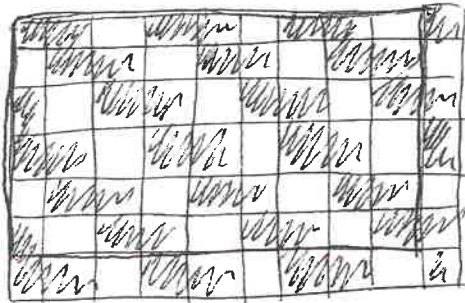
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

14

На 47 монет есть контрфакт.



На ≤ 47 контрфакт

(≤ 47 монет образует монету
определённого размера).

ответ, все правильно

Однако в каждом ряду не более 7 монет, иначе будет 1×3 прямоугольник $\Rightarrow$ всего монет должно быть не более 49 (это же число, чтобы было 1×3 или 3×1 прямоугольника).

Рассмотрим, почему максимум не может быть 49.

Оказывается, в каждом 3×3 не более 6 закрашенных, чтобы не было 1×3 или 3×1 (ответ). $\Rightarrow$ в прямоугольнике 6×6 не более $6 \cdot 6 = 36$ монет. А в ряду не более 7 монет, иначе будет 1×3 . А в столбце не более 5 монет, иначе будет 3×1 . Заполним, что если в ряду не более 7, а в столбце не более 5, то возможно максимум, меньше, чем в столбце. Если примем не более 11 монет. Суммарно очень на максимумом число монет очень мало $36 + 11 = 47$. $\Rightarrow$ минимальное возможное кол-во монет это 48.

Ответ: 48.

188

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 3 1 6 3 3 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

1	2	3	4	5	6	Σ
20	16	0	18	0		54

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Представим переписки девочек в виде графа:

Факт того, что кол-во переписок было одинаковое говорит о том, что степени всех вершин равны.

Всего 9 девочек, представим все переписки как: $\frac{9k}{2}$ - кол-во

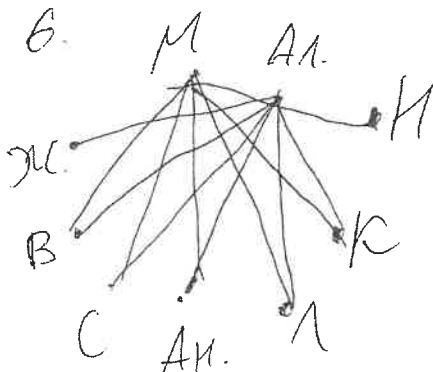
переписок - всего k - степени вершин.

Заметим, что $k \geq 2$. k - это также кол-во подгрупп, с которыми общалась

с каждой девочкой. $k \geq 6$. Поэтому

это по условию мама общалась с 5-ю девочками. 5×2 , поэтому

хотя бы 6.



Пусть каждая общалась со всеми кроме двух ближайших т.е. одной слева и одной справа.

Итак, у всех по

6 переписок и того: $\frac{6 \cdot 9}{2} = 27$ переписок в общении.



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 3 1 6 3 3 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

~ 1 (продолжение)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Есть вариант, когда каждая общалась с каждой. Очевидно, что он работает и не противоречит условиям. ~~Тогда~~ Тогда считаем сколько тогда переписок: $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ переписок.

Ответ: 27; 36.

208.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

МА 0003163326

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N2

$n \in \mathbb{N}$

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 \in \mathbb{N}$$

Преобразуем выражение:

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = \frac{6n}{5} - \frac{n^2}{5} + 11 =$$

$$= \frac{n(6-n)}{5} + 11 \in \mathbb{N}, \text{ а значит}$$

Большее нуля.

$$\frac{n(6-n)}{5} + 11 > 0$$

$$\frac{n(6-n)}{5} > -11$$

Также $\mathbb{N}$ числа
целые, а значит,
это либо $(n) : 5$, либо
 $(6-n) : 5$.

Докажем, что (n)
может принимать
значения от 1 до 10

Пусть (n) может
быть больше 10. Тогда:
приемлемые значения,
 $\frac{n(6-11)}{5} (?) > -11$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа
в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 3 1 6 3 3 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 2 (продолжение)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$\frac{11 \cdot (-5)}{5} > -11$$

$$-11 > -11$$

Противоречие. Таким образом, (n) принимает значения от 1 (по условию) до 10 включительно.

Оказывается, если $n \equiv 2$, то оно нам не подходит, потому что дробь $\frac{n(6-n)}{5}$ не будет целой.

$6 \equiv 1$, также заметим, что нам не подходят (n) , которые: $n \equiv 3$; $n \equiv 4$. По аналогичной причине

итак, если $n \equiv 1$, то $(6-n) \div 5$, также если $n \equiv 0$, то $n(6-n) \div 5$.

Итак нам подходят n от 1 до 10, которые делятся на 5 либо имеют остаток 1. Таких n всего 4: (1); (5); (6); (10). Они подходят, доказываемая очень просто - подстановкой вместо n .

Ответ: 4

165.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

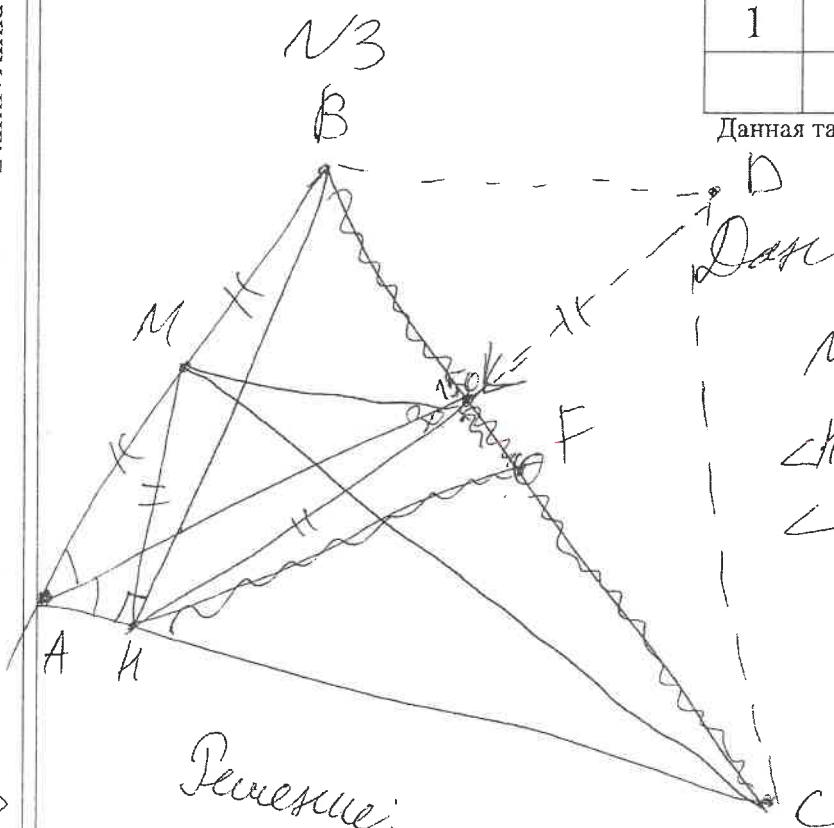
М А 0 0 0 3 1 6 3 3 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Дано: $MH = LH = 12$

$$MB = MA$$

$$\angle HAL = \angle MAL$$

$$\angle LMH = 30^\circ$$

Решение:

1) $\triangle ABH$ — прямоугольный $\Rightarrow MH = MB = AM$

2) Пусть т. F — середина BC (медiana)

3) $\triangle HBC$ — прямоугольный $\Rightarrow HF = BF = FC$

О.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О З 1 6 3 3 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

Троецз говоря ~~кстати~~
у Влада получилось так, что 3 монеты лежат подряд в ряду или строке. Докажем, что половины монет не хватит:

и таких блоков 7×2

5 штук.

0		0		0		0
	0		0		0	

(7×5) не хватит

~~Докажем, что $(7 \times 5 + 1)$ не хватает.~~

~~Пусть 36 монет не хватит.~~

Докажем, что 48 монет не хватит:

Здесь ровно 23 пустых места.

3	2		2	2		2	2		2
	2	2		2	2		2	2	
2		2	2		2	2		2	2
2	2		2	2		2	2		2
	2	2		2	2		2	2	
2		2	2		2	2		2	2
2	2		2	2		2	2		2

Докажем, что 48 хватит:

Разобьем таблицу на "тройки" пример? нужен рисунок (или более подробное описание)
есть прямоугольники 1×3 и 3×1 .
Таковых $69 : 3 = 23$. И еще одна клетка

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № _____

М А 0 0 0 3 1 6 3 3 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



N 4 (продолжение)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

В каждый прямоугольник можно положить как максимум 2 монеты, иначе - ~~проигрываем~~ мы проигрываем, потому что усл. задачи выполнено. (Доказываем, что 48 монет хватит ~~каким-то~~ методом от противного). Итак, 2 монеты $\cdot$ 23 прямоугольника + 1 клетка = 47 возможных монет. А у нас монет 48. Значит какая-то монета обязательно попадет в прямоугольник с 2-мя монетами, станет третьей и усл. задачи будет выполнено. Пример, что 47 не хватает $\checkmark$
Док-во, что 48 хватит $\checkmark$
т.т.н.

Ответ: 48 монет.

185.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

МАОООЗР6ЗЗ26

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N5

~~Докажем, что $x^4 + 3 \geq 4x$~~

~~$$x^4 + 1 + 1 + 1 \geq x \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$~~

~~$$a^3 + b^3 + c^3 = 3$$~~

~~Упростим выражение~~

~~$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) + c^3 =$$

~~$$= 3$$~~~~

~~Ниче~~

N5

Пусть $a = b = c$, тогда $a^3 + b^3 + c^3 = 3$

$$\frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3} \geq \frac{3}{4}; \text{ все работает.}$$

ИЮ пусть $a \geq b \geq c$ тогда

$a \geq 1; c \leq 1$. Пусть b - константа

и остается в пределах своего значения,

тогда какое-то будет увеличиваться

(а) на столько же будет уменьшаться

(с) и наоборот. Итак, из-за полной симметри-

чности выражения, минимум достигается при $a = b = c$. Этот вариант уже рас-

смотрен ранее.

од.

ВНИМАНИЕ! Проверяться только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 3 1 6 8 5 2 6

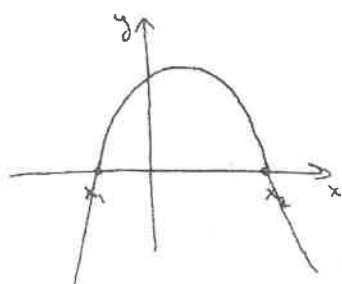
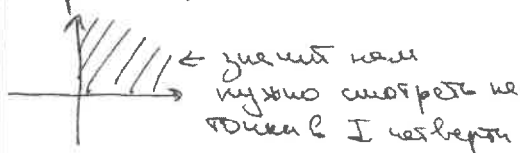
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
78	20	0	20	0		58

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 2.

$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11$ - уравнение перебора.



То есть нам нужно найти целые значения y для $1 \leq x < 11$ (при $x=11$ $y=0$, что является не натуральным числом).

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 - \text{целое}$$

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n - \text{целое тоже.}$$

$\frac{n}{5}(6-n) - \text{целое также. А значит либо } n:5, \text{ либо } 6-n:5 (n \equiv 1).$

Посмотрим на $1 \leq n \leq 10$ (n должно быть натуральным) в остатках 0 и 1 по модулю 5:

1) $n=1$

$$-\frac{1}{5} + \frac{6}{5} + 11 = 12$$

2) $n=5$

$$-\frac{25}{5} + \frac{30}{5} + 11 = 12$$

3) $n=6$

$$-\frac{36}{5} + \frac{36}{5} + 11 = 11$$

4) $n=10$

$$-\frac{100}{5} + \frac{60}{5} + 11 = 3$$

Все значения соответствуют условию, значит все 4 варианта натур. n , при которых значение выражения тоже натуральное.

Ответ: 4.

208.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	O	O	O	3	1	6	8	5	2	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 4.

Or let: 48 months

09/09/20

Дарзайте в клетках с крестиками монеты
не касаясь.

не трудно заметить, что в любом приращении $3 \cdot 1$ или $1 \cdot 3$ будет ровно 1 крест, а значит ^{таким} любое расставление не ≤ 44 (крестов $23, 40 - 23 = 44$) не будет удовлетворять условию.

Пример: Так как у нас 43 монеты, значит либо нетует один
столбец с ≥ 6 монетами, либо 3 поперек идущих с.б.

* Предположим, столбцов ≥ 6 монотонных, а сеть расстановки, которая не соответствует этим условиям. Значит ≤ 4 столбцов по 5 монеток, а в остальных ≤ 4 .

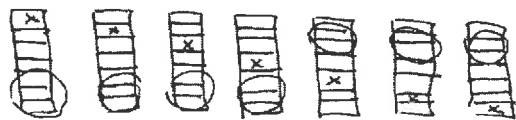
Значит ≤ 4 столбцов по 5 монеток, а в остальных ≤ 4 .

Но тогда все монеты ≤ 47 , что меньше 48, а значит хотя бы одно условие верно.

1) Есть столбы с ≥ 6 монетами.

Либо 4 монеты (весь столбец зинет)  ← 4 эта графа
вот число.

Аусо 6 монд



И в любом случае фотке
вернее его.

2) Три столбца по 5 погмы.

25

Всего 15 монет.

Предположим, что не знает все x дан

$\square \square \square \leq 2$. Итого $\leq 14 (2 \cdot 7)$, что неверно.

Значит хотя бы одна работа есть.

20d.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

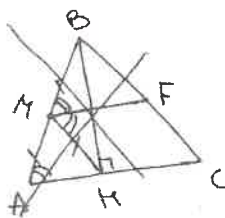
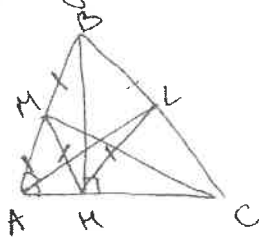
М А 0 0 0 3 1 6 8 5 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 3.



HN - медиана в равнобедренном $\triangle ABH \Rightarrow$
 $\Rightarrow HN = AN$, т.е. $BN = AN = MN = LN = 12$. $AB = 24$
 $\angle HAN = \angle MNA$, т.к. $\triangle AMN$ - $\mu\delta$.
 $\angle BMN = 2 \cdot \angle HAN$, как внешний угол $\triangle AMN$.
 HF - биссектриса $\angle BHN$.

~~Предположим, $\angle BAC = 30^\circ$, тогда:~~

~~1) $BH = \frac{1}{2} AB = 12$~~

~~2)~~

05

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О З 1 6 8 5 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 1.

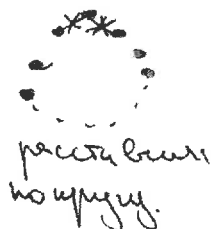
1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

У нас нечетное кол-во людей, и кол-во ребер у всех одинаковое (ребра-переноски). Значит у каждого переноски будет четное число. Минимум переноски - 5, т.е. у каждого либо 6, либо 8 переноски.

Если у каждого по 8 переноски, то все условия выполняются (каждый общается с каждым), и переноски всего $\frac{5 \cdot 8}{2} = 36$.

Если же у каждого по 6 переноски, то мы можем найти пример, который удовлетворяет условиям, и переноски будет $\frac{5 \cdot 6}{2} = 24$.



Пусть каждая девушка не будет переписываться с соседями.

Мы можем подобрать такое расписание, которое удовлетворяет условиям.

Ответ: 24 или 36.

188

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

МАОООЗЛВГЕЗС

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 5.

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3$$

Без ограничения общности $a \leq b \leq c$.

Заметим, что $a \leq 1$, иначе $1 < a \leq b \leq c \Rightarrow 1 < a^3 \leq b^3 \leq c^3 \Rightarrow 3 \cdot 1 < a^3 + b^3 + c^3$, противоречие.

Аналогично для $c \geq 1$.

$$\frac{1}{a^4+3} \geq \frac{1}{a^3+3} \geq \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$$

$$a^4+3 \leq a^3 \cdot 1 + 3 \leq 1^3+3$$

$$\frac{1}{b^4+3} + \frac{1}{c^4+3} \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{c^4 + b^4 + 6}{(b^4+3)(c^4+3)} \geq \frac{1}{2}$$

$$2c^4 + 2b^4 + 12 \geq b^4c^4 + 3b^4 + 3c^4 + 9$$

$$3 \geq b^4c^4 + b^4 + c^4$$

Q.E.D.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М А О О О 3 1 8 3 1 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	0	12	x		52

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамках стрелки.



Задача 2.

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 - \text{натуральное}$$

~~натуральное~~ $\Rightarrow$

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n - \text{целое.}$$

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 - \text{натуральное} \Rightarrow$$

$$-n^2 + 4n + 60 \text{ тоже натуральное } (-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 \cdot 3)$$

$$\Rightarrow -n^2 + 4n + 60 > 0$$

$$60 > n^2 - 4n$$

$$64 > n^2 - 4n + 4$$

$$64 > (n-2)^2$$

При $n \geq 2$, $n-2 \geq 0$.

Рассмотрим отдельно случай, когда $n < 2$, т.е. $n=1$

$$64 > (1-2)^2 \Rightarrow 64 > 1.$$

но при n подставим в указанное выражение

$$-\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + 20 = 21 - \text{натуральное}$$

Когда $n \geq 2$

$$64 > (n-2)^2 \Rightarrow 8 > n-2$$

$$n < 10$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М А О О О 3 1 8 3 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 2 (2 часть)

Заметим, что $n \cdot 4$.

$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20$ натуральное, т.е. целое 4
и целое $\Rightarrow$

$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n$ тоже целое $\Rightarrow$

$\frac{-n^2 + 4n}{3}$ целое, т.е. $-n^2 + 4n : 3$

$-n^2 + 4n : 3$

$n(n-4) : 3$ т.е.

3-простое $\Rightarrow$

$\begin{cases} n : 3 \\ 4-n : 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} n \equiv 0 \\ n \equiv 1 \end{cases}$

Т.е. $n < 10$, всего подходит 6

вариантов: 1, 3, 4, 6, 7, 9.

Проверяем. $n=1$ уже проверено.

$n=3$

$$-\frac{3^2}{3} + \frac{4 \cdot 3}{3} + 20 = \frac{12-9}{3} + 20 = 21$$

$n=4$

$$\frac{-4^2}{3} + \frac{4 \cdot 4}{3} + 20 = \frac{-4^2 + 4^2}{3} + 20 = 20$$

$n=6$

$$-\frac{6^2}{3} + \frac{4 \cdot 6}{3} + 20 = \frac{-36+24}{3} + 20 = -4+20=16$$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М А О О О 3 1 8 3 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Пронумерованы только те, что записаны с этой стороны листа

Задача 2 (3 точки)

$$n=7$$

$$\frac{-7^2}{3} + \frac{4 \cdot 7}{3} + 20 = \frac{-49+28}{3} + 20 = -7+20=13$$

$$n=9$$

$$\frac{-9^2}{3} + \frac{4 \cdot 9}{3} + 20 = -15+20=5$$

Все 6 n проходят

Ответ: 6

208.

Задача 4.

Заметим, что т.ч. все девушки сыграли одинаковое кол-во партий $\Rightarrow$

что партий каждая сыграла не менее 3 партий (т.ч. Маша сыграла 3: с Ниной, Катей и Светой)

А так же не более 5 (т.ч. Маша не сыграла 1 и 6 возможных (Всего 6 т.ч. каждая девушка сыграла хотя бы не более 4 партий)

Тогда возможное кол-во партий для каждой: 3, 4, 5.

Пример на 3:

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

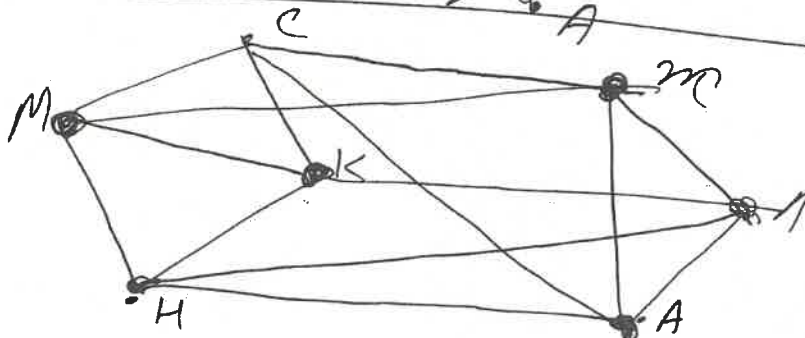
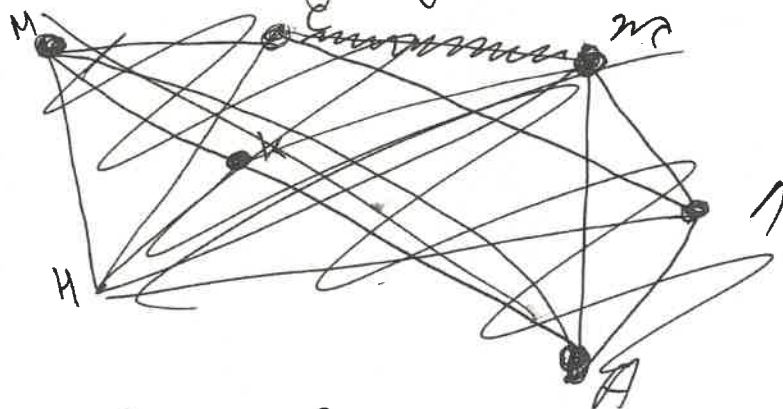
М А О О О 3 1 8 3 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Но заметим, что если представить игру, как граф, где девушки - вершины, партии - ребра, то и вершины четное кол-во и все степени вершин одинаковые, то они должны быть четны, иначе сумма степеней вершин нечетна $\Rightarrow$ ребер нечетное кол-во. $\Rightarrow$ 3 и 5 не подходят. Пример на 4:



Ответ:
4

206.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с той стороны листа в рамке цифр



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М А 0 0 0 3 1 8 3 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача № 4.
Раскрасим доску
следующим образом:

1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2

Заметим, что любой прямоугольник 1×3 или 3×1 покрывается 3 разными цветами. $\Rightarrow$ Чтобы обзавестись всеми прямоугольниками 1×3 или 3×1 полностью покрываем доску монетами, причем обязательно по 3 цвета. $\Rightarrow$ Монет не менее 55. (Если их хотя бы 54 (или меньше) они все могут встать на цветах 1 и 2.) По принципу Дирихле если монет хотя бы 55, то обязательно найдется такой прямоугольник.

Ответ: 55.

128.



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

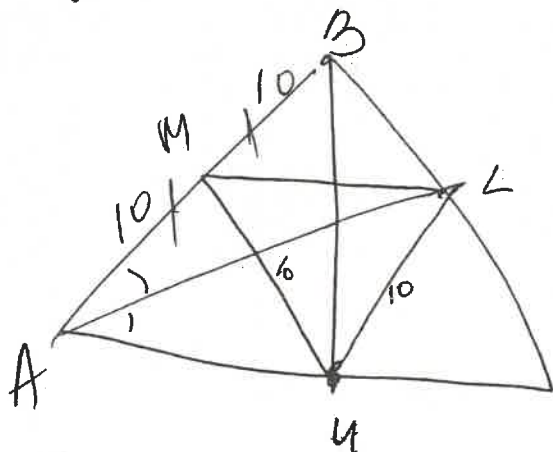
М А 0 0 0 3 1 8 3 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 3.



1) Заметим, что HM — средняя в прямоугольном $\triangle AHB \Rightarrow HM = \frac{1}{2} AB$, а т.ч. $HM = 10$ (по условию) $\Rightarrow AB = 20$

Замечание: Замена переменной.

Если $\angle LAM = \alpha$, $\angle HAM = \beta$ т.ч.

$$\angle ALH = 180^\circ - \angle LHA - \angle LAH = 180^\circ - 120^\circ - \alpha - 2\alpha = 60^\circ - 3\alpha \Rightarrow$$

$$\alpha < 20$$

$$\angle ALM = 180^\circ - \angle LMA - \angle LAM = 180^\circ - 30^\circ - (180^\circ - 4\alpha) - \alpha = 3\alpha - 30^\circ \Rightarrow$$

$$\alpha > 10$$

Небольшим подбором значений, что подходит только $\alpha = 75^\circ$.



Ответ: 20

$$\Rightarrow \angle BAH = 30^\circ \Rightarrow$$

$BH = \frac{1}{2} AB = 10$ (катет против угла 30°) $CM = \frac{1}{2} BC$, т.ч. $\angle MAH = 30^\circ \Rightarrow BH = CM = 10 \Rightarrow$ сумма высот

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О З 1 9 1 4 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



N2

$(-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20) \in \mathbb{N}$ при каких $n \in \mathbb{N}$?

1	2	3	4	5	6	Σ
15	20	0	12	2		49

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Для начала найдём, при каких значениях n это выражение принимает положительные значения: применим квадратный трёхчлен.

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 = 0$$

по теореме Виета:

$$n_1 n_2 = \frac{20}{-\frac{1}{3}} = -60$$

$$n_1 + n_2 = \frac{-\frac{4}{3}}{-\frac{1}{3}} = 4$$

$$n_1 = -6; n_2 = 10$$

по теореме Дискриминанта:

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 = 0$$

$$D = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 20 = \frac{16}{9} + \frac{80}{3} = \frac{16 + 240}{9} = \frac{256}{9} = \left(\frac{16}{3}\right)^2$$

$$n_1 = \frac{-\frac{4}{3} - \frac{16}{3}}{-\frac{2}{3}} = 10$$

$$n_2 = \frac{-\frac{4}{3} + \frac{16}{3}}{-\frac{2}{3}} = -6$$

2) Значение старшего коэффициента (перед n^2) отрицательно, а значит ветви графика квадратного уравнения направлены вниз. $\Rightarrow$ квадратное уравнение принимает положительные значения при n -значениях между n_1 и n_2 . Т.е.

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 > 0 \text{ при } n \in (-6; 10). \text{ По условию } n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ значения, принимающие n : $n \in [1; 9]$.

3) Найдём значения n , при которых квадратный трёхчлен принимает натуральные значения.

$$(-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20) \in \mathbb{N} \quad 20 \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{Z}$$

$\frac{1}{3}n(4-n) \in \mathbb{N}$ — в этом произведении присутствует множитель $\frac{1}{3}$, чтобы он "дал" натуральное значение в результате, другой множитель должен быть $\div 3$.

$$\Rightarrow \text{либо } n \div 3, \text{ либо } (4-n) \div 3 \quad | \quad n \in [1; 9]$$

$$n = 3; 6; 9 \quad n = 1; 4; 7$$

$$\Rightarrow n = 1; 3; 4; 6; 7; 9$$

Ответ: $n = 1; 3; 4; 6; 7; 9$.

208.

Вариант № 1

М А О О О 3 1 9 4 9 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа



НЧ⁽¹⁾
Чтобы найти минимальное кол-во монеток, при котором выполняется условие, нужно найти максимальное кол-во при котором не выполняется, и прибавить 1. В доске 8 строк и 10 столбцов.

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

1) Чтобы было максимальное кол-во монет (когда не выполняется условие), должно быть минимальное кол-во пустых клеток.

2) Чтобы в строке не нашёлся нулевой прямоугольник, в ней должно быть минимум 3 пустые клетки, иначе

в ней можно будет найти такой прямоугольник, т.е. если между монетами пустыми

клетками, или пустыми клетками и краем доски есть 3 монеты — то нулевой прямоугольник. Т.е. расстояние между ними не более 2. Но при длине строки в 10 клеток её нельзя "покрыть" 2 пустыми клетками полным образом. $\Rightarrow$ всего пустых клеток может быть не менее $3 \cdot 8 = 24$.

3) Чтобы в столбце не нашёлся нулевой прямоугольник, в нём должно быть минимум 2 пустых клеток.

Кол-во аналогичное с пунктом 2, но в этом случае высота столбца 8. Всего пустых кл. не менее $2 \cdot 10 = 20$.

4) Пояснение доказательств в пункте 2 и 3: разобьём пустые клетки на группы эта клетка и 2 монеты до неё. В случае, когда между пустыми клетками максимальное расстояние — 2, длина строки максимальная (если строка длиннее, то этих монет не будет хватать, чтобы "покрыть" её, т.к. расстояние будет > 2 между кл.). А значит будет n таких групп и ещё 2 монеты после них. (где n — кол-во пустых клеток). Т.е. чтобы монетами можно было "покрыть" строку (столбец), то должно выполняться условие $3n + 2 \geq x$ (где x — длина строки).

5) Получается, что всего пустых кл. не менее 24. Будем рассматривать строки. Разобьём строки на группы по 3 строки. Чтобы "повторяя" эти группы не нашёлся нулевой прямоугольник в столбцах, в этих группах пустая кл. должна быть в разном столбце. При предположении в условии — 3 кл. в каждой строке, их будет 9. а надо 10. Т.к. всего строк 8, то

почему надо? доказывали только, что $10 \geq 9$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 7

Н А О О О 3 1 9 4 4 2 6

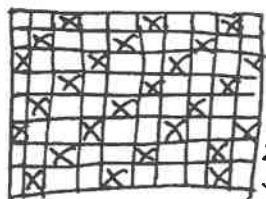
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 4(2)
Будет по 10 ее пустых кл. в 2 «палках» группах из 3 строк и 9 пустых кл. в 7 «непалкой» (из строк). В этой «непалкой» по предыдущему условию будет по 3 пустых кл. в строке. Т.е. всего пустых клеток не менее $10 \cdot 2 + 3 \cdot 7 = 26$. $\Rightarrow$ Максимум монет $8 \cdot 10 - 26 = 54$. А у Влада $54 + 1 = 55$ монет.

Можно также решить через раскраску: чтобы между любыми пустыми клетками было максимальная длина — 2, она будет такой:



При том строка с 4 пустыми кл. должна быть через каждые 2 строки, а также найдётся такой прямоугольник в столбцах. Минимум таких строк с 4 кл. может быть 2 (аналогия с пунктом 3 другого доп-ва). $\Rightarrow$ минимум пустых кл. $3 \cdot 6 + 4 \cdot 2 = 26$. $\Rightarrow$ Максимум монет $8 \cdot 10 - 26 = 54$. А у Влада $54 + 1 = 55$ монет.

Ответ: 55.

128.

№ 7

Всего 7 девочек. Каждая играла одинаковое число партий. А значит всего каждая могла сыграть от 0 до 6 партий. Но Мама играла с 3 девочками $\rightarrow$ каждая из них играла не менее 3 партий. А так же Женя не играла с Катей $\rightarrow$ она играла не более 5 партий ($6 - 1$) $\Rightarrow$ все играли не более 5 партий. $\Rightarrow$ Они все играли от 3 до 5 партий.

Представим их как граф, где вершины — девочки и рёбра — партии. Если считать для каждой вершины рёбра, то при НЧ вел. ве вершин и НЧ вел. ве рёбер, выходящей из каждой, всего рёбер будет НЧ. $\text{НЧ} = \text{НЧ} \Rightarrow$ такого быть не может. (всего рёбер будет тогда $\frac{\text{НЧ}}{2} \notin \mathbb{N}$) Вершин 7 — НЧ. А значит варианты — у каждой по 3/5 партий не подходит ($3, 5, 7$ — НЧ). $\Rightarrow$ подходит только вариант по 4 партии.

Ответ: 4 партии.

158.

Вариант № 1

M A O O O 3 1 9 4 9 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N5

 $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Значение $a+b+c$ — наибольшее при $a=b=c$ (при a, b, c — положительные), т.к. графикквадратичной функции — гипербола. И при большем значении x^2 — при большем его изменении, меньше меняется значение x . $\Rightarrow$ среди значений вида x^2 не должны быть большие значения некоторых из них по сравнению с другими.Докажем, что при большем значении $a+b+c$ (где $a=b=c$, как мы выяснили), выражение $\frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5}$ — также большее.~~Бесконечная функция $f(a, b, c) = a+b+c$ — возрастающая, где наибольшее наибольшее значение~~

Бесконечные «мехвоточные» части у дробей до единицы:

 $\frac{a}{a+5} \rightarrow 1 - \frac{a}{a+5} = \frac{5}{a+5}$; $\frac{b}{b+5} \rightarrow \frac{5}{b+5}$; $\frac{c}{c+5} \rightarrow \frac{5}{c+5}$ (аналогично с a)Чтобы $\frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5}$ приняло максимальное значение,значения $(\frac{5}{a+5} + \frac{5}{b+5} + \frac{5}{c+5})$ должно принимать минимальное значение. А раз $(a+b+c)$ — наибольшее, то знаменателидроби — наименьшие $\Rightarrow$ дроби принимают наименьшие значения $\Rightarrow (\frac{5}{a+5} + \frac{5}{b+5} + \frac{5}{c+5})$ — наибольшее.Как мы выяснили ранее, $a=b=c \rightarrow a^2 = b^2 = c^2$ ($a^2 + b^2 + c^2 = 3$) $\Rightarrow a^2 = b^2 = c^2 = \frac{3}{3} = 1. \Rightarrow a=b=c=\sqrt{1} = 1$. $\Rightarrow \frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} = \frac{1}{1+5} + \frac{1}{1+5} + \frac{1}{1+5} = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. $\frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} \leq \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ — наибольшее значение. ~~неравенство~~ ~~тождество~~ доказано

Ч.т.д. (и то и требовалось доказать).

28.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа



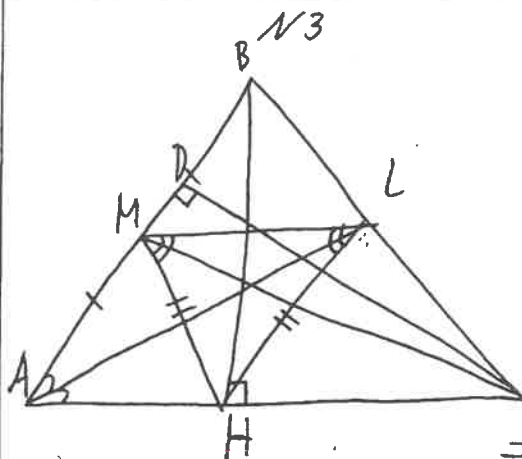
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 7

М А О О О 3 1 9 4 4 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ



Пояс: Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

CM-медиана $\rightarrow AM = MB$

AL-бис-са $\rightarrow \angle BAL = \angle CAL$

BH-высота $\rightarrow BH \perp AC$

CD-высота $\rightarrow CD \perp AB$

1) $MH = LH = 10 \rightarrow \triangle MLH$ - равнобедр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle LMH = \angle MLH = 30^\circ$

2) П.к. $\angle BDC = \angle BHC = 90^\circ$; то BDHC - впис. в окр., где BC - диаметр.

Ответ: 30.

05.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М А О О О 3 1 9 7 5 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	12	x	20	20		72

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N1

Рассмотрим граф, где вершины — девочки, ребрами соединены девочки, игравшие друг с другом.

П.к. все сыграли одинаковое число партий, степени всех вершин равны. Обозначим это число буквой d .

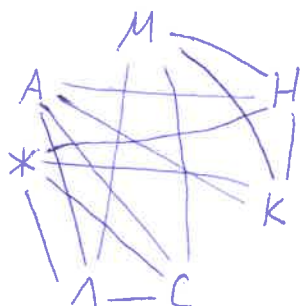
$d \geq 3$, т.к. Маша играла не менее, чем с 3 другими девочками.

П.к. сумма степеней вершин в любом графе равна удвоенному кол-ву рёбер, и количество вершин нечётно, d — чётное число

$d \leq 6$, т.к. каждая вершина может быть соединена не более, чем с 6 оставшимися.

Если $d = 6$, то ^{любая} ~~каждая~~ две сыграли партию, но Маша не играла с Катей по условию.

Встаёт $d = 4$. Это возможно, например:



Ответ: 4 208.

N2

Число является натуральным, если оно является целым и положительным. $-\frac{1}{4}n^2 + 2n + 12$ целое, когда $-\frac{1}{4}n^2$ целое. $-\frac{1}{4}n^2$ целое, когда n кратно двум.

$$-\frac{1}{4}n^2 + 2n + 12 > 0 \Leftrightarrow n^2 - 8n < 48$$

$$\text{При } n = 12 \quad n^2 - 8n = 144 - 96 = 48$$

$$\text{При } n > 12 \quad n^2 - 8n > 48; \quad \text{При } n < 12 \quad n^2 - 8n < 48$$

Получаем, n — чётное и $n < 12$. Всего 5 таких чисел: 2; 4; 6; 8; 10

Ответ: 5

128.

Вариант № 3

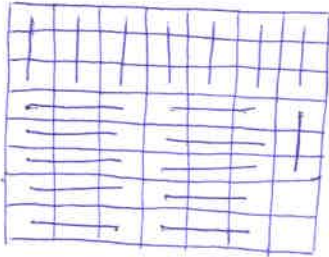
М А О О О 3 1 9 7 5 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

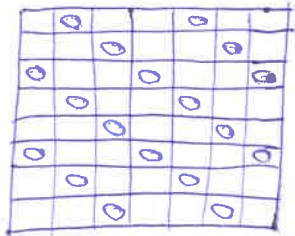
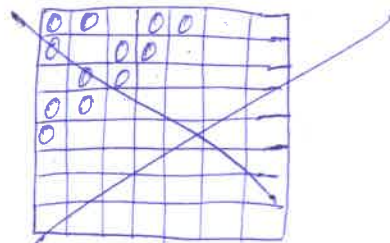
н4



Если для какого-то количества монет возможно расставить монеты так, что нет прямоугольника 1×3 или 3×1 , во всех клетках которого есть монета, то это можно сделать для любого меньшего количества монет путём убирания монет с доски.

Значит, наименьшее количество монет, при котором найдётся прямоугольник, на 1 больше ~~меньше~~ наибольшего количества монет, при котором его ~~не~~ может не быть. Найдём это количество.

На рисунке сверху в каждом прямоугольнике, обозначенном $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$ или $\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}$, не более двух монет. Также может быть по одной монете в оставшихся двух клетках. Всего $2 \cdot 18 + 2 = 38$ монет, и это действительно возможно:



$\square$ - пустое место
 $\square$ - монетка

Значит, ответ на задачу равен $38 + 1 = 39$

Ответ: 39 монет 208

$$\frac{1}{abc} = \frac{a^5+b^5+c^5}{abc} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}$$

$$\frac{b^4+c^4}{b^6+c^6} - \frac{1}{bc} = \frac{(b^4+c^4)bc - (b^6+c^6)}{(b^6+c^6)bc} = \frac{b^5c+b^5c^5-b^6-c^6}{(b^6+c^6)bc} = \frac{(b^5-c^5)(c-b)}{(b^6+c^6)bc}$$

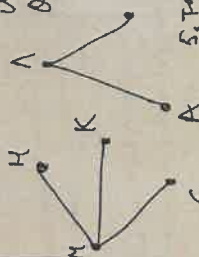
$(b^6+c^6)bc > 0$ т.к. $b > 0; c > 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{При } b > c \quad b^5-c^5 > 0; \quad c-b < 0, \text{ тогда } \frac{(b^5-c^5)(c-b)}{(b^6+c^6)bc} < 0 \\ \text{При } c > b \quad b^5-c^5 < 0; \quad c-b > 0, \text{ тогда } \frac{(b^5-c^5)(c-b)}{(b^6+c^6)bc} < 0 \\ \text{При } b=c \quad b^5-c^5=0, \text{ тогда } \frac{(b^5-c^5)(c-b)}{(b^6+c^6)bc} = 0 \end{array} \right\} \frac{b^4+c^4}{b^6+c^6} - \frac{1}{bc} \leq 0$$

$$\text{Аналогично, } \frac{a^4+c^4}{a^6+c^6} - \frac{1}{ac} \leq 0 \text{ и } \frac{a^4+b^4}{a^6+b^6} - \frac{1}{ab} \leq 0. \text{ Тогда } \frac{b^4+c^4}{b^6+c^6} + \frac{a^4+c^4}{a^6+c^6} + \frac{a^4+b^4}{a^6+b^6} - \frac{1}{ab} - \frac{1}{bc} - \frac{1}{ac} \leq 0.$$

$$\frac{b^4+c^4}{b^6+c^6} + \frac{a^4+c^4}{a^6+c^6} + \frac{a^4+b^4}{a^6+b^6} \leq \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} = \frac{1}{abc}. \text{ Доказано. 208}$$

ВНИМАНИЕ! Проверьте только то, что записано с этой стороны листа
в рамке справа



№1. У нас есть 7geb.
Считаем что это 7geb
7 вершин в 7mate.

	1	2	3	4	5	6	Σ
	15	20	x	20	x		55

Данные таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

это девочки. Скамеечки от них меньше содом
играли по волевым редра, а если не играли
то не проведи. Вот у нас есть ^м - девочки
маленькие с ними играли по волевым.
Вот играли с ними, как, сема.

К
пу укоротили шнур. А лента играла
С Аней и мной. А пенью не играли

5. Так как $\alpha \in \mathbb{R}$, то α — действительное число, и следовательно, $\alpha \in \mathbb{R}$.

[illegible][illegible]

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М А О О О 3 2 2 3 2 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

2. Начало

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 \in \mathbb{N}$$

тоже как число n - натуральное

пусть $-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20$ - натуральное число то должно быть что оно больше либо равно 1. Поставим условие что $-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 \geq 1$. Выразим n

$$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 \geq 1 \quad | -20 \Rightarrow \frac{4n}{3} - \frac{1}{3}n^2 \geq -19$$

$$\frac{4n}{3} - \frac{1}{3}n^2 + 20$$

$$\frac{4n - n^2}{3} \geq -19 \quad | \cdot 3$$

$$4n - n^2 \geq -57 \Rightarrow n(4 - n) \geq -57$$

$$\text{При } n \geq 10 \Rightarrow n(4 - n) \leq -60 < -57$$

$$\text{Так при } n = 10 \Rightarrow 10(4 - 10) = -60 < -57$$

Потому что при $n = 10$ наше выражение уже меньше 57. А при n больше 10 то $n - n$ будет все меньше

А n будет все больше. Тогда $n(4 - n)$ будет меньше -57. А нам нужно чтобы

оно было больше либо равно -57. То есть $n \geq 10$ не подходит. Где n - натуральное. То есть остальные варианты

$$\text{где } n \leq 9. \text{ Еще надо } -\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20 \in \mathbb{N}$$

$$\text{нужно чтобы было } \frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n - \text{ было целым.}$$

Если будет что это не целое то все выражение будет не целым то есть будет не натуральное число. А нам

$$\text{нужно ком. число. Так } \frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n = \frac{4n - n^2}{3} \in \mathbb{Z}$$

тогда $4n - n^2$ должно делиться на 3. $4n - n^2 = 3n - n(n - 1)$ где $3n$ делится на 3.

Так как имеем множ. 3. То есть $-n(n - 1)$ должен делиться на 3 чтобы $3n - n(n - 1)$ делился на 3.

Олимпиада школьников «БЕЛЧОНОК»

Вариант № 4

M	A	0	0	3	2	2	3	2	2	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

к.2. Продолжить

	1	2	3	4	5	6	Σ
$-n(n-1):3$ числу							

Продолжить таблицу для заполнения

2. Продолжить

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$-n(n-1):3$ Числа n у нас остались в порядке от 1 до 9. То есть если $n:3$ то все поровну к нему выразим делитель $n:3$ то есть $n=3; 6; 9$ поровну. А делить пополам можно и числа, и поровну. Так как $дуга_{n-1}(1,1-1)=0$ а к нему делимы на любое число, и не поровну так $дуга_{n-2}(2-1) \rightarrow 2$ а то число не делимо на 3 то если выразимное $дуга_{n-2}$ не целым то есть не кан. числом. $n=3$ поровну, так $n=4$ поровну так как $дуга_{n-4}(4-1) = 12$ а это кратно 3. 5 не поровну так как $-5(5-1) = 20$ не кратно 3. 6 поровну, 7 поровну. $т.к. -7(7-1) = -42$ а это кратно 3. 8 не поровну. $т.к. -8(8-1) = -56$ а это не кратно 3. 9 поровну $т.к. -9(9-1) = -72$ а это кратно 3. ~~так~~ то есть должно у нас выразиться от 1 до 9. Но ~~так~~ 2, 5, 8 не поровну $9-3=6$. То есть вы-то кан. число и можно поровну разделить по не делению на 3 кратно 6.

End: 6

208.

ВНИМАНИЕ! Проверается только то, что записано в этой стороне листа
в рамке справа



Шифр (не заполнять)

1	2	3	4	5	6	Σ
---	---	---	---	---	---	----------

~~Chapman~~ Chapman

[illegible]

Лебэ 3 монетк. Так как в лодке приплыли
 Лебэ снов бы 1 ягода и лодка. То Лебэ
 на-бо монет 4. Быва не монет бум 5м.
 Так как ~~бы~~ как он работил на бы не монет на-
 ажен приплыли иже Лебэ 3 монет и
 приплыли 1х3 мн 3х1, монет монет
 монет бум ~~бы~~ так как бум ил с твоей расча-
 ность иже монет на-бо монет. бы 5х1 го 1.
 Того мы иждыш на-бо монет иже бум ~~бы~~
 иже монет на-бо монет 1х3 мн 3х1
 иже бы бум иже монет 3 монет, бы 0го 53
 Так как бум ~~бы~~ бум 1 ягода.
 иже бы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа.
в рамке справа

55 mm

5 more.

5. W3 5

Олимпиада школьников «БЕЛЪЧОНОК»

Вариант № 4

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

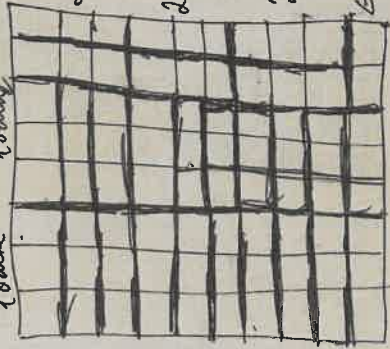
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Здесь
Здесь
Здесь

Вот разрезан грибок -
у нас 8 × 10 на
2 см, прямоугольник 1 × 3.
и нам - 60 спешу
 $10 + 60 + 2 + 2 + 2 = 26$.
и еще вот здесь ос-
тавок 2 шестки



2 см. Если нам - 60 мо-
нем 8000 55. То
всегда нейтрален при
3х1, 1х3 где есть 3 монеты

и ~~не~~ - допустим обратное тогда введем
1х3 и 3х1 в этом ~~разрезе~~ разрезе не дадим
двух в надрезе при 1х3 и 3х1. А и если
 $26 \cdot 2 = 52 + 2 = 54$ еще надо 2 монеты. Там
нам основно вбить. Тогда мы тогда дадим
медаль 54 а если будем 8000 55. То 6 монет
то даем 3 монеты по принципу дуплета.
Тогда нам, поворачивая нам - 60 монет 700
55 монет.

Опб: 55 монет. Нам нам - 60 монет

у Васа

208.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 3 2 6 9 0 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	18	x	0	2		40

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N1

1) Всего 7 девочек $\Rightarrow$ ~~максимум~~

$\Rightarrow$ максимум возможно партий ~~у~~ каждой девочки.

Но Жень не играла с Катей $\Rightarrow$ у Жени и у Кати

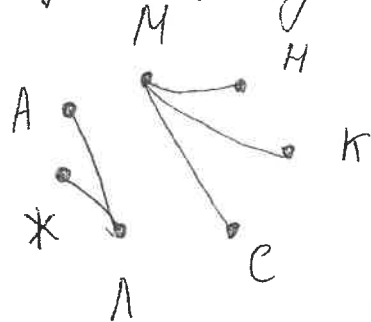
максимум 5 сыгранных партий, а значит

у остальных девочек тоже. 2) По условию Маша

играла с Микой, Катей и Светой $\Rightarrow$ минимум ~~у каждой девочки~~

3 партии у каждой ~~девочки~~. 3) Представим данную ситуацию в

виде графа, где вершина - девочка, ребро - партия.



Назовем вершины первой буквой имени девочки и отметим известные партии

4) Исходя из 1 и 2 действия делаем, что количество партий ≥ 3 и ≤ 5

Также известно, что в любом графе кл-во ~~вершин~~ вершин четной степени четно $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ у нас не может быть 7 девочек с 3 партиями и 7 девочек с 5 партиями (т.к. все эти числа нечетные). Остается только

вариант с 4 партиями у каждой девочки. ~~Вот пример получившаяся партии:~~

Вот пример получившаяся партии: МН, МК, МС, МЖ, НС, НЛ, КС, КЛ, КА, СЖ, ЛЖ, ЛА, ЖА, АН.

Ответ: 4 партии 208.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 3 2 6 9 0 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4 Пусть у Влада n монеток, тогда $(n-1)$ ~~минимум~~ количество

монеток, которые можно разместить на поле так, что прямоугольник 1×3 или 3×1 не образуется, ам. 3 монеты
Одним из самых «важных» ^{и простых} заполнений, будет являться каждый второй заполненный столбец. В этом случае $(n-1)$ монеток будет равняться $8 \cdot 5 = 40$

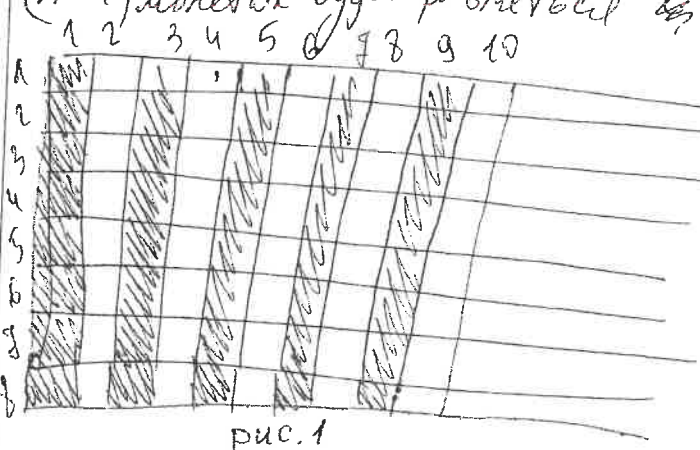


рис. 1

Так же ~~все~~ «важные» являются все ~~расположения~~ расположения такого же количества монеток, где не встречается полностью пустой квадрат 2×2 и/или квадрат 2×2 только с одной монетой

~~Но количество монет в этих вариантах одинаково, а способ расстановки похож. Поэтому можно рассмотреть только один вариант. Сделанные выводы будут применимы для всех «важных» вариантов.~~

Рассмотрим вариант заполнения, изображенный на рис. 1. Пусть $(n-1)$ не минимальное количество монет на поле, при ~~котором~~ котором следующая монета ~~не~~ станет частью полностью заполненного прямоугольника 3×1 или 1×3 . Тогда с рис. 1, изображ. на рис. 1 можно убрать хотя бы 1 монету. Например мы можем убрать монету с клетки в 1 столбце и 4 строке. А следующую монету поставить на клетку во 2 столбце и 7 строке. Но в этом случае ~~не~~ полностью заполненный прямоугольник 3×1 или 1×3 не образуется. ~~Продолжение на след. листе~~

ВНИМАНИЕ! Проверьте только то, что записано с этой стороны листа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 3 2 6 9 0 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

IV Продолжение

Т.к. все ~~столбцы~~ столбцы и все строки на рис. 1 одинаковы приведенная ранее ситуация возможна для каждой ~~монеты~~ монеты ~~на~~ ~~поле~~. Противоречие. Тогда $(n-1)$ - минимальное кол-во монет на поле, при котором следующая монета станет частью полностью заполненного прямоугольника 3×1 или 1×3 . Т.к. $(n-1) = 40 \Rightarrow n = 40 + 1 = 41$

Ответ: 41 монетка ОД.

✓ Примечание: $(n-1)$ - количество монеток, которое можно разместить на поле так, что прямоугольник 1×3 или 3×1 не образовался, а следующая монета станет частью полностью заполненного прямоугольника 1×3 или 3×1 .

ВНИМАНИЕ! Проверять только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 3 2 6 9 0 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$\sqrt{5} a^2 + b^2 + c^2 = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a + b + c \leq 3 \quad \text{почему?}$$

Докажем, что

$$\frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} \leq \frac{1}{2}$$

$$a \neq -5; b \neq -5; c \neq -5$$

$$\frac{a(b+5)(c+5) + b(a+5)(c+5) + c(a+5)(b+5)}{(a+5)(b+5)(c+5)} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{(ab+5a)(c+5) + (ab+5b)(c+5) + (ca+5c)(b+5)}{(ab+5b+5a+25)(c+5)} \leq \frac{1}{2}$$

$$abc + 5ac + 5ab + 25a + abc + 5bc + 5ab + 25b + abc + 5c + 5ab + 25c = 3abc + 10(ac+ab+bc) + 25(a+b+c)$$

$$\frac{3abc + 10(ac+ab+bc) + 25(a+b+c)}{abc + 5bc + 5ac + 25c + 5ab + 25b + 25a + 125} \leq \frac{1}{2}$$

$$3abc + 10(ac+ab+bc) + 25(a+b+c) \leq abc + 5bc + 5ac + 5ab + 25c + 25b + 25a + 125$$

$$5abc + 15(ac+ab+bc) + 25(a+b+c) \leq 125 \quad (\text{Зная, что } 25(ac+bc) \leq 75)$$

$$5abc + 15(ac+ab+bc) \geq 125 - 75$$

$$5 \cdot 1 + 15(1+1+1) \geq 50$$

$$5 + 45 \geq 50$$

$$50 = 50$$

ИТД

2д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 3 2 6 9 0 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 2 Чтобы значение
выражения

$-\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + 20$ являлось натуральным числом

необходимо чтобы n делилось на 3 без остатка, то есть было кратно 3. Т.к. ~~натуральное~~ n - натуральное

число: ~~$n \in [3; 6; 9; 12; 15; +\infty)$~~

$n \in [3; +\infty)$ с шагом 3 т.е. 3; 6; 9; 12; ...

Проверим, подставляя n

при $n=3$:

$$-\frac{1}{3} \cdot 9 + \frac{4}{3} \cdot 3 + 20 = -3 + 4 + 20 = 21 - \text{подходит}$$

при $n=6$:

$$-\frac{1}{3} \cdot 36 + \frac{4}{3} \cdot 6 + 20 = -12 + 8 + 20 = 16 - \text{подходит}$$

при $n=9$:

$$-\frac{1}{3} \cdot 81 + \frac{4}{3} \cdot 9 + 20 = -27 + 12 + 20 = 5 - \text{подходит}$$

при $n=12$:

$$-\frac{1}{3} \cdot 144 + \frac{4}{3} \cdot 12 + 20 = -48 + 16 + 20 = -12 - \text{не подходит}$$

Значения выражения с каждым последующим n становились только меньше $\Rightarrow n \geq 12$ не подходит

(Продолжение на след. странице)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А О О О 3 2 6 9 0 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2 Продолжение

$$-\frac{1}{3} \cdot n^2 + \frac{4}{3} \cdot n + 20 = 0$$

$$D = 6^2 - 4ac = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 20 = \frac{16}{9} + \frac{80}{3} = \frac{256}{9} > 0 \Rightarrow \text{два корня}$$

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-\frac{4}{3} \pm \frac{16}{3}}{2\left(-\frac{1}{3}\right)} = \begin{cases} \frac{12}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -6 \\ -\frac{20}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 10 \end{cases}$$

НО нумерация катруальное число $\Rightarrow n \in (-6; 10)$

Т.к. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in (0; 10)$ проверим все целые значения

при $n=1$: $-\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + 20 = \frac{3}{3} + 20 = 21$ - подходит ($\in \mathbb{N}$)

при $n=2$: $-\frac{4}{3} + \frac{8}{3} + 20 = \frac{4}{3} + 20$ - не подходит ($\notin \mathbb{N}$)

при $n=4$: $-\frac{16}{3} + \frac{16}{3} + 20 = 20$ - подходит ($\in \mathbb{N}$)

при $n=5$: $-\frac{25}{3} + \frac{20}{3} + 20 = -\frac{5}{3} + 20$ - не подходит ($\notin \mathbb{N}$)

при $n=7$: $-\frac{49}{3} + \frac{28}{3} + 20 = \frac{21}{3} + 20 = 27$ - подходит ($\in \mathbb{N}$)

при $n=8$: $-\frac{64}{3} + \frac{32}{3} + 20 = \frac{32}{3} + 20$ - не подходит ($\notin \mathbb{N}$)

Ответ: 6 значений 185

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 3 2 8 1 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	15	0	20	x		55

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Пусть

A - количество переписок каждой девочки.

Тогда

$9A$ - сумма количеств переписок у каждой девочки.

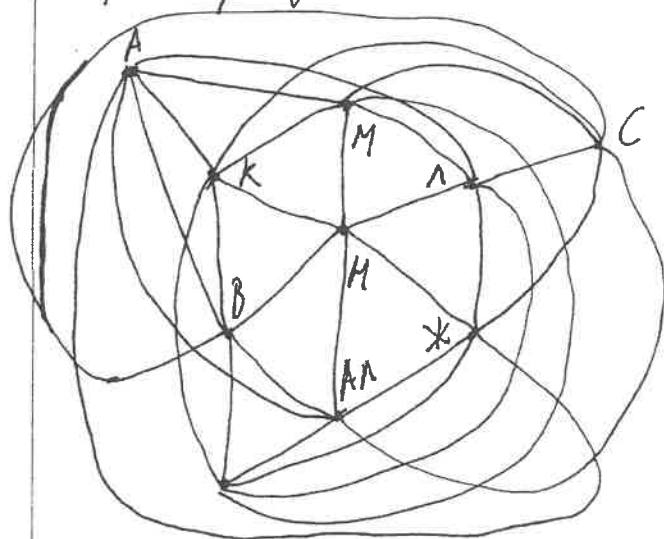
Каждая переписка доставляет к величине $9A$ 2, так как в ней участвуют ровно 2 девочки. То есть всего переписок

$\frac{9A}{2}$. $\text{НОД}(9; 2) = 1$, то есть $A : 2$, так как $\frac{9A}{2} \in \mathbb{N}$

всегда. $A \geq 5$, так как Мама только переписывалась
хотя бы с 5 девочками и $A \leq 8$, так как каждая девоч-
ка может переписываться не более чем с 8 оставшимися.

$A \in \mathbb{N}$ и $5 \leq A \leq 8$, т. $A \in \mathbb{N}$, $A : 2$, $5 \leq A \leq 8$, то есть
 $A \in \{6; 8\}$, при $A=6$, общее число переписок $\frac{9 \cdot 6}{2} = 27$,
а при $A=8$ $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$.

пример для $A=6$:



м - Мама
Л - Лена
А - Аня
С - Света
Ал - Алёна
В - Вера
Ж - Жень

Пример для:
полной гра-
фы. Каждая девочка
дружит с каждой.

200

Ответ: переписок 27 или 36.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 3 2 8 1 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 =$$

$$= -\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n - \frac{9}{5} + 12\frac{4}{5} = \frac{-n^2 + 6n - 9}{5} + 12\frac{4}{5} = \frac{-(n-3)^2}{5} + 12\frac{4}{5} =$$

$$= \frac{-(n-3)^2 + 64}{5} = \frac{(8-n+3)(8+n-3)}{5} = \frac{(11-n)(5+n)}{5}.$$

Пусть $\frac{(11-n)(5+n)}{5} = -\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 \in \mathbb{N}$, тогда

$$\frac{(11-n)(5+n)}{5} > 0, 5 > 0, 5+n > 0, \text{ так как } n \in \mathbb{N}, \text{ то}$$

$$\text{есть } 11-n > 0 \Leftrightarrow 11 > n \Leftrightarrow n < 11 \text{ и } \frac{(11-n)(5+n)}{5} \in \mathbb{N},$$

$$\text{то есть } \frac{(11-n)(5+n)}{5} \in \mathbb{Z}, \text{ то есть } (11-n)(5+n) : 5,$$

$$5 \in \mathbb{P}, \text{ значит } \begin{cases} 11-n \equiv 0 \\ 5+n \equiv 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 11 \\ n \equiv -5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{11}{5} \equiv n \\ n \equiv 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 1 \\ n \equiv 0 \end{cases} \text{ по доказанному } n \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ и}$$

$$n < 11, \text{ то есть } n \in \mathbb{N}, \text{ по условию } n \in \mathbb{N}, \text{ то есть}$$

$$n \in \{5; 6; 10\}. \text{ При } n=5 \quad -\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + 11 = \frac{(11-n)(5+n)}{5} =$$

$$= \frac{(11-5)(5+5)}{5} = \frac{6 \cdot 10}{5} = 12 \in \mathbb{N}, \text{ при } n=6 \quad \frac{(11-6)(5+6)}{5} =$$

$$= \frac{5 \cdot 11}{5} = 11 \in \mathbb{N}, \text{ при } n=10 \quad \frac{(11-10)(5+10)}{5} =$$

$$= \frac{1 \cdot 15}{5} = 3 \in \mathbb{N}. \text{ То есть такие } n \in \mathbb{N} \text{ это только}$$

$$5, 6 \text{ и } 10, \text{ и их } 3. \quad n=1.$$

Ответ: 3

158.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А О О О 3 2 8 1 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

~4
Ответ: 48 монет.

Докажем, что такое число монет у Влада быть не может. Разложим доску как на рисунке 1. Пусть при 48 монетах существует раскладка когда нет прямоугольника 3×1 и 1×3 , во всех клетках которого лежат монеты, тогда при такой раскладке

Рисунок 1. в каждой из тройных досок (3 из 3 клеток) не более 2 монет, иначе есть прямоугольник 1×3 ^{полностью} заполненный монетами, а в частях из 1 клетки не более 1 монеты по условию. Но тогда всего монет не более чем $2 \cdot 23 + 1 = 46 + 1 = 47$, а так $48 > 47$. Поэтому Влада монет быть 48 монет.

Докажем что меньше быть не может. На рисунке 2 показан пример того как можно разложить 47 монет так что бы они не образовывали прямоугольника 1×3 и 3×1 . Примеры для чисел меньше 47 получаются удалением некоторого

Рисунок 2 числа монет, что бы количество монет на доске соответствовало данному числу, при этом не образовывая прямоугольников 1×3 и 3×1 из монет, так как если бы они образовались это означало бы, что и до этого они были, так как новых монет не добавлялось и не убавлялось.

208

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

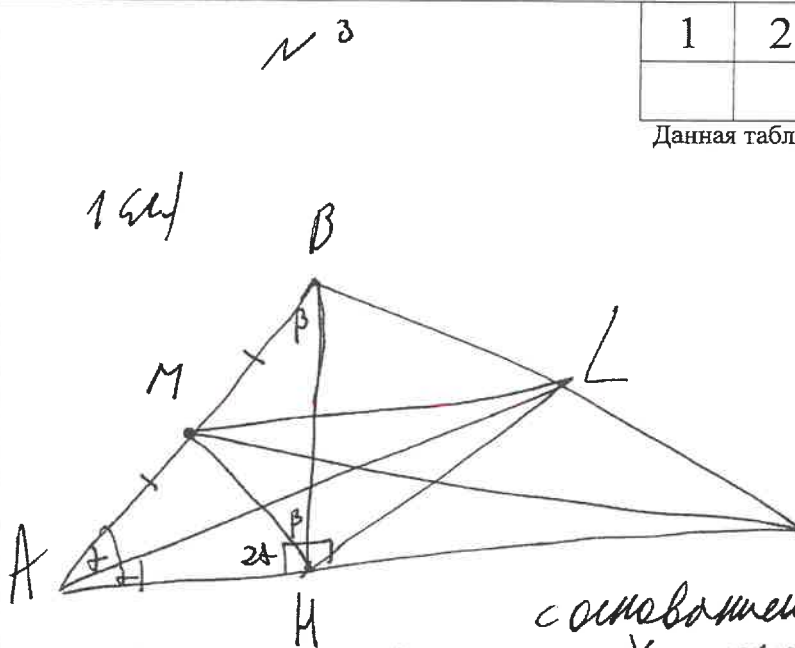
Вариант № 2

М А О О О 3 2 8 1 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

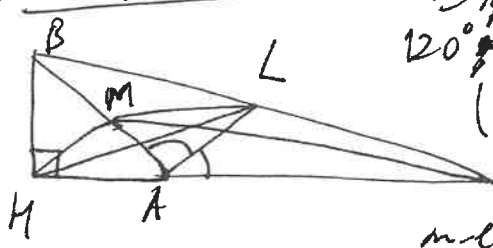
Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)



Дано:
 $MH = LH = 12$
 $\angle LHM = 30^\circ$
 BH и CH - высоты $\triangle ABC$
 $BH + CH = ?$

с основанием ML
 $\triangle MHL$ - равнобедренный по определению ($MH = LH = 12$ по условию). По свойству $\angle MLH = \angle LHM = 30^\circ$. $AM = MB = MH = 12$ по свойству медианы в прямоугольном треугольнике ($\angle AMB = 90^\circ$ к.с. ML - медиана $\triangle AMB$ и $\triangle MBH$ - прямоугольный с $\angle AMB = 90^\circ$ по определению). $\triangle AMH$ - равнобедренный по определению ($AM = MH = 12$ по доказанному). $\triangle BMH$ - равнобедренный по определению ($BM = MH = 12$ по доказанному). По свойству $\angle MMA = \angle MAH = 2\alpha$, $\angle MBH = \angle MHB = \beta$. По теореме о сумме углов $\triangle MLH$ $\angle MHL = 180^\circ - \angle MLH - \angle LMH = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$.

2-й способ:



Также $\angle MHL = 180^\circ - \angle MLH - \angle LMH = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$ по свойству. $\triangle MHL$ - равнобедренный с основанием ML по определению, $MH = LH$, а $\angle MHL = 120^\circ$. По свойству $\angle MBH = \angle MHB = \beta$. По теореме о сумме углов $\triangle MLH$ $\angle MHL = 180^\circ - \angle MLH - \angle LMH = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$ по свойству. $\triangle MHL$ - равнобедренный с основанием ML по определению, $MH = LH$, а $\angle MHL = 120^\circ$. По свойству $\angle MBH = \angle MHB = \beta$. По теореме о сумме углов $\triangle MLH$ $\angle MHL = 180^\circ - \angle MLH - \angle LMH = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$ по свойству.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

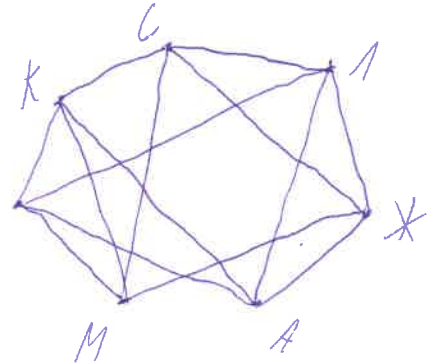
М А О О О 3 2 9 1 4 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	16	x	12	x		48

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Диагональ (Буква - символ девочки)



№1

Представим задачу в виде графа: Девочки - вершины
Партии - Ребра.

Партий было сыграно каждой девочкой минимум 3, (Маша сыграла 3, $\Rightarrow$ все минимум 3)
максимум 5 (Маша может сыграть со всеми кроме Катю, $\Rightarrow 6 - 1 = 5$ партий)

Если сыграно 3 или 5 партий каждой девочкой, то у каждой вершины степень 3 или 5 (нечётная), а вершин 7. Нечётное кол-во нечётных по степени вершин противоречит лемме о рукопожатиях $\Rightarrow$ каждая сыграла 4 партии.
Пример см. рисунок

Ответ: Каждая девочка сыграла 4 партии. 208.

№2

n обязан иметь простой множитель 2 в хотя бы 1 степени, иначе $-\frac{1}{4}n^2$ не целая $\Rightarrow -\frac{1}{4}n^2 + 2n + 12$ тоже не целая $\Rightarrow$ не натуральная.

$$-\frac{1}{4}n^2 + 2n + 12 = n(-\frac{1}{4}n + 2) + 12 \Rightarrow \text{будем подбирать кратные 2 числа пока не найдем } < 1$$

$$!n=2$$

$$2(-\frac{1}{4} \cdot 2 + 2) + 12 = 15$$

$$!n=4$$

$$4(-\frac{1}{4} \cdot 4 + 2) + 12 = 16$$

$$!n=6$$

$$6(-\frac{1}{4} \cdot 6 + 2) + 12 = 13$$

$$!n=8$$

$$8(-\frac{1}{4} \cdot 8 + 2) + 12 = 12$$

$$!n=10$$

$$10(-\frac{1}{4} \cdot 10 + 2) + 12 = 7$$

$$!n=12$$

$$12(-\frac{1}{4} \cdot 12 + 2) + 12 = 0$$



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М А О О О 3 2 9 1 4 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

У нас получилось 5 подго-
дающих $n: 2; 4; 6; 8; 10$

при $n=13$ $n \geq 12$ получаются не натуральные числа
 $0 \leq n < 2$ быть не может (т.к. 1 не подходит, а это
самое маленькое натуральное)

Ответ: 5

168.

№3

Чтобы найти нужное нам количество, мы можем
найти расстановку монет при которой их макс-во
и если положить ещё одну монетку образуются
прямоугольники 1×3
или 3×1 из монет (без помехи монет)

прямоугольников не должно быть)

Для этого используем раскраску:
(Б-белый; С-серый; Ч-чёрный)

Б	С	Ч	Б	С	Ч	Б
С	Ч	Б	С	Ч	Б	С
Ч	Б	С	Ч	Б	С	Ч
Б	С	Ч	Б	С	Ч	Б
С	Ч	Б	С	Ч	Б	С
Ч	Б	С	Ч	Б	С	Ч
Б	С	Ч	Б	С	Ч	Б
С	Ч	Б	С	Ч	Б	С

Нам подойдет расстановка на
2 цвета из 3-х.

Белых клеток: 19

Серых клеток: 19

Чёрных клеток: 18

$\Rightarrow 19 + 19 = 38$ монет в той расстановке. + 1 чтобы всегда
был хотя бы один прямоугольник монет 1×3
или 3×1 $\Rightarrow 38 + 1 = 39$

Ответ: 39 монет

128.

ВНИМАНИЕ! Проверяться только то, что записано с этой стороны листа
в рамке справа

